Ecole Normale Supérieure de Cachan Département de Génie Mécanique et de génie Civil **Résumé de cours**

traction de poutre HPP au comportement non linéaire

Bertin Morgan

Table des matières

Ι	introduction	3
1	hypothèses de l'étude	3
2	objéctifs	3
II	Rappels et généralités	3
3	torseur des efforts intérieurs 3.1 Les différents cas rencontrés	3 4
II	I Hypothèses fondamentales de la RDM	4
4	L'hypothèse d'Euler Bernouilli 4.1 Déformation par rapport à la ligne moyenne	4 4
I\ sie	Conséquences de l'hypothèse d'Euler Bernouilli et d'un comportement élat- que	4
5	Loi de comportement élastique de la poutre	4
6	Calcul des contraintes dans une section droite 6.1 Profil de la contrainte 6.2 Contraintes dues aux efforts tranchants	4 4 5
v	Comportement non linéaire des matériaux	5
7	Le béton 7.1 Traction et flexion d'une plaque	5 5
V	I Comportement non linéaire de poutre métalliques	5
8	Loi de comportement 8.1 Loi de comportement en traction en non linéaire 8.2 Loi de comportement en fléxion en non linéaire	5 5 5
9	Moment géométrique9.1exemple d'une surface réctangulaire .	6 6
10	Problème complet de RDM en élasticité	6
v	II Comportement au jeune age	6
11	Hydratation du ciment 11.1 Etude thermique 11.1.1 Dégagment de chaleur lors de l'hydratation 11.1.2 Mesure du dégament de chaleur 11.1.3 Capacité calorifique d'un matériaux hétérogène	6 7 7 7 7

12 Modélisation					
12.1 Hydratation	7				
12.1.1 Le degrée d'hydratation	7				

Première partie introduction

1 hypothèses de l'étude

- Pas de torsion
- Hypothèse des petites déformations (HPP)
- Structures faites d'un seul matériau

2 objéctifs

Donner les bases pour le calcul des structures en béton armé.

Deuxième partie Rappels et généralités

Le torseur des efforts intérieurs traduit les efforts de cohésions de la matière. Pour un modèle 1D :

$$\{\tau_{int}\} = \{\tau_{s^+s^-}\}$$

 $\begin{array}{c|c} \mbox{Efforts généralisés :} \\ \mbox{Forces} \\ \mbox{Moments} \end{array} \Rightarrow \mbox{Champs de contrainte } \underline{\sigma} \end{array}$

Analyse des différences $1D \ 3D$:

1D	3D
157	
$\frac{dN}{dx_{z}} + f_{x} = 0$	Loi d'équilibre $div(\underline{\sigma}) + \underline{f} = 0$
$\frac{dM}{dx} + T = 0$	
Cinématique d'une poutre	$\operatorname{cin\acute{e}matique} 3\mathrm{D}$
déplacement $\underline{u} = (u, v, w)$	déplacement $\underline{u} = (u_x, u_y, u_z)$
rotation $\underline{\theta} = (\theta_x, \theta_y, \theta_z)$	$n \acute{e} ant$
Encastrement d'une poutre $1D$	Encastrement d'une poutre 3D
u = v = w = 0	$u_x = u_y = u_z = 0$
$\theta_x = \theta_y = \theta_z = 0, \forall x = 0$	$\forall M \in \Sigma_0$

3 torseur des efforts intérieurs

Il se calcul statiquement par :

$$\{\tau_{int}\} = \{\tau_{s^-s^+}\}$$

il s'écrit :

$$\{\tau_{int}\} = \begin{vmatrix} \vec{R} = N(x)\vec{x} + V_y(x)\vec{y} + V_z x\vec{z} \\ \vec{M} = T(x)\vec{x} + M_y(x)\vec{y}M_z\vec{z} \end{vmatrix}$$

Ici T =moment de torsion = 0 (voir les hypothèses de l'étude). Pour un point x d'une poutre droite d'absisse curviligne s = x on a :

N = effort normal $V_y, V_z =$ efforts tranchants $M_y, M_z =$ moments de flexion

3.1 Les différents cas rencontrés

 \diamond Traction, N seul les autres nuls. \diamond Flexion pure dans le plan Oxy si M_z seul, les autres nuls. Flexion simple dans le plan Oxy si M_z et V_y seuls non nuls.

Troisième partie Hypothèses fondamentales de la RDM

• La théorie des poutres est basée sur l'hypothèse des petites perturbation, petites rotations. Attention pour les structures souples. La relation $\epsilon = \frac{du}{dx}$ est vérifié en 1D.

• Le principe de **Saint Venant** permet de définir les grandeurs statiques (moments, efforts en 1D) qui ont à une certaine distance (relativement faible) de leur point d'application le même effet qu'un champ de vecteur contrainte normal (3D).

• L'hypothèse d'Euler Bernouilli qui conduit à une cnétique simple à utiliser. Remarque : Une hypothèse moins forte (sans l'orthogonalité de la séction droite par rapport à la ligne moyenn).

4 L'hypothèse d'Euler Bernouilli

4.1 Déformation par rapport à la ligne moyenne

$$\epsilon_{xx} = a_0 + a_1 y + a_2 z$$

ou les a_i dépendent de x, dépendent linéairement de y et de z.

a_i	écriture 1	écriture 2
0	u'(x)	$\epsilon(x)$
1	$-\frac{d}{dx}\theta_z$	-v''(x)
2	$-\frac{d}{dx}\theta_y$	$-\omega''(x)$

Quatrième partie Conséquences de l'hypothèse d'Euler Bernouilli et d'un comportement élatsique

 $\begin{array}{l|l} \text{plan } oxy & M_z = EI_z v''(x) & I_z = \int \int y^2 dS \\ \text{plan } oyz & M_y = -EI_y \omega'' & I_z = \int \int y^2 dS \end{array}$

5 Loi de comportement élastique de la poutre

 $N = E\delta\epsilon = E\delta u'(x)$ $M_y = -EI\omega'' = EI\theta'_y$ $M_z = EIv'' = EI\theta'_z$

6 Calcul des contraintes dans une section droite

6.1 Profil de la contrainte

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{S} - \frac{M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z$$

Profil linéaire de la contrainte σ_{xx} dans une section droite.

6.2 Contraintes dues aux efforts tranchants

On isole la petite partie de solide entre x et x + dx et on lui applique le principe fondamental de la statique suivant<u>x</u>.

$$\sigma_{xy}(y_0) = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial}{-\partial x} \sigma_{xx} dy \tag{1}$$

Et en utilisant l'équation d'équilibre

$$\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xy} = -\frac{dM_z}{dx} \cdot \frac{y}{I_z} = V_y \frac{y}{I_z}$$
(2)

En utilisant (1) et (2) on obtient avec V_y l'effort tranchant :

$$\sigma_{xy}(y_0) = \frac{V_y}{2I_z} \cdot \left[\frac{h^2}{4} - y_0^2\right]$$

On aboutit donc à la conclusion suivante : pas d'effort tranchant implique qu'il n'éxiste pas de contrainte de cisaillement.

Cinquième partie Comportement non linéaire des matériaux

7 Le béton

$$\sigma_{bc} = f_c \cdot \left[1 - \left(\frac{\epsilon_{bc}}{\epsilon_0} - 1\right)^2\right] \quad \forall \epsilon_{bc} < \epsilon_0$$

$$\sigma_{bc} = fc \quad \forall \epsilon_{bc} \in [\epsilon_0, \epsilon_r]$$

Rupture (compression) des que $\epsilon_{bc} = \epsilon_R$.

7.1 Traction et flexion d'une plaque

Nous sommes en déformation en traction plane.

$$\sigma_{zz} = \nu \sigma_{xx} \quad \sigma_{xx} = E' \epsilon_{xx} \quad E' = \frac{E}{1 - \gamma^2}$$

Sixième partie Comportement non linéaire de poutre métalliques

8 Loi de comportement

8.1 Loi de comportement en traction en non linéaire

$$N = KS|\epsilon|^{\frac{1}{n}}sign(\epsilon)$$

8.2 Loi de comportement en fléxion en non linéaire

$$M = KJ|v''|^{\frac{1}{n}}sgn(v'')$$

9 Moment géométrique

$$J = 2 \int \int_{y>0} y^{1+\frac{1}{n}} dS$$

9.1 exemple d'une surface réctangulaire

b suivant \underline{z} et h suivant y.

$$J = \frac{b \cdot h^{2+\frac{1}{n}}}{2^{1+\frac{1}{n}} \cdot (2+\frac{1}{n})}$$

10 Problème complet de RDM en élasticité

• Equations d'équilibres.

• Conditions aux limites + chargement $\rightarrow N, M_y, M_z$ (V_y, V_z) .

• Comportement élastique ou Comportement non linéaire.

Septième partie Comportement au jeune age

11 Hydratation du ciment

 $eau + ciment \rightarrow hydrates + chaleur.$

Le ciment est composé de 80% de calcaire et de 20% d'argile, broyé et chauffé à 1450°C cela donne le clinker composé de 4 éléments principaux : C_3S , C_2S , C_2A , C_4AF . On rajoute au clinker du Gypse pour éviter le phénomène de fausse prise. On ajoute éventuellement aussi des déchets de silice, de cendres volantes, laitier. Ceci dans le but de valoriser les déchets ou améliorer les performances mécaniques ou de durabilités. Les proportions des éléments principaux (C_3S , C_2S , ...) dépendent de la cimenterie.

Il y a différentes étapes de l'hydratation du béton :

• Dissolution : les grain de clinker se disolvent partielement.

• Précipitation : $V_{hydrates} \approx 2V_{ciment ayant ragit}$, la couche d'hydrates est poreuse, elle permet donc toujours la dissolution.

• Diffusion, dissolution, précipitation : la couche d'hydrates internes se forment dans un espace confiné (porosité plus faible).

Plus on broye le ciment, plus on augmente les surfaces d'échanges et donc la cinétique.



FIG. 1 – Cinétique d'hydratation

11.1 Etude thermique

11.1.1 Dégagment de chaleur lors de l'hydratation

$$q_c = \sum_{i=1}^n \phi_i \cdot q_i$$

 q_c : Chaleur massique d'hydratation du ciment.

 q_i : Chaleur massique d'hydratation de la phase i.

11.1.2 Mesure du dégament de chaleur

On mesure la température de la patte de ciment placé dans une enceinte calorifugé. Bilan d'énérgie : $dq_{bet} - dQ_p(t) = m_{pdc} \cdot C_{pdc} \cdot dT_{pdc}(t) \quad q_{pdc}(t) = m_c \cdot q_c(t).$

11.1.3 Capacité calorifique d'un matériaux hétérogène

$$C_{moy}^{th} = \sum_{i} f_i C_i^{th}$$

 f_i : Capacité calorifique Volumique du constituant i. C_i^{th} : Proportion volumique du consituant i.

12 Modélisation

12.1 Hydratation

Dégré d'hydratation moyen, toutes les réactions chimiques existent. On sèche le béton pour limiter la quantité d'eau dans les pores. On considère un système fermé (sans pertes de masse) : • Granulat : inerte.

• Ciment : conservation lors de l'hydratation. $\frac{dm_a}{dt} = \frac{dm_{sa}}{dt}$, avec m_a : masse d'anhydre et m_{sa} : masse de ciment qui a réagit.

• Eau : même relation que précedement.

12.1.1 Le degrée d'hydratation

$$\xi(t) = \frac{m_{se}(t)}{m_{se}(\infty)}$$

 $m_{se}(t)$: masse d'eau consommée lors de l'hydratation.

 $m_{se}(\infty)$: masse d'eau consommée lorsque l'hydratation est complète.

$$\frac{E}{C} = \frac{m \ H20 \ introduit}{m \ ciment \ introduit}$$

 $\begin{array}{l} \frac{E}{C} \mbox{ élevé : hydratation complète pour } t \to \infty. \\ \frac{E}{C} \mbox{ faible : hydratation incomplète.} \end{array}$