#### Ecole Normale Supérieure de Cachan Département de Génie Mécanique et de génie Civil **Résumé de cours**

# traction de poutre HPP au comportement non linéaire

Bertin Morgan

## Table des matières

| L         | introduction   | 3                |
|-----------|--|------------------|
| 1         | hypothèses de l'étude  | 3                |
| 2         | objéctifs  | 3                |
| ΙΙ        | Rappels et généralités   | 3                |
| 3         | torseur des efforts intérieurs 3.1 Les différents cas rencontrés                   | <b>3</b>         |
| ΙI        | I Hypothèses fondamentales de la RDM   | 4                |
| 4         | L'hypothèse d'Euler Bernouilli 4.1 Déformation par rapport à la ligne moyenne      | <b>4</b>         |
| IV<br>sic | Conséquences de l'hypothèse d'Euler Bernouilli et d'un comportement élat-<br>que   | 4                |
| 5         | Loi de comportement élastique de la poutre   | 4                |
| 6         | Calcul des contraintes dans une section droite         6.1 Profil de la contrainte | 4<br>4<br>5      |
| V         | Comportement non linéaire des matériaux  | 5                |
| 7         | Le béton 7.1 Traction et flexion d'une plaque                                      | <b>5</b><br>5    |
| V         | I Comportement non linéaire de poutre métalliques                                  | 5                |
| 8         | Loi de comportement  8.1 Loi de comportement en traction en non linéaire           | <b>5</b><br>5    |
| 9         | Moment géométrique 9.1 exemple d'une surface réctangulaire                         | <b>6</b>         |
| 10        | Problème complet de RDM en élasticité  | 6                |
| V         | II Comportement au jeune age   | 6                |
| 11        | Hydratation du ciment  11.1 Etude thermique  | 6<br>7<br>7<br>7 |

| 12 Modélisation                | 7     |
|--------------------------------|-------|
| 12.1 Hydratation               | <br>7 |
| 12.1.1 Le degrée d'hydratation | <br>7 |

## Première partie

## introduction

## 1 hypothèses de l'étude

- Pas de torsion
- Hypothèse des petites déformations (HPP)
- Structures faites d'un seul matériau

## 2 objectifs

Donner les bases pour le calcul des structures en béton armé.

#### Deuxième partie

# Rappels et généralités

Le torseur des efforts intérieurs traduit les efforts de cohésions de la matière. Pour un modèle 1D:

$$\{\tau_{int}\} = \{\tau_{s^+s^-}\}$$

Efforts généralisés :

Forces

Moments  $\Rightarrow$  Champs de contrainte  $\underline{\sigma}$ 

Analyse des différences 1D 3D:

| 1D   | 3D  |
|--|---|
| $\frac{dN}{dx} + f_x = 0$ $\frac{dM}{dx} + T = 0$              | Loi d'équilibre $div(\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{f} = 0$ |
| Cinématique d'une poutre                                       | cinématique 3D  |
| déplacement $\underline{u} = (u, v, w)$                        | déplacement $\underline{u} = (u_x, u_y, u_z)$                             |
| rotation $\underline{\theta} = (\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ | néant   |
| Encastrement d'une poutre 1D                                   | Encastrement d'une poutre 3D  |
| u = v = w = 0  | $u_x = u_y = u_z = 0$   |
| $\theta_x = \theta_y = \theta_z = 0, \forall x = 0$            | $\forall M \in \Sigma_0$  |

#### 3 torseur des efforts intérieurs

Il se calcul statiquement par :

$$\{\tau_{int}\} = \{\tau_{s^-s^+}\}$$

il s'écrit :

$$\{\tau_{int}\} = \begin{vmatrix} \vec{R} = N(x)\vec{x} + V_y(x)\vec{y} + V_z x\vec{z} \\ \vec{M} = T(x)\vec{x} + M_y(x)\vec{y}M_z\vec{z} \end{vmatrix}$$

Ici T =moment de torsion = 0 (voir les hypothèses de l'étude). Pour un point x d'une poutre droite d'absisse curviligne s=x on a :

 $N={
m effort\ normal}$ 

 $V_y, V_z = \text{efforts transhants}$ 

 $M_y, M_z =$ moments de flexion

#### 3.1 Les différents cas rencontrés

 $\diamond$  Traction, N seul les autres nuls.  $\diamond$  Flexion pure dans le plan Oxy si  $M_z$  seul, les autres nuls. Flexion simple dans le plan Oxy si  $M_z$  et  $V_y$  seuls non nuls.

#### Troisième partie

# Hypothèses fondamentales de la RDM

- La théorie des poutres est basée sur l'hypothèse des petites perturbation, petites rotations. Attention pour les structures souples. La relation  $\epsilon = \frac{du}{dx}$  est vérifié en 1D.
- Le principe de **Saint Venant** permet de définir les grandeurs statiques (moments, efforts en 1D ) qui ont à une certaine distance (relativement faible) de leur point d'application le même effet qu'un champ de vecteur contrainte normal (3D).
- L'hypothèse d'Euler Bernouilli qui conduit à une cnétique simple à utiliser. Remarque : Une hypothèse moins forte (sans l'orthogonalité de la séction droite par rapport à la ligne moyenn).

#### 4 L'hypothèse d'Euler Bernouilli

#### 4.1 Déformation par rapport à la ligne moyenne

$$\epsilon_{xx} = a_0 + a_1 y + a_2 z$$

ou les  $a_i$  dépendent de x, dépendent linéairement de y et de z.

$$\begin{array}{c|cccc} a_i & \text{écriture 1} & \text{écriture 2} \\ 0 & u'(x) & \epsilon(x) \\ 1 & -\frac{d}{dx}\theta_z & -v''(x) \\ 2 & -\frac{d}{dx}\theta_y & -\omega''(x) \end{array}$$

## Quatrième partie

# Conséquences de l'hypothèse d'Euler Bernouilli et d'un comportement élatsique

$$\begin{array}{c|cccc} \text{plan } oxy & M_z = EI_zv''(x) & I_z = \int \int y^2 dS \\ \text{plan } oyz & M_y = -EI_y\omega'' & I_z = \int \int y^2 dS \end{array}$$

## 5 Loi de comportement élastique de la poutre

$$\begin{array}{lll} N & = E\delta\epsilon & = E\delta u'(x) \\ M_y & = -EI\omega'' & = EI\theta'_y \\ M_z & = EIv'' & = EI\theta'_z \end{array}$$

#### 6 Calcul des contraintes dans une section droite

#### 6.1 Profil de la contrainte

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{S} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

5

Profil linéaire de la contrainte  $\sigma_{xx}$  dans une section droite.

#### 6.2 Contraintes dues aux efforts tranchants

On isole la petite partie de solide entre x et x + dx et on lui applique le principe fondamental de la statique suivant $\underline{x}$ .

$$\sigma_{xy}(y_0) = -\int_{-\frac{h}{\alpha}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial}{-\partial x} \sigma_{xx} dy \tag{1}$$

Et en utilisant l'équation d'équilibre

$$\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xy} = -\frac{dM_z}{dx} \cdot \frac{y}{I_z} = V_y \frac{y}{I_z} \tag{2}$$

En utilisant (1) et (2) on obtient avec  $V_y$  l'effort tranchant :

$$\sigma_{xy}(y_0) = \frac{V_y}{2I_z} \cdot \left[ \frac{h^2}{4} - y_0^2 \right]$$

On aboutit donc à la conclusion suivante : pas d'effort tranchant implique qu'il n'éxiste pas de contrainte de cisaillement.

#### Cinquième partie

## Comportement non linéaire des matériaux

#### 7 Le béton

$$\sigma_{bc} = f_c \cdot \left[1 - \left(\frac{\epsilon_{bc}}{\epsilon_0} - 1\right)^2\right] \ \forall \epsilon_{bc} < \epsilon_0$$
$$\sigma_{bc} = f_c \ \forall \epsilon_{bc} \in [\epsilon_0, \epsilon_r]$$

Rupture (compression) des que  $\epsilon_{bc} = \epsilon_R$ .

#### 7.1 Traction et flexion d'une plaque

Nous sommes en déformation en traction plane.

$$\sigma_{zz} = \nu \sigma_{xx} \quad \sigma_{xx} = E' \epsilon_{xx} \quad E' = \frac{E}{1 - \gamma^2}$$

## Sixième partie

# Comportement non linéaire de poutre métalliques

#### 8 Loi de comportement

#### 8.1 Loi de comportement en traction en non linéaire

$$N = KS|\epsilon|^{\frac{1}{n}} sign(\epsilon)$$

#### 8.2 Loi de comportement en fléxion en non linéaire

$$M = KJ|v''|^{\frac{1}{n}}sgn(v'')$$

## 9 Moment géométrique

$$J = 2 \int \int_{y>0} y^{1 + \frac{1}{n}} dS$$

#### 9.1 exemple d'une surface réctangulaire

b suivant  $\underline{z}$  et h suivant y.

$$J = \frac{b \cdot h^{2 + \frac{1}{n}}}{2^{1 + \frac{1}{n}} \cdot (2 + \frac{1}{n})}$$

#### 10 Problème complet de RDM en élasticité

- Equations d'équilibres.
- Conditions aux limites + chargement  $\rightarrow N, M_y, M_z (V_y, V_z)$ .
- Comportement élastique ou Comportement non linéaire.

#### Septième partie

## Comportement au jeune age

## 11 Hydratation du ciment

 $eau + ciment \rightarrow hydrates + chaleur.$ 

Le ciment est composé de 80% de calcaire et de 20% d'argile, broyé et chauffé à  $1450^{\circ}$ C cela donne le clinker composé de 4 éléments principaux :  $C_3S$ ,  $C_2S$ ,  $C_2A$ ,  $C_4AF$ . On rajoute au clinker du Gypse pour éviter le phénomène de fausse prise. On ajoute éventuellement aussi des déchets de silice, de cendres volantes, laitier. Ceci dans le but de valoriser les déchets ou améliorer les performances mécaniques ou de durabilités. Les proportions des éléments principaux ( $C_3S$ ,  $C_2S$ ,...) dépendent de la cimenterie.

Il y a différentes étapes de l'hydratation du béton :

- Dissolution : les grain de clinker se disolvent partielement.
- Précipitation :  $V_{hydrates} \approx 2V_{ciment\ ayant\ ragit}$ , la couche d'hydrates est poreuse, elle permet donc toujours la dissolution.
- Diffusion, dissolution, précipitation : la couche d'hydrates internes se forment dans un espace confiné (porosité plus faible).

Plus on broye le ciment, plus on augmente les surfaces d'échanges et donc la cinétique.

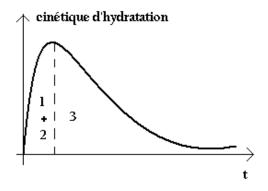


Fig. 1 – Cinétique d'hydratation

#### 11.1Etude thermique

#### Dégagment de chaleur lors de l'hydratation

$$q_c = \sum_{i=1}^n \phi_i \cdot q_i$$

 $q_c$ : Chaleur massique d'hydratation du ciment.  $q_i$ : Chaleur massique d'hydratation de la phase i.

#### 11.1.2Mesure du dégament de chaleur

On mesure la température de la patte de ciment placé dans une enceinte calorifugé. Bilan d'énérgie :  $dq_{bet} - dQ_p(t) = m_{pdc} \cdot C_{pdc} \cdot dT_{pdc}(t) \quad q_{pdc}(t) = m_c \cdot q_c(t).$ 

#### 11.1.3 Capacité calorifique d'un matériaux hétérogène

$$C_{moy}^{th} = \sum_{i} f_i C_i^{th}$$

 $f_i$ : Capacité calorifique Volumique du constituant i.  $C_i^{th}$ : Proportion volumique du consituant i.

#### 12 Modélisation

#### 12.1Hydratation

Dégré d'hydratation moyen, toutes les réactions chimiques existent. On sèche le béton pour limiter la quantité d'eau dans les pores. On considère un système fermé (sans pertes de masse) :

• Granulat : inerte.

• Ciment : conservation lors de l'hydratation.  $\frac{dm_a}{dt} = \frac{dm_{sa}}{dt}$ , avec  $m_a$  : masse d'anhydre et  $m_{sa}$  : masse de ciment qui a réagit.

• Eau : même relation que précedement.

#### 12.1.1 Le degrée d'hydratation

$$\xi(t) = \frac{m_{se}(t)}{m_{se}(\infty)}$$

 $m_{se}(t)$ : masse d'eau consommée lors de l'hydratation.

 $m_{se}(\infty)$ : masse d'eau consommée lorsque l'hydratation est complète.

$$\frac{E}{C} = \frac{m \; H20 \; introduit}{m \; ciment \; introduit}$$

 $\frac{E}{C}$ élevé : hydratation complète pour  $t\to\infty.$   $\frac{E}{C}$  faible : hydratation incomplète.