

**THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Présenté par

**Louis KOVALEVSKY**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR  
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Domaine :

**MÉCANIQUE ET GÉNIE MÉCANIQUE**

Sujet de la thèse :

**La théorie variationnelle de rayons complexes version  
Fourier**

Application aux problèmes vibro-acoustique tridimensionnelle.

Document provisoire 5 avril 2011

Soutenance prévue à Cachan le 27 mai 2011 devant le jury composé de :

<b>Christian CLERC</b>	Vibratec	Examineur
<b>Wim DESMET</b>	Katholieke Universiteit Leuven	Rapporteur
<b>Jean Louis GUYADER</b>	INSA Lyon	Examineur
<b>Pierre LADEVÈZE</b>	ENS de Cachan	Directeur de thèse
<b>Robin S. LANGLEY</b>	University of Cambridge	Examineur
<b>Hervé RIOU</b>	ENS de Cachan	Encadrant de thèse

---

**LMT-Cachan**

ENS Cachan/CNRS/UPMC/PRES UniverSud Paris  
61, avenue du Président Wilson  
94235 CACHAN CEDEX



---

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Table des figures</b>	<b>v</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Problèmes de référence et notations</b>	<b>7</b>
1.1 Problème de référence en vibroacoustique . . . . .	7
1.1.1 Problème d’acoustique . . . . .	8
1.1.2 Problème de plaques . . . . .	9
<b>2 Un état de l’art</b>	<b>11</b>
2.1 Les méthodes polynomiales . . . . .	13
2.1.1 La méthode des éléments finis et ses extensions . . . . .	13
2.1.2 Les méthodes de type éléments de frontière . . . . .	16
2.1.3 Méthodes basées sur la partition de l’unité . . . . .	19
2.2 Les méthodes ondulatoires . . . . .	21
2.2.1 Ultra Weak Variational Formulation . . . . .	22
2.2.2 Les T-elements . . . . .	22
2.2.3 Discontinuous Enrichment Method . . . . .	23
2.2.4 Wave Boundary Element Method (WBEM) . . . . .	24
2.2.5 Wave Based Method (WBM) . . . . .	24
2.3 Les méthodes énergétiques . . . . .	25
2.3.1 Statistical Energy Analysis . . . . .	26
2.3.2 Méthode SEA-like . . . . .	27
2.3.3 Statistical modal Energy distribution Analysis . . . . .	27
2.3.4 Méthode des coefficients d’influence énergétique . . . . .	28
2.3.5 Wave Intensity Analysis . . . . .	28
2.3.6 Méthodes de diffusion de l’énergie . . . . .	29
2.3.7 Méthode énergétique simplifiée . . . . .	29
2.3.8 Méthode de tracé de rayons . . . . .	30
2.3.9 Méthodes de l’enveloppe . . . . .	30
2.3.10 Méthodes asymptotiques . . . . .	31
2.4 Conclusion . . . . .	31

<b>3</b>	<b>La Théorie Variationnelle des Rayons Complexes</b>	<b>33</b>
3.1	Réécriture du problème de référence . . . . .	35
3.1.1	Formulation variationnelle . . . . .	35
3.1.2	Equivalence avec le problème de référence . . . . .	37
3.2	Approximations et discrétisation du problème . . . . .	38
3.2.1	Approximation des solutions homogènes des équations de Helmholtz et des plaques . . . . .	39
3.2.2	Solution particulière de la partie inhomogène des équations de Helmholtz et de Kirchhoff . . . . .	41
3.2.3	Discrétisation classique du problème . . . . .	41
3.3	Convergence de la TVRC . . . . .	43
3.3.1	$h$ - et $p$ -convergence : cas d'une onde plane . . . . .	43
3.4	Conclusion . . . . .	45
<b>4</b>	<b>La TVRC-Fourier, appliquée à l'acoustique bi-dimensionnelle</b>	<b>47</b>
4.1	L'approximation de type Fourier . . . . .	49
4.2	Mise en oeuvre numérique . . . . .	51
4.2.1	Cas d'un bord droit : méthode semi-analytique . . . . .	51
4.2.2	Cas d'un bord courbe : méthode numérique . . . . .	52
4.2.3	Influence des paramètres d'intégration . . . . .	52
4.2.4	Méthode numérique avec approximation asymptotique . . . . .	53
4.3	Propriétés de convergence du champ de pression . . . . .	54
4.3.1	Convergence de la TVRC-Fourier . . . . .	54
4.3.2	Influence de la sous-structuration . . . . .	55
4.4	Vers un critère énergétique pour le choix du nombre de degrés de liberté . . . . .	56
4.5	Etude de la convergence du portrait d'amplitude . . . . .	57
4.5.1	Non convergence paradoxale du portrait d'amplitude . . . . .	57
4.5.2	Convergence du spectre, et régularisation du portrait d'amplitude . . . . .	59
4.6	Application à une cavité acoustique complexe . . . . .	60
4.7	Conclusion . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Extension de la TVRC-Fourier à l'acoustique tridimensionnelle</b>	<b>63</b>
5.1	L'approximation de type Fourier dans le cadre tridimensionnel . . . . .	65
5.2	Propriétés des fonctions de forme . . . . .	66
5.3	Méthode d'intégration . . . . .	67
5.3.1	Intégration sur la sphère unité . . . . .	67
5.3.2	Intégration sur la surface . . . . .	69
5.4	Convergence de la méthode . . . . .	69
5.4.1	Guide d'ondes cubique . . . . .	69
5.4.2	Diffraction d'une onde par une sphère en milieu infini . . . . .	72
5.5	Exemples d'application . . . . .	73
5.5.1	Cas d'une cavité en $Z$ . . . . .	74
5.5.2	Cas d'une cavité automobile . . . . .	77
5.6	Conclusion . . . . .	79

---

<b>6</b>	<b>Application de la TVRC-Fourier aux problèmes de couplage vibro-acoustique</b>	<b>81</b>
6.1	La TVRC-Fourier appliquée aux plaques en flexion . . . . .	83
6.1.1	Problèmes de référence et formulation variationnelle associée . . . . .	83
6.1.2	Approximation du champ de déplacement . . . . .	84
6.1.3	Convergence de la méthode . . . . .	85
6.1.4	Portraits d'amplitude régularisés . . . . .	87
6.2	La TVCR-Fourier appliquée aux problèmes de vibro-acoustique tridimensionnelle . . . . .	87
6.2.1	Problèmes de référence et formulation variationnelle associée . . . . .	88
6.2.2	Champ de pression acoustique . . . . .	89
6.2.3	Champ de déplacements structuraux . . . . .	91
6.2.4	Assemblage de l'opérateur . . . . .	92
6.2.5	Solution du problème . . . . .	93
6.3	Conclusion . . . . .	94
	<b>Conclusion</b>	<b>95</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>97</b>



---

# Table des figures

1	Fonction de réponse en fréquence d'une structure complexe [Ohayon et Soize, 1998]. . . . .	2
2	Fonction de réponse en fréquence de 98 voitures issues de la même ligne de production [Kompella et Bernhard, 1993]. . . . .	3
1.1	Définition de la géométrie pour un problème de couplage vibro-acoustique. . . . .	8
3.1	Exemple de fonctions de forme acoustique : rayon propagatif (à gauche) et rayon évanescent (à droite). . . . .	40
3.2	Discrétisation angulaire de la distribution des amplitudes $A_E^\square$ (voir (3.28)) des rayons propagatifs d'ordre 0 pour un problème 2D. . . . .	42
3.3	Approximation d'une onde plane : erreur relative en norme $H^1$ modifiée commise par la TVRC, la FEM et la DEM en fonction du nombre de degrés de liberté. . . . .	44
4.1	Partie réelle du champ de vibration associé aux fonctions de forme intérieures définies dans (4.2) d'indice $n = 0, -3, 8$ , et $-15$ . . . . .	49
4.2	Evolution de l'énergie des fonctions de forme intérieures définies en (4.2) dans une cavité rectangulaire ( $2 \times 1\text{m}$ remplie d'air à $k = 6\text{m}^{-1}$ ) en fonction du degré $n$ . . . . .	50
4.3	Convergence des méthodes d'intégration pour le calcul de $\mathbf{K}_{(11)}^{elem}$ en fonction du paramètre adimensionné $n_{int} = \frac{2\pi R}{\lambda}$ sur un bord droit à 500 Hz. . . . .	53
4.4	Cavité acoustique $\Omega$ et ses conditions limites. . . . .	54
4.5	Partie réelle du champ solution du problème défini sur la figure 4.4 à différentes fréquences. . . . .	54
4.6	Evolution de l'erreur et conditionnement de l'opérateur pour le problème défini sur la figure 4.4. . . . .	55
4.7	Définition du problème, sous-structurations utilisées et solution de référence pour $k = 50, 80$ et $140\text{m}^{-1}$ . . . . .	56
4.8	Convergence de la TVRC pour le problème défini sur la figure 4.7. . . . .	56
4.9	Evolution de l'erreur en fonction du temps de calcul pour le problème défini sur la figure 4.7. . . . .	57
4.10	Evolution de l'erreur en fonction de l'énergie de la dernière fonction de forme utilisée. . . . .	57
4.11	portraits d'amplitude non régularisés (haut) et régularisés (bas) de chacun des sous domaines du coude pour le problème défini sur la figure 4.7. . . . .	58
4.12	Convergence du spectre. . . . .	59
4.13	définition du problème d'une cavité acoustique automobile. . . . .	60

4.14	Partie réelle du champ de pression pour le problème défini dans la figure 4.13 à trois fréquences : 2500 Hz (gauche), 4000 Hz (milieu) et 8000 Hz (gauche).	61
4.15	Réponse en fréquence et temps de calcul pour le problème défini dans la figure 4.13. . . . .	61
5.1	Premières harmoniques sphériques (source : wikipedia). . . . .	65
5.2	Partie réelle (gauche) et imaginaire (droite) du champ de pression associé à la fonction de forme de degré 3 et d'indice -2 définie en (5.5). . . . .	66
5.3	Énergie des fonctions de forme $\phi_{l,m}^{(E)}(\underline{x})$ en fonction de son degré et de son ordre.	67
5.4	Évolution de l'erreur et du temps de calcul en fonction du nombre de ddls, pour $k = 20\text{m}^{-1}$ sur le problème défini dans le paragraphe 5.4.1. . . . .	69
5.5	Évolution de l'erreur et du temps de calcul en fonction du nombre de ddls, pour $k = 40\text{m}^{-1}$ sur le problème défini dans le paragraphe 5.4.1. . . . .	70
5.6	Evolution de l'erreur, du conditionnement de l'opérateur avec (ligne continue) et sans (ligne pointillée) normalisation des fonctions de forme (voir (5.7)) en fonction du nombre de ddls, pour $k = 20\text{m}^{-1}$ sur le problème défini dans la paragraphe 5.4.1. . . . .	71
5.7	Evolution du portrait d'amplitude avec et sans régularisation en fonction de l'ordre de discrétisation, pour $k = 20\text{m}^{-1}$ sur le problème défini dans 5.4.1 . . . . .	71
5.8	Evolution de l'erreur en fonction de l'énergie moyenne des $2L_p + 1$ fonctions de forme de plus haut degré $L_p$ . . . . .	72
5.9	Sous-structuration TVRC utilisée pour résoudre le problème de diffraction d'onde par une sphère rigide, et solution à 500 Hz. . . . .	73
5.10	Evolution de l'erreur en fonction du nombre total de degrés de libertés pour le problème de l'onde diffractée par une sphere rigide (partie 5.4.2). . . . .	74
5.11	Définition du problème dans une cavité en Z. . . . .	74
5.12	Partie réelle du champ de pression solution du problème défini figure 5.11 à 500 Hz (gauche), 1000Hz (milieu) et 1500Hz (droite). . . . .	75
5.13	Evolution de l'erreur relative en fonction du nombre de ddls pour le problème défini dans le figure 5.11. . . . .	75
5.14	Réponse en fréquence du problème défini dans le paragraphe 5.5.1, obtenue avec la TVRC, et la méthode des éléments finis sur un maillage grossier et fin.	76
5.15	Portrait d'amplitude régularisé pour le problème défini dans la figure 5.11 à 1500 Hz. . . . .	76
5.16	Vue 3D et coupe de la cavité automobile défini de manière analytique. . . . .	77
5.17	Vue 3D et coupe de la cavité automobile défini de manière analytique. . . . .	78
5.18	Partie réelle du champ de pression pour une fréquence d'excitation de 500 Hz (gauche) et 750 Hz (droite). . . . .	78
5.19	Maillage de la cavité de classe S fourni par DAIMLER. . . . .	79
5.20	Partie imaginaire du champ de pression solution du problème défini dans le paragraphe 5.5.2. . . . .	79
6.1	Plaque simplement supportée. . . . .	83
6.2	Partie réelle du champ de déplacement associé aux fonctions de forme intérieures d'ordre 1, 2 et 5. . . . .	84
6.3	Partie réelle du champ de déplacement associé aux fonctions de forme de bord d'ordre 1, 2 et 5. . . . .	85



---

6.4	Évolution de l'erreur en fonction du nombre de ddls pour le problème défini dans le paragraphe 6.1.1. . . . .	86
6.5	Partie réelle du champ de déplacement solution du problème défini dans la figure 6.1 (gauche), et portraits d'amplitude régularisés associés aux ondes intérieures et aux ondes de bords (droite). . . . .	87
6.6	Définition du problème de couplage vibro-acoustique. . . . .	88
6.7	Partie réelle (gauche) et partie imaginaire (droite) du champ de pression associé à une fonction de forme d'ondes de bord. . . . .	89
6.8	décomposition géodésique successive de la sphère en fonction du paramètre $N$ . . . . .	90
6.9	décomposition pseudo régulière de la sphère en fonction du paramètre $N$ . . . . .	91
6.10	Solution du problème défini dans la figure 6.6 à 200 et 500 Hz. Niveau de pression en décibel dans les cavités et partie imaginaire du champ de déplacement dans les plaques . . . . .	93
6.11	Convergence de la méthode sur le problème défini dans la figure 6.6 à 200 et 500 Hz . . . . .	94



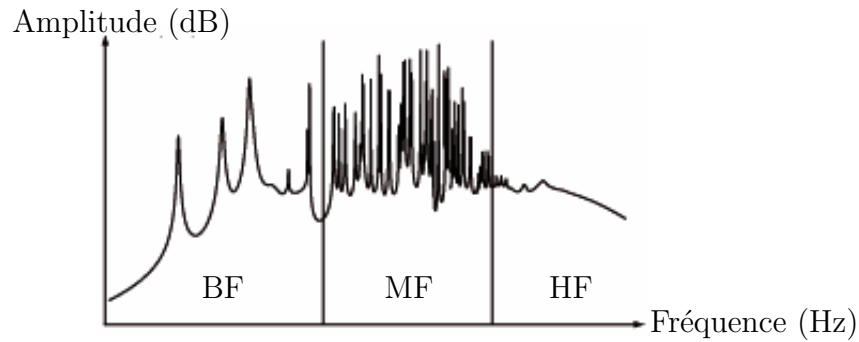
---

# Introduction

LA MAÎTRISE DU COMPORTEMENT VIBRATOIRE des systèmes mécaniques est un enjeu majeur du monde industriel, que ce soit dans la conception ou dans l'optimisation des performances des structures. Un premier exemple est celui de l'industrie automobile, où les contraintes du marché et le respect des normes antipollution ont conduit les constructeurs à produire des véhicules toujours plus légers, mais de ce fait beaucoup plus sujets aux vibrations. Le confort acoustique des passagers, et donc la maîtrise du comportement vibro-acoustique de la structure, doit être intégré dès la conception. L'industrie navale doit elle aussi intégrer la problématique du comportement vibratoire très tôt dans la conception des navires de grande taille. L'isolation sonore et vibratoire du poste de commandement et des espaces de vie par rapport à la salle des machines est un enjeu capital pour cette industrie. Un dernier exemple est celui de l'industrie spatiale. Étant donné les sommes mises en jeu, les constructeurs cherchent à minimiser au maximum la masse du lanceur. Cela a pour conséquences de le rendre beaucoup plus sensible aux vibrations, tout particulièrement pendant la phase de décollage. La préservation de l'électronique embarquée, enjeu capital de cette industrie, doit nécessairement passer par une maîtrise efficace de tous les phénomènes vibratoires. La pression du marché impose aux entreprises de concevoir plus rapidement des produits de qualité toujours plus innovants, conformes aux exigences de sécurité et à la réglementation. Il est donc nécessaire de développer des outils de prédiction numérique robustes, fiables et efficaces qui permettent de prédire le comportement vibro-acoustique des structures.

Le comportement vibratoire d'un système mécanique est caractérisé par une fonction de réponse en fréquences (FRF). Cette dernière donne l'amplitude de la réponse de la structure en fonction de la fréquence de sollicitation. Dans les problèmes de propagation d'ondes, il est d'usage de définir les gammes de fréquences différentes selon la taille relative des composants d'un système par rapport à une longueur d'onde. On retrouve généralement trois zones fréquentielles (voir figure 1).

Lorsque la taille d'un composant est plus petite que la longueur d'onde de sa réponse, on parle alors de vibration basses fréquences (BF). Cette plage de fréquences est essentiellement caractérisée par un comportement modal du système, avec des pics de résonance bien distincts les uns des autres. Le champ vibratoire est en général très bien représenté par une combinaison de quelques modes propres. Les méthodes de calcul les plus utilisées dans ce domaine sont basées sur la méthode des éléments finis (ou FEM pour *Finite Element Method*) présentée dans [Zienkiewicz, 1977], et qui consiste à chercher une approximation du champ vibratoire sur une base polynomiale. Cette méthode est réputée pour son efficacité et sa robustesse, et de nombreux codes de calcul commerciaux existent et sont largement utilisés (NASTRAN, ABAQUS...). Le monde de la recherche poursuit toutefois des développements sur cette méthode, notamment sur les techniques de résolution dans le cadre du



**Figure 1** Fonction de réponse en fréquence d'une structure complexe [Ohayon et Soize, 1998].

calcul intensif, et les techniques de parallélisation adaptées aux infrastructures informatiques de plus en plus perfectionnées.

Les problèmes en milieu ouvert, apparaissant plutôt dans les domaines de l'acoustique et de l'électromagnétisme, sont généralement bien traités par la méthode des éléments de frontière (ou BEM pour *Boundary Element Method*) dont les éléments de théorie sont présentés dans [Brebbia, 1978, Banerjee et Butterfield, 1981]. La BEM repose sur l'utilisation des noyaux de Green qui sont des solutions singulières du problème en milieu infini. Cette méthode est un peu moins utilisée que la méthode des éléments finis, mais comporte néanmoins certains avantages comme la petite taille des modèles utilisés, ainsi que sa capacité naturelle à traiter certains types de problèmes comme la propagation d'ondes en milieu infini. La recherche est encore très active dans ce domaine, comme le montre par exemple l'avancée importante que constituent les méthodes *Fast Multi-Pole* (FMP) initiées dans [Greengard et Rokhlin, 1987].

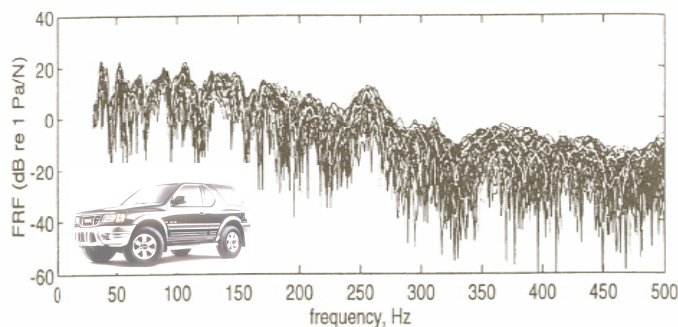
Lorsque la taille d'un composant est très grande par rapport à la longueur d'onde, sa réponse implique habituellement un grand nombre de modes locaux. On parle alors de vibrations hautes fréquences (HF). Dans ce domaine fréquentiel, l'aspect local de la réponse du système disparaît. En effet, le champ vibratoire comporte tellement d'oscillations que la réponse locale du système perd de son sens. De plus, la densification modale est si importante que la FRF apparaît lisse. L'extension des techniques issues des BF n'est ici pas raisonnable.

La prédiction de la réponse à haute fréquence d'un système dynamique complexe est une tâche difficile pour deux raisons :

- la longueur d'onde du champ de déformations est très courte, ce qui signifie que de très nombreux degrés de liberté sont nécessaires pour modéliser la réponse en détail,
- la réponse locale est sensible à de petits changements dans les propriétés du système.

Le deuxième point peut conduire à ce que des systèmes identiques issus de la même chaîne de production aient un comportement très différent, comme les résultats expérimentaux de Bernhard et Kompella [Kompella et Bernhard, 1993] le montrent sur des éléments automobiles (voir figure 2).

L'analyse statistique de l'énergie (ou SEA pour *Statistical Energy Analysis*) [Lyon et Maidanik, 1962], permet d'apporter une solution à ces deux difficultés. Pour s'affranchir de la première difficulté, le modèle déterministe local est remplacé par un modèle énergétique global. Les degrés de liberté sont les niveaux d'énergie vibratoire et acoustique des différentes parties du système. La deuxième difficulté est résolue par des procédures de moyenne qui sont implicites dans la SEA, et qui impliquent que les niveaux d'énergie calculés représentent la valeur moyenne de l'énergie, comme par exemple, le niveau moyen de bruit intérieur dans



**Figure 2** Fonction de réponse en fréquence de 98 voitures issues de la même ligne de production [Kompella et Bernhard, 1993].

un ensemble de véhicules d’une même ligne de production.

Il y a eu des progrès récents dans l’extension de la SEA à la prévision de la variance des énergies du sous-système [Langley et Brown, 2004, Cotroni *et al.*, 2005]. La prédiction de la variance est basée sur l’ergodicité des problèmes de vibrations hautes fréquences. C’est-à-dire que la moyenne et la variance de l’énergie d’un sous-système, peuvent être retrouvées en faisant varier soit les paramètres structuraux, soit les conditions aux limites.

La SEA constitue une approche globale dans la mesure où elle ne fournit que des estimations des énergies vibratoires moyennes par sous-systèmes. La difficulté principale de la méthode est la détermination des paramètres physiques qui interviennent dans sa formulation : facteurs de perte par dissipation, facteurs de perte par couplage entre sous-systèmes, densités modales, puissances injectées.

Le monde de la recherche est toujours très productif dans ce domaine. La question des HF reste encore largement ouverte.

La gamme de fréquences intermédiaires est appelée la gamme moyennes fréquences (MF). Ce domaine est caractérisé par une densification modale importante, et une hypersensibilité du champ vibratoire par rapport aux conditions sur le bord. En effet, une petite perturbation de la géométrie ou du chargement peut induire un changement important de la réponse locale du système.

Dans ce domaine, la méthode des éléments finis se heurte à une détérioration de la qualité de la solution numérique. De nombreuses recherches [Babuška et Sauter, 1997, Deraemaeker *et al.*, 1999] ont en effet montré que les solutions éléments finis des problèmes de propagation d’ondes présentent un phénomène spécifique appelé pollution (numérique) : la vitesse de propagation de l’onde dans le milieu discrétisé est différente de la vitesse dans le milieu continu. Ce phénomène rend la FEM peu robuste quand le nombre d’onde augmente. En effet, pour les grands nombres d’onde, la résolution du maillage nécessaire pour maintenir l’erreur de pollution raisonnablement petite conduit à des modèles à très grand nombre de noeuds. Ceci rend les problèmes MF trop coûteux pour la FEM standard.

Pour pallier à ce problème, les modifications de la FEM standard ont donné naissance à de nombreuses techniques, comme par exemple la *Galerkin least-square* FEM [Harari et Hugues, 1992b], la *quasi-stabilized finite element method* [Babuška *et al.*, 1995], ou encore la *residual-free bubbles* [Franca *et al.*, 1997]... Comparées à la FEM standard, ces techniques réduisent les coûts de calcul. Toutefois, la gamme de fréquences traitée reste en deçà des moyennes fréquences.

Quant aux méthodes issues des HF, elles ne peuvent généralement pas rendre compte

du caractère local de la solution, car elles s'appuient sur une description trop globale des quantités calculées. Or dans le domaine des MF, la réponse locale (en un point ou sur une zone de faible taille) est une information qui a encore du sens, et la calculer de façon prédictive est primordial. Néanmoins, quelques travaux ont permis de coupler la SEA et les éléments finis [Langley et Bremner, 1999]. Dans ce cas, la géométrie de la structure est simplifiée. Les zones dans lesquelles la réponse locale n'est pas cherchée sont modélisée à l'aide de la SEA, le reste de la structure étant modélisé avec la méthode des éléments finis. Cette méthode permet de réduire la taille globale du problème, mais ne permet pas de calculer de façon prédictive la solution dans l'ensemble de la structure.

Ce domaine constitue donc un enjeu majeur, c'est dans ce cadre que sont apparues les approches « ondulatoires ». De telles approches utilisent des fonctions oscillantes qui sont des solutions exactes de l'équation d'équilibre pour décrire le champ vibratoire. Citons, par exemple, une utilisation particulière de la méthode de partition de l'unité (PUM) [Laghrouche et Bettess, 2000, Strouboulis *et al.*, 2006b, Strouboulis *et al.*, 2006a], la *Ultra-Weak Variational Method* (UWVF) [Cessenat et Despres, 1998], la *Discontinuous Enrichment Method* (DEM) [Farhat *et al.*, 2001, Farhat *et al.*, 2003, Farhat *et al.*, 2004a], la *Element-Free Galerkin Method* (EFGM) [Bouillard et Suleau, 1998, Suleau *et al.*, 2000], la *Wave Boundary Element Method* (WBEM) [Perrey-Debain *et al.*, 2003, Perrey-Debain *et al.*, 2004], ou encore la *Wave Based Method* (WBM) [Desmet *et al.*, 2001, Desmet *et al.*, 2002, Desmet *et al.*, 2004]... La *Théorie Variationnelle des Rayons Complexes* (TVRC), développée dans cette thèse, appartient à cette catégorie de techniques numériques utilisant une base de fonctions oscillantes pour résoudre le problème de vibrations. Le point commun à toutes ces méthodes est l'utilisation d'une base d'ondes pour représenter la solution. Les différences se situent d'une part dans le choix du type d'ondes (ondes planes, ondes de bords, ondes de coins, ondes cylindriques...) ainsi que leur distribution (discrète ou intégrale), et d'autre part dans la manière de traiter les conditions aux limites et les conditions d'interfaces (minimisation d'un résidu, procédure de Galerkin, coefficients de Lagrange ou encore utilisation d'une formulation spécifique...). L'avantage décisif de telles méthodes (commun à toutes les méthodes de Trefftz [Trefftz, 1926] qui utilisent des solutions exactes de l'équation d'équilibre) est qu'une discrétisation grossière est suffisante pour obtenir des solutions de qualité. La taille des modèles se trouve considérablement réduite comparée aux méthodes basées sur l'emploi d'éléments (finis).

La TVRC est une méthode de calcul prédictive dédiée aux MF. Elle se base sur les trois points suivants :

- un découpage du système initial en sous-systèmes homogènes (sous-structures ou sous-cavités) ;
- une formulation variationnelle mixte du problème de référence où les conditions sur les frontières sont vérifiées au sens faible, tandis que l'approximation recherchée vérifie exactement l'équation d'équilibre en tous points du sous-système. Cette formulation est un point-clé de la méthode, car elle autorise l'indépendance *a priori* des approximations faites sur chaque sous-système. La continuité des champs au niveau des interfaces entre sous-structures est directement incorporée dans la formulation variationnelle, contrairement à d'autres approches qui doivent l'assurer par des multiplicateurs de Lagrange ou par l'emploi d'une technique de pénalisation ;
- une approximation de la solution sur une base d'ondes planes se propageant dans toutes les directions. Les fonctions de forme issues de cette approximation sont appelées rayons de vibration et comportent deux échelles. L'échelle rapide caractérisant le phénomène

vibratoire est prise en compte analytiquement, tandis que l'échelle lente est calculée numériquement. Cette échelle lente est constituée par les amplitudes complexes des rayons de vibration. Une discrétisation relativement grossière de cette échelle permet de la décrire correctement, ce qui permet à l'approche d'obtenir des solutions de qualité avec un faible nombre d'inconnues.

Depuis son introduction dans [Ladevèze, 1996], l'activité de recherche sur cette approche a porté sur de nombreux aspects. Tout d'abord, la TVRC a montré son efficacité dans le traitement des vibrations des plaques élancées [Ladevèze *et al.*, 2000], ainsi que des assemblages complexes de structures planes [Rouch et Ladevèze, 2003] et de type coques [Riou *et al.*, 2003]. Une stratégie d'analyse large bande a également été proposée dans [Ladevèze et Riou, 2005]. Une méthode pour la prise en compte des hétérogénéités structurales comme les trous dans les plaques a été proposée dans [Ladevèze *et al.*, 2003a]. Puis, des travaux ont porté sur l'utilisation de la méthode dans le cadre d'une approche fréquentielle pour la résolution de problèmes de dynamique transitoire incluant le domaine des MF [Ladevèze et Chevreuil, 2005]; des travaux ont été également effectués sur l'identification et le recalage de modèles de liaisons complexes [Dorival *et al.*, 2008], ainsi que sur le traitement des problèmes de membrane [Sourcis, 2005]. Plus récemment, la méthode proposée dans [Ladevèze et Chevreuil, 2005] a été étendue pour l'identification du choc à la source dans le cadre de chocs pyrotechniques sur des assemblages complexes de coques ([Bézier *et al.*, 2008]), ainsi que l'extension du champ d'application de la TVRC au traitement des vibrations acoustiques ([Riou *et al.*, 2006, Riou *et al.*, 2008]) et la mise en place d'une procédure de calcul adaptatif ([Riou *et al.*, 2011]). Tous ces travaux montrent l'efficacité et la robustesse de la méthode dans la résolution des problèmes de vibrations dans le domaine des MF.

L'originalité de ce travail de thèse est l'utilisation d'une nouvelle approximation basée sur les séries de Fourier. L'utilisation de ces séries est une nouveauté dans le cadre des approches ondulatoires. L'étude des fonctions de forme engendrées permet de définir un critère pour déterminer le degré de discrétisation optimal pour une erreur donnée, et de mettre en place une technique de régularisation du portrait d'amplitude. Les performances obtenues avec cette approximation montre un potentiel permettant dans un premier temps d'étendre le champ d'applications de la TVRC aux problèmes d'acoustiques tridimensionnels, puis dans un second temps, de traiter les problèmes de vibrations de plaques et de couplage vibro-acoustique tridimensionnels.

Contrairement aux éléments finis qui s'appuient sur une discrétisation directe du champ vibratoire sur une base polynômiale, la TVRC s'appuie sur la discrétisation d'une forme intégrale des ondes planes le composant. Les inconnues du problème sont les amplitudes généralisées des fonctions de forme. La reconstruction du champ de pression acoustique s'obtient par l'intermédiaire d'un opérateur intégral lors d'une opération de post-processing. Dans sa version classique, la TVRC cherche ces amplitudes généralisées sous la forme d'un polynôme défini par morceaux. Le plus souvent, ces polynômes sont de degré zéro. Les propriétés spectrales de l'opérateur intégral ainsi discrétisé provoquent un comportement instable des amplitudes. De récents travaux ([Sourcis, 2009]) ont permis de mettre en place des outils de régularisation.

L'introduction de la nouvelle forme de discrétisation basée sur les séries de Fourier, ce qui revient à déterminer directement le spectre du portrait d'amplitude. Cette approximation conserve les propriétés de convergence classique de la TVRC. On définit un critère efficace pour déterminer la discrétisation optimale à un niveau d'erreur donné. Le comportement des

fonctions de forme permet de mettre en place une technique de régularisation du portrait d'amplitude. Ainsi on peut observer la partie stable de ce portrait d'amplitude et identifier les niveaux de pression et les flux d'énergie sans opération et de post-processing coûteuse.

D'autre part le traitement de problèmes tridimensionnels, est possible grâce à l'utilisation de la version tridimensionnelle des séries de Fourier, les séries de Laplace, qui utilisent une décomposition en harmoniques sphériques. Cette approche permet de retrouver le même comportement que l'approximation Fourier 2D. De plus grâce à l'expression analytique des fonctions de forme en tout point du domaine, le calcul de l'opérateur s'effectue de manière semi-analytique. La TVRC-Fourier semble pouvoir résoudre des problèmes d'acoustique avec des géométries complexes.

Enfin, l'approximation est appliquée aux problèmes de plaques en flexion puis aux problèmes de couplage vibro-acoustique. Dans ce type de problème, il faut impérativement prendre en compte des ondes évanescentes localisées sur les bords, appelées ondes de bord. Ici encore le portrait d'amplitude associé à ces ondes est discrétisé à l'aide d'une série de Fourier, c'est donc son spectre qui est calculé. Les propriétés de convergence et de régularisation sont conservées. Pour les problèmes de couplage vibro acoustique, le couplage fort complexifie le calcul de l'opérateur, mais les premiers résultats sont prometteurs.

Par ailleurs, parallèlement aux développements théoriques de cette méthode, un code de calcul appelé CoFouRays (Complex Fourier Rays) a été élaboré.

Ce document est organisé en six chapitres. Le premier chapitre rappelle brièvement les équations décrivant les problèmes d'acoustique linéaire et de vibrations d'assemblage de plaques en flexion. Le second chapitre présente un état de l'art sur les approches existantes pour traiter les problèmes d'acoustique et (ou) de vibrations. Le troisième chapitre rappelle l'écriture de la TVRC aux problèmes de couplage vibro-acoustique, ainsi que les principaux résultats sur la TVRC obtenus dans les travaux précédents. Le quatrième chapitre est consacré à la description de la TVCR Fourier ainsi qu'à ses propriétés dans le cadre de l'acoustique 2D. Le cinquième chapitre présente le travail réalisé pour l'extension de cette approximation aux problèmes d'acoustique tridimensionnels. Enfin le sixième chapitre détaille l'application de la TVRC Fourier aux problèmes de vibrations de plaques et son extension aux problèmes de vibro-acoustique 3D.



---

# Problèmes de référence et notations

CE CHAPITRE rappelle brièvement les équations qui décrivent les problèmes de couplage vibro-acoustique. Par souci de clarté, l'ensemble de ces équations est présenté en deux groupes : les équations qui régissent les problèmes d'acoustique, et les équations des problèmes de vibrations dans les plaques.

Les notations mathématiques proposées pour la suite du document sont les suivantes :

- Les grandeurs scalaires seront notées en police normale :  $q$ , les grandeurs vectorielles soulignées d'un trait :  $\underline{q}$ , les matrices et les opérateurs d'ordre supérieur soulignés de deux traits :  $\underline{\underline{Q}}$ .
- Pour les opérations dans le corps des complexes  $\mathbb{C}$ , on notera  $\Re(q)$  la partie réelle de  $q$ ,  $\Im(q)$  la partie imaginaire de  $q$ ,  $\bar{q}$  le conjugué de  $q$  et  $\underline{q}^* = \underline{\bar{q}}^T$  la transposition hermitienne de  $\underline{q}$ .

## 1.1 Problème de référence en vibroacoustique

Le type de système étudié est un assemblage tridimensionnel de plaques fines et de cavités acoustiques. On s'intéresse au couplage entre les vibrations de ces plaques et celles du fluide situé dans les cavités acoustiques adjacentes. Un exemple d'un tel système est présenté dans la figure 1.1.

On suppose que l'assemblage de plaques est composé de  $N_S$  plaques fines  $S_E$  décrites par le modèle de Kirchhoff-Love en contraintes planes. Chaque plaque  $S_E$  est caractérisée par son épaisseur  $h_E$ , sa masse volumique  $\rho_E$ , son module de Young  $E_E$ , son coefficient de Poisson  $\nu_E$ , et son coefficient d'amortissement structural  $\eta_E$ . L'opérateur d'élasticité associé au modèle de Kirchhoff-Love en contrainte plane est noté  $\underline{\underline{K}}_{CP}$ .

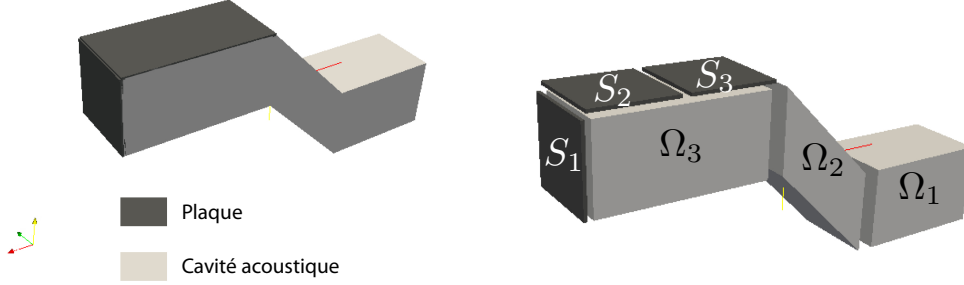
D'autre part le fluide situé dans les  $N_\Omega$  cavités adjacentes  $\Omega_E$  est supposé incompressible et est caractérisé par sa vitesse du son  $c_0$ , et par sa masse volumique  $\rho_0$ .

Les vibrations harmoniques forcées de ce système sont étudiées autour d'une position d'équilibre à une pulsation donnée  $\omega$  et le processus est supposé adiabatique.

Toutes les quantités associées au problème peuvent être définies dans le corps des complexes : une amplitude  $q(\underline{x})$  est associée à la grandeur  $q(\underline{x})e^{i\omega t}$ , où  $\underline{x}$  désigne le vecteur position et  $i = \sqrt{-1}$  l'unité imaginaire.

On note  $\Gamma_{EE'}$  la frontière commune aux cavités acoustiques  $\Omega_E$  et  $\Omega_{E'}$ . Chacune de ces cavités peut être soit close si son bord consiste en un contour fermé, soit ouverte si une de ses frontières est à l'infini, dans ce cas on notera  $\partial_\infty\Omega$  la frontière concernée.

À chaque plaque  $S_E$ , on associe un repère local  $(O_E, \underline{e}_{x_E}, \underline{e}_{y_E}, \underline{e}_{z_E})$  avec par convention  $\underline{e}_{x_E}$  et  $\underline{e}_{y_E}$  dans le plan de la plaque et  $\underline{e}_{z_E}$  normal à la plaque, la normale et la tangente à un bord étant définies respectivement par  $\underline{n}$  et  $\underline{\tau}$ . On note  $\Upsilon_{EE'}$  l'arrête commune aux plaques coplanaires  $S_E$  et  $S_{E'}$ , et  $\tilde{\Upsilon}_{EE'}$  l'arrête commune aux plaques non coplanaires  $S_E$  et  $S_{E'}$ .



**Figure 1.1** Définition de la géométrie pour un problème de couplage vibro-acoustique.

### 1.1.1 Problème d'acoustique

Dans ce paragraphe, on s'intéresse uniquement aux vibrations du fluide situé dans la cavité  $\Omega$ , décomposée en  $N_\Omega$  sous domaines  $\Omega_E$ .

On définit l'opérateur vitesse  $\mathcal{L}_v[\square_E]$  par :

$$\mathcal{L}_v[\square_E] = \frac{i}{\rho_0 \omega} \frac{\partial \square_E}{\partial \underline{n}_E} \quad (1.1)$$

où  $\underline{n}_E$  désigne la normale sortante au domaine  $\Omega_E$ .

**Problème de référence ([Morse et Ingard, 1968] [Terrasse et Abboud, 2007]) :**

Le problème de référence consiste à trouver les champs de pression acoustique  $(p_1, \dots, p_{N_\Omega})$  tels que

$$\Delta p_E + k_a^2 p_E = f(\underline{x}) \quad \text{dans } \Omega_E, \quad E \in \{1, \dots, N_\Omega\} \quad (1.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} p_E = p_{dE} & \text{sur } \partial_p \Omega_E, \\ \mathcal{L}_v[p_E] = i\omega w_{E'} & \text{sur } \partial_{S_{E'}} \Omega_E, \\ \mathcal{L}_v[p_E] = v_{dE} & \text{sur } \partial_v \Omega_E, \quad E \in \{1, \dots, N_\Omega\} \\ p_E - Z_E \mathcal{L}_v[p_E] = h_{dE} & \text{sur } \partial_Z \Omega_E, \\ \lim_{|\underline{x}| \rightarrow \infty} |\underline{x}|^{\frac{d-1}{2}} \left[ \frac{\partial}{\partial |\underline{x}|} - ik \right] p(\underline{x}) = 0 & \text{sur } \partial_\infty \Omega_E, \end{array} \right. \quad (1.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} p_E - p_{E'} = 0 & \text{sur } \Gamma_{EE'} \\ \mathcal{L}_v[p_E] + \mathcal{L}_v[p_{E'}] = 0 & \text{sur } \Gamma_{EE'} \end{array} \right. \quad (1.4)$$

L'équation (1.2) est l'équation de Helmholtz inhomogène avec  $k_a = \omega/c_0$  le nombre d'onde, dans le cas d'un modèle avec amortissement hystérétique  $\eta_a$ , le nombre d'onde vaut  $k_a = (1 - i\eta_a)\omega/c_0$ . La fonction  $f(\underline{x})$  est associée à une source ponctuelle, surfacique ou volumique. Dans le cas d'une source ponctuelle la fonction  $f(\underline{x})$  est définie par :

$$f(\underline{x}) = -i\rho_0\omega\delta(\underline{x} - \underline{x}_{qdE})q_{dE} \quad (1.5)$$

où  $\delta$  est la distribution delta de Dirac. Les groupes d'équations (1.3) et (1.4) traduisent respectivement les conditions aux limites du problème aux dérivées partielles et les conditions de transmission des champs à travers l'interface  $\Gamma$ .

- La partie  $\partial_p\Omega_E$  de  $\partial\Omega_E$  est soumise à une condition en pression dite de Dirichlet. Dans le cas où la pression imposée  $p_{dE}$  est nulle, on parle de condition de bord mou.
- La partie  $\partial_{S_{E'}}\Omega_E$  de  $\partial\Omega_E$  est soumise à une condition de couplage en vitesse avec la plaque  $S_{E'}$ .
- La partie  $\partial_v\Omega_E$  de  $\partial\Omega_E$  est soumise à une condition en vitesse dite de Neuman. Dans le cas où la vitesse normale imposée  $v_{dE}$  est nulle, on parle de condition de bord rigide.
- La partie  $\partial_Z\Omega_E$  de  $\partial\Omega_E$  est soumise à une condition mixte dite de Robin, où  $Z_E$  est une fonction d'impédance normale. Cette condition est très importante, car elle introduit de l'amortissement dans le modèle, plus précisément à travers la partie réelle de  $Z_E$  :  $\Re\{Z_E\}$ . Dans les cas limites où  $Z \rightarrow 0$  et  $Z \rightarrow \infty$  la condition mixte de Robin tend respectivement vers la condition de Dirichlet et de Neuman.
- Dans le cas de milieu ouvert, la partie  $\partial_\infty\Omega_E$  de  $\partial\Omega_E$  est soumise à la condition de rayonnement à l'infini de Sommerfeld,  $d = 2, 3$  correspond à la dimension de la cavité. Cette condition assure qu'aucune énergie n'est réfléchi à l'infini.

### 1.1.2 Problème de plaques

On étudie les vibrations d'un assemblage de  $N_S$  plaques fines  $S_E$  décrites par le modèle de Kirchhoff-Love en contraintes planes.

On suppose que les phénomènes de tension sont négligés dans la plaque, le déplacement du point  $M$  sera porté par  $\underline{e}_{z_E}$  et noté  $w(\underline{x})$ .

Cela implique également les hypothèses suivantes dans le cas d'assemblage de plaques non coplanaires :

- Le déplacement sur les arêtes est nul.
- Sur une arête, il n'y a transmission que de la rotation et du moment.

On définit les opérateurs de rotation  $\mathcal{L}_\theta[\square_E]$ , de courbure  $\underline{\mathcal{L}}_\chi[\square_E]$ , de moment  $\underline{\mathcal{L}}_M[\square_E]$ , et d'effort tranchant  $\mathcal{L}_T[\square_E]$  par :

$$\mathcal{L}_\theta[\square_E] = \frac{\partial \square_E}{\partial \underline{n}_E} \quad (1.6)$$

$$\underline{\mathcal{L}}_\chi[\square_E] = \underline{\text{grad}}[\underline{\text{grad}}[\square_E]] \quad (1.7)$$

$$\mathcal{L}_M[\square_E] = \underline{n}_E \frac{h^3}{12} \underline{K}_{CP} \underline{\mathcal{L}}_\chi[\square_E] \underline{n}_E \quad (1.8)$$

$$\mathcal{L}_T[\square_E] = \frac{h^3}{12} \underline{n} \underline{\text{div}} \left[ \underline{K}_{CP} \underline{\mathcal{L}}_\chi[\square_E] \right] + \frac{h^3}{12} \frac{\partial \left( \underline{\tau}_E \underline{K}_{CP} \underline{\mathcal{L}}_\chi[\square_E] \underline{n}_E \right)}{\partial \underline{\tau}_E} \quad (1.9)$$

avec  $\underline{K}_{CP}$  l'opérateur de Hooke en contrainte plane et  $h$  l'épaisseur de la plaque.

**Problème de référence ([Leissa, 1993]) :**

Le problème de référence consiste à trouver les champs de déplacement  $(w_1, \dots, w_{N_S})$  tels que

$$\Delta\Delta w_E - k_s^4 w_E = g(\underline{x}) \quad \text{dans } S_E, \quad E \in \{1, \dots, N_S\} \quad (1.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} w_E = w_{dE} & \text{sur } \partial_w S_E, \\ \mathcal{L}_\theta[w_E] = \theta_{dE} & \text{sur } \partial_\theta S_E, \\ \mathcal{L}_M[w_E] = M_{dE} & \text{sur } \partial_M S_E, \\ \mathcal{L}_T[w_E] = T_{dE} & \text{sur } \partial_T S_E, \end{array} \right. \quad E \in \{1, \dots, N_S\} \quad (1.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} w_E - w_{E'} = 0 \\ \mathcal{L}_\theta[w_E] + \mathcal{L}_\theta[w_{E'}] = 0 \\ \mathcal{L}_M[w_E] - \mathcal{L}_M[w_{E'}] = 0 \\ \mathcal{L}_T[w_E] + \mathcal{L}_T[w_{E'}] = 0 \end{array} \right. \quad \text{sur } \Upsilon_{EE'} \quad (1.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} w_E = 0 \\ w_{E'} = 0 \\ \mathcal{L}_\theta[w_E] + \mathcal{L}_\theta[w_{E'}] = 0 \\ \mathcal{L}_M[w_E] - \mathcal{L}_M[w_{E'}] = 0 \end{array} \right. \quad \text{sur } \check{\Upsilon}_{EE'} \quad (1.13)$$

L'équation (1.10) est l'équation inhomogène des plaques avec  $k_s = \left(\frac{\rho_E \omega^2 h_E}{D}\right)^{\frac{1}{4}}$  le nombre d'onde, et  $D = \frac{E_E h_E^3}{12(1-\nu_E^2)}$  la rigidité en flexion de la plaque  $S_E$ . Dans un modèle de plaque avec amortissement hystérétique on impose  $\underline{K}_{CP} = (1 + i\eta_S)\underline{K}_{CP,0}$  et  $\rho_E = (1 - i\kappa_S)\rho_E$ . La fonction  $g(\underline{x})$  est associée à une source ponctuelle, ou surfacique. Dans le cas d'un chargement surfacique par un champ de pression  $p(\underline{x})$ , la fonction  $g(\underline{x})$  est définie par :

$$g(\underline{x}) = \frac{p(\underline{x})}{D} \quad (1.14)$$

Les groupes d'équations (1.11), (1.12), et (1.13) traduisent respectivement les conditions aux limites du problème aux dérivées partielles et les conditions de transmission des champs à travers l'interface  $\Upsilon$  ou  $\check{\Upsilon}$ .

- La partie  $\partial_w S_E$  de  $\partial S_E$  est soumise à une condition en déplacement.
- La partie  $\partial_\theta S_E$  de  $\partial S_E$  est soumise à une condition en rotation.
- La partie  $\partial_M S_E$  de  $\partial S_E$  est soumise à une condition en moment.
- La partie  $\partial_T S_E$  de  $\partial S_E$  est soumise à une condition en effort tranchant.

Le couplage entre la partie fluide et la partie structure se fait donc d'une part par une condition aux limites de type vitesse pour le couplage structure→fluide, et d'autre part par un second membre dans l'équation d'équilibre de la plaque pour le couplage fluide→structure. C'est ce deuxième terme qui est négligé en cas de couplage dit faible.

L'OBJECTIF de ce chapitre est de faire le point sur les principales méthodes utilisées pour les calculs de vibrations structurales et (ou) acoustiques. Il existe un très grand nombre de méthodes dédiées à ce type de problème. Certaines sont depuis longtemps très bien établies dans le monde industriel, d'autre appartiennent encore au monde de la recherche. L'ensemble des méthodes seront présentées suivant la classification arbitraire suivante :

- les méthodes polynomiales ;
- les méthodes ondulatoires ;
- les méthodes probabilistiques.

Ce chapitre n'a pas la prétention de donner tous les détails de mise en oeuvre, mais les caractéristiques et résultats principaux de chacune de ces méthodes dans le cadre des vibrations.

## Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Les méthodes polynomiales</b>	<b>13</b>
2.1.1	La méthode des éléments finis et ses extensions	13
2.1.1.1	La méthode des éléments finis (FEM)	13
2.1.1.2	Optimisation de la FEM	14
2.1.1.3	Les EF stabilisés	15
2.1.1.4	Les EF multi échelles	16
2.1.2	Les méthodes de type éléments de frontière	16
2.1.2.1	La BEM directe	17
2.1.2.2	La BEM indirecte	18
2.1.2.3	Améliorations de la BEM	18
2.1.3	Méthodes basées sur la partition de l'unité	19
2.1.3.1	Les éléments finis généralisés (GFEM)	19
2.1.3.2	Les méthodes sans maillage	20
<b>2.2</b>	<b>Les méthodes ondulatoires</b>	<b>21</b>
2.2.1	Ultra Weak Variational Formulation	22

2.2.2	Les T-elements . . . . .	22
2.2.3	Discontinuous Enrichment Method . . . . .	23
2.2.4	Wave Boundary Element Method (WBEM) . . . . .	24
2.2.5	Wave Based Method (WBM) . . . . .	24
<b>2.3</b>	<b>Les méthodes énergétiques . . . . .</b>	<b>25</b>
2.3.1	Statistical Energy Analysis . . . . .	26
2.3.2	Méthode SEA-like . . . . .	27
2.3.3	Statistical modal Energy distribution Analysis . . . . .	27
2.3.4	Méthode des coefficients d'influence énergétique . . . . .	28
2.3.5	Wave Intensity Analysis . . . . .	28
2.3.6	Méthodes de diffusion de l'énergie . . . . .	29
2.3.7	Méthode énergétique simplifiée . . . . .	29
2.3.8	Méthode de tracé de rayons . . . . .	30
2.3.9	Méthodes de l'enveloppe . . . . .	30
2.3.10	Méthodes asymptotiques . . . . .	31
<b>2.4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>31</b>

---

## 2.1 Les méthodes polynomiales

### 2.1.1 La méthode des éléments finis et ses extensions

La méthode des éléments finis (ou FEM pour *Finite Element Method*), dont les détails sont présentés dans [Zienkiewicz et Taylor, 2000], est une technique prédictive qui s'appuie sur une discrétisation du problème en un nombre fini d'éléments. Dans chaque élément, le champ vibratoire, pression acoustique pour les fluides ou déplacement pour les structures, est approximé par des fonctions de forme polynomiales. Étant donné que ces fonctions ne sont pas solutions de l'équation d'équilibre, une discrétisation (très) fine est requise pour obtenir une solution raisonnablement précise.

#### 2.1.1.1 La méthode des éléments finis (FEM)

**2.1.1.1.1 Principe de base** La base de la FEM est une discrétisation de  $\Omega$  en éléments de forme simple. De ce fait, la géométrie du problème est approximée par  $\tilde{\Omega} \simeq \Omega$ . La cavité acoustique est divisée en  $n_E$  éléments  $\Omega_E$  ( $\tilde{\Omega} = \bigcup_{E=1}^{n_E} \Omega_E$ , avec  $\Omega_E \cap \Omega_{E'} = \emptyset, \forall E \neq E'$ ). Cette discrétisation permet de chercher une approximation de la solution exacte dans un sous-espace d'admissibilité  $\mathcal{U}^h$  de dimension finie : dans chaque élément, la solution exacte du problème de Helmholtz est approximée par une combinaison linéaire de fonctions de forme polynomiales dont le support est localement défini par  $\Omega_E$  :

$$p(\underline{x}) \simeq p^h(\underline{x}) = \sum_{e=1}^{n_E} p_e^E \phi_e^E(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Omega_E \quad (2.1)$$

L'approximation construite respecte *a priori* les conditions en pression imposées sur le bord  $\partial_p \tilde{\Omega}$ , ainsi que les conditions de transmission en pression entre chaque élément. Néanmoins, l'approximation du champ de pression étant construite sur une base polynomiale, les quantités dérivant de cette approximation, comme la vitesse et l'intensité acoustiques, sont peu précises.

Les autres équations du problème sont vérifiées en utilisant une formulation variationnelle et une technique de Galerkin qui consiste à projeter le champ test sur la même base fonctionnelle que l'approximation.

Cette technique conduit à la résolution du système d'équations algébriques suivant

$$[-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}] \mathbf{p} = i\omega(\mathbf{q} - \mathbf{v}) \quad (2.2)$$

Les matrices issues d'un modèle éléments finis sont creuses, de type bande, et symétriques ; ce qui constitue un avantage majeur pour leur manipulation et leur stockage. Les matrices peuvent également être décomposées en sous-matrices indépendantes de la fréquence ;

**2.1.1.1.2 Traitement de la condition de Sommerfeld** Puisque la FEM s'appuie sur un maillage en petits éléments, la représentation des milieux infinis présente une vraie difficulté. Il existe trois techniques pour prendre en compte cette condition : les conditions d'absorption (ou NRBC pour *Non Reflecting Boundary Condition*, [Bayliss *et al.*, 1982]), le concept de Perfectly Match Layer [Bérenger, 1994], et les éléments infinis [Gerdes, 2000]. Les deux premières utilisent une frontière artificielle  $\partial_\infty \Omega$  qui est introduite afin de se ramener à un problème borné, alors que les éléments infinis utilisent des fonctions de forme radiales adaptées pour représenter la décroissance des ondes.

**2.1.1.1.3 précision de la FEM** La précision de l'approximation par éléments finis est caractérisée par l'interpolation numérique et par la dispersion numérique. On peut montrer que l'erreur  $\varepsilon$  commise en norme  $H^1$  par l'approximation est bornée par [Ihlenburg et Babuška, 1995, Bouillard et Ihlenburg, 1999]

$$\varepsilon \leq C_1 \left( \frac{kh}{p} \right)^p + C_2 kL \left( \frac{kh}{p} \right)^{2p} \quad (2.3)$$

où  $k$  est la norme du vecteur d'onde  $\underline{k}$ ,  $C_1$  et  $C_2$  deux constantes,  $h$  la taille des éléments  $\Omega_E$ ,  $p$  le degré des polynômes, et  $L$  une dimension caractéristique de la structure. Cette erreur est constituée de deux termes :

- Le premier (en  $\mathcal{O}(kh)$  pour  $p = 1$ ) représente l'erreur d'interpolation due au fait qu'une fonction oscillante est approximée par des fonctions polynomiales. Cette erreur est prédominante en basses fréquences et pour la rendre raisonnablement petite quelque soit la fréquence il faut garder le terme  $kh$  constant [Thompson et Pinsky, 1994, Barbone *et al.*, 1998].
- Le second terme (en  $\mathcal{O}(k^3h^2)$  pour  $p = 1$ ) représente l'erreur de pollution dûe à la dispersion numérique [Deraemaeker *et al.*, 1999]. Cette dispersion provient de l'approximation numérique du vecteur d'onde  $\underline{k}$ , et se manifeste par un déphasage spatial de l'approximation par rapport à la solution exacte. Le cumul des erreurs sur chaque longueur d'onde engendre une grande erreur globale [Ihlenburg et Babuška, 1995]. Cette erreur est minime dans les basses fréquences, mais elle devient prépondérante quand le nombre d'onde augmente. Pour la rendre raisonnablement petite il faut garder le facteur  $k^3h^2$  constant. Ce qui implique que la taille du problème explose très rapidement avec le nombre d'onde, ce qui constitue le principal frein à l'extension de la FEM aux moyennes fréquences [Babuška et Sauter, 1997].

### 2.1.1.2 Optimisation de la FEM

Cette section décrit différentes techniques d'optimisation de la FEM dans le but d'avoir une meilleure efficacité numérique.

**2.1.1.2.1 Les EF adaptatifs** Pour lutter contre l'erreur d'interpolation et l'effet de pollution, une première solution consiste à diminuer la taille  $h$  des éléments et augmenter l'ordre  $p$  des polynômes. Ceci est à la base des techniques adaptatives. D'autre part, utiliser un maillage régulier très fin et de degré élevé implique un très grand nombre de degrés de liberté. Ainsi, il paraît plus intelligent de décrire finement les zones à fort gradient et d'utiliser un maillage grossier ailleurs. Pour ce faire, on part d'une première analyse grossière du problème et on utilise des indicateurs d'erreur *a posteriori* pour évaluer l'erreur locale. De tels indicateurs ont été proposés pour les structures dans [Ladevèze et Pelle, 1983, Ladevèze et Pelle, 1989], pour l'acoustique dans [Bouillard et Ihlenburg, 1999, Stewart et Hughes, 1996, Irimie et Bouillard, 2001] et pour le couplage vibro-acoustique [P. Bouillard, 2004]. Augmenter localement l'ordre des polynômes utilisés constitue les  $p$ -méthodes, le raffinement du maillage correspond aux  $h$ -méthodes et la combinaison des deux techniques s'appelle les  $hp$ -méthodes. On trouve des exemples d'applications de ces méthodes dans [Stewart et Hughes, 1997, Dey *et al.*, 2006]. Dans le cadre des  $hp$ -méthodes, on peut appliquer des techniques hiérarchiques [Taylor *et al.*, 1998, Oden *et al.*, 1998] qui utilisent les opérateurs calculés à l'ordre  $p$  pour déterminer les opérateurs à l'ordre  $(p + 1)$ , ce qui permet un gain en temps et en ressource mémoire.



Bien que toutes ces techniques permettent d'optimiser la taille et l'ordre des EF pour obtenir une précision voulue, elles restent des méthodes BF, car elle ne luttent pas efficacement contre l'effet de pollution.

**2.1.1.2.2 Les techniques d'intégration modifiées** Une façon de réduire l'effet de pollution des éléments finis linéaires ou quadratiques est l'utilisation de règles spécifiques d'intégration numérique. Ainsi dans [Guddati et Yue, 2004, Yue et Guddati, 2005] est proposée une technique applicable au problème de Helmholtz consistant à placer les points de Gauss à des endroits inhabituels. Une analyse de dispersion prouve que, pour des éléments quadrilatères, cette technique approxime le nombre d'onde avec une précision d'ordre 4 contre une précision d'ordre 2 avec la FEM classique. Des expériences numériques montrent également que cette technique donne de meilleurs résultats que les techniques de stabilisation qui seront discutées plus loin au paragraphe (2.1.1.3). De plus cette technique semble également fonctionner pour des maillages irréguliers. Toutefois, ces développements sont très récents, et quoique très prometteurs, peu de publications existent à ce sujet.

### 2.1.1.3 Les EF stabilisés

La dispersion numérique est étroitement liée à la forme bilinéaire utilisée [Deraemaeker *et al.*, 1999]. En effet, la forme quadratique associée à cette forme bilinéaire peut perdre sa positivité aux fréquences élevées. Une façon de pallier les problèmes liés à cette propriété est de modifier la forme bilinéaire de manière à la rendre inconditionnellement stable.

**2.1.1.3.1 Galerkin Least-Squares FEM** La *Galerkin Least-Squares FEM* (GLS-FEM) a été introduite dans [Harari et Hugues, 1992b]. Elle modifie la forme bilinéaire par l'ajout d'un terme minimisant les résidus d'équilibre. Pour les problèmes d'acoustique 1D, l'effet de pollution disparaît complètement [Harari et Hugues, 1992b]; ce qui n'est pas le cas en dimension supérieure [Thompson et Pinsky, 1994], où l'erreur de dispersion ne disparaît que dans certaines directions privilégiées.

**2.1.1.3.2 Galerkin Gradient Least-Squares FEM** La *Galerkin Gradient Least-Squares FEM* (G $\nabla$ LS-FEM) est présentée dans [Harari, 1997]. Cette fois elle modifie la forme bilinéaire par l'ajout d'un terme minimisant le gradient des résidus d'équilibre. Cette formulation a tendance à détériorer la qualité de la solution pour les problèmes d'acoustique, mais en revanche elle semble meilleure pour les problèmes de vibrations des milieux élastiques [Harari et Haham, 1998] où des ondes de natures différentes cohabitent. C'est pourquoi on trouve des exemples de couplage vibro-acoustique dans [Grosh et Pinsky, 1998] où le solide est traité par la G $\nabla$ LS-FEM, et le fluide par la GLS-FEM.

**2.1.1.3.3 Quasi Stabilized FEM** Plutôt que de réduire l'effet de dispersion dans certaines directions privilégiées, la *Quasi Stabilized FEM* (QS-FEM) tente de la minimiser dans toutes les directions [Babuška *et al.*, 1995, Babuška et Sauter, 1997]. Contrairement aux deux techniques précédentes, une analyse algébrique de la dispersion conduit cette méthode à modifier la matrice éléments finis, plutôt que de modifier la forme bilinéaire. Cette méthode supprime la dispersion en 1D quelque soit le maillage employé, et en 2D elle est minimisée dans toute les directions pour des maillages suffisamment réguliers. Dans [Deraemaeker *et al.*, 1999] sont comparées les différentes méthodes de stabilisation avec la méthode *Residual Free Bubble* (RFB) présentée dans le paragraphe suivant. Cette comparaison donne la QS-FEM la

plus performante dans la réduction de l'effet de pollution, mais également la plus compliquée à mettre en oeuvre.

#### 2.1.1.4 Les EF multi échelles

Les méthodes multi-échelles introduisent un enrichissement de façon additive. Cette section présente deux méthodes multi-échelles souvent appelées méthodes EF multi-grilles.

**2.1.1.4.1 Méthode variationnelle multi-échelles** La méthode variationnelle multi-échelles (ou VMS pour *Variational Multiscale*) a été introduite dans [Hugues, 1995, Brezzi *et al.*, 1997] et se fonde sur l'hypothèse que le champ solution  $u$  se décompose en  $u = u^P + u^E$ .  $u^P \in \mathcal{U}^P$  est une solution associée à une grande échelle, elle est approximée sur une base polynomiale en employant une technique EF avec un maillage de taille  $h$  petite comparée à la grandeur caractéristique de l'échelle grossière (l'indice  $\square^P$  correspond donc à une partie polynômiale).  $u^E \in \mathcal{U}^E$  est une solution associée à une échelle fine, avec  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^P \oplus \mathcal{U}^E$ . L'échelle fine est beaucoup plus petite que  $h$  et n'est pas calculable par la FEM. Elle est donc calculée analytiquement et consiste à utiliser des fonctions d'enrichissement (l'indice  $\square^E$  correspond donc à un enrichissement). En pratique ces fonctions d'enrichissement sont des fonctions polynomiales à trace nulle sur le bord de l'élément. Cette dernière hypothèse limite la précision de la méthode.

**2.1.1.4.2 Residual Free Bubbles** La *Residual-Free Bubbles method* (RFB) introduite dans [Franca *et al.*, 1997] est très proche de la méthode VMS. Elle s'appuie sur les mêmes hypothèses. La principale différence se trouve au niveau de l'espace d'approximation de l'échelle fine. Dans le cas de la RFB, l'échelle fine  $u^{Eh}$  est recherchée dans un espace engendré par les fonctions bulles définies au niveau de chaque élément. Le calcul des fonctions bulles doit être effectué pour chaque élément ce qui rend la méthode très coûteuse, particulièrement en dimensions 2 et 3. Dans [Cipolla, 1999] une infinité de fonctions bulles est ajoutée à l'espace EF classique. La matrice condensée associée aux bulles est calculée en faisant des hypothèses simplificatrices. Cette technique améliore les résultats.

### 2.1.2 Les méthodes de type éléments de frontière

La méthode des éléments de frontière (ou BEM pour *Boundary Element Method*) est une méthode très couramment utilisée pour le traitement des problèmes acoustiques et électromagnétiques en milieux infinis [Banerjee et Butterfield, 1981, Von Erstoff, 2000]. La BEM est basée sur une formulation intégrale sur le bord du domaine considéré. Seul le bord est donc discrétisé en petits éléments, ce qui conduit à des modèles numériques plus petits que ceux issus d'une analyse par la FEM. Toutefois, la BEM est aussi sujette à l'effet de pollution, le maillage doit donc être raffiné lorsque la fréquence augmente [Marburg, 2002]. Dans chacun de ces éléments les variables acoustiques sont approximées par des fonctions de forme polynomiales. La vérification des conditions aux limites conduit à la construction d'un modèle numérique dont la solution est la valeur du champ discrétisé aux noeuds des éléments. Le champ à l'intérieur du domaine peut être ensuite reconstruit par une opération de post-processing. Contrairement à la FEM, la précision des quantités dérivées du champ vibratoire n'est pas affectée, car il existe des expressions analytiques basées sur l'intégrale de frontière pour les calculer.

En règle générale, les modèles numériques associés à la BEM sont de petite taille, les matrices sont pleines. Les coefficients qui les composent sont complexes, dépendent explicitement de la fréquence  $\omega$ , et résultent d'intégrations numériques compliquées. D'autre part un problème mathématique majeur de la BEM est la perte d'unicité de la solution pour les problèmes en milieu infini présentant une frontière fermée, lorsque la fréquence coïncide avec une fréquence propre du problème intérieur associé. Certains de ces inconvénients rendent la BEM au moins aussi coûteuse que la FEM pour le traitement de problèmes de vibrations de plaques [de Langre, 1991] et de problèmes d'acoustique en cavité fermée [Harari et Hugues, 1992a].

Selon le type de formulation utilisée, deux types de méthode peuvent être définies : la méthode directe et la méthode indirecte.

### 2.1.2.1 La BEM directe

La BEM directe n'est applicable qu'aux milieux clos ou ouverts présentant une frontière fermée. En conséquence, on ne peut traiter que soit l'extérieur, soit l'intérieur d'une surface fermée. Elle s'appuie sur une formulation directe du problème reliant le champ de pression au sein du domaine  $\Omega$  aux traces des champs de pression et de vitesse normale sur un contour fermé  $\partial\Omega$  :

$$\frac{1}{2}p(\underline{x}) = \int_{\partial\Omega} \left( p(\underline{x}) \frac{\partial G(\underline{x}, \underline{\xi})}{\partial \underline{n}} + i\rho_0\omega G(\underline{x}, \underline{\xi})v(\underline{\xi}) \right) ds(\underline{\xi}) \quad (2.4)$$

où  $G(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$  désigne le noyau de Green qui représente le champ rayonné en un point  $\underline{x}_1$  par une source située en un point  $\underline{x}_2$ . Cette fonction satisfait l'équation de Helmholtz inhomogène, ainsi que la condition de radiation à l'infini de Sommerfeld. Toute fonction  $\phi(\underline{x})$  vérifiant (2.4) satisfait automatiquement l'équation de Helmholtz homogène ainsi que la condition de Sommerfeld.

Pour les problèmes d'acoustique, le noyau de Green a pour expression

$$\begin{aligned} G(\underline{x}_1, \underline{x}_2) &= \frac{1}{2\pi} H_0^{(2)}(kr) && \text{en 2-D} \\ G(\underline{x}_1, \underline{x}_2) &= \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} && \text{en 3-D} \end{aligned} \quad (2.5)$$

où  $H_0^{(2)}$  désigne la fonction de Hankel de seconde espèce d'ordre 0 dans  $\mathbb{R}^2$  (car la dépendance temporelle est ici choisie en  $e^{i\omega t}$ ), et  $r = \|\underline{x}_1 - \underline{x}_2\|$ . C'est une fonction complexe qui devient singulière quand la distance  $r$  tend vers 0. Elle est également dépendante de la fréquence à cause de la présence du nombre d'onde  $k$ .

La résolution d'un problème d'acoustique par l'utilisation de cette méthode se déroule en trois étapes :

- la frontière fermée  $\partial\Omega$  est discrétisée en un nombre fini d'éléments. A chaque noeud du maillage sont associées deux valeurs : une pression et une vitesse normale. Afin d'approximer les champs continus sur la frontière, une base polynômiale est utilisée à l'instar de la FEM. Les champs sont donc recherchés sous la forme :

$$\begin{aligned} p(\underline{x}) &= \sum_{E=1}^{n_E} \phi_E(\underline{x})p_E, && \underline{x} \in \partial\Omega \\ v(\underline{x}) &= \sum_{E=1}^{n_E} \phi_E(\underline{x})v_E, && \underline{x} \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.6)$$

- en utilisant un schéma de collocation sur chacun des  $n_{bem}$  noeuds, on aboutit à la construction d'un système de  $n_{bem}$  équations algébriques à  $2n_{bem}$  inconnues. En incorporant dans le modèle les conditions aux limites imposées sur  $\partial\Omega$  (vitesse normale imposée, pression imposée ou condition d'impédance normale), le problème se réduit à un système de  $n_{bem}$  équations à  $n_{bem}$  inconnues ;
- le champ de pression à l'intérieur de  $\Omega$  peut être ensuite reconstruit en utilisant la formulation (2.4) et les  $2n_{bem}$  valeurs nodales.

### 2.1.2.2 La BEM indirecte

La BEM indirecte est applicable aux problèmes présentant un bord non fermé. En conséquence, la frontière est en contact avec le fluide des deux côtés. Cette méthode est basée sur une formulation intégrale indirecte du problème reliant le champ de pression au sein du fluide à une distribution de potentiels simple et double couche sur le bord du domaine  $\partial\Omega$  :

$$p(\underline{x}) = \int_{\partial\Omega} \left( \mu(\underline{\xi}) \frac{\partial G(\underline{x}, \underline{\xi})}{\partial \underline{n}} - G(\underline{x}, \underline{\xi}) \sigma(\underline{\xi}) \right) ds(\underline{\xi}) \quad (2.7)$$

avec  $\mu(\underline{x})$  le potentiel double couche représentant le saut de pression de part et d'autre de la frontière :

$$\mu(\underline{x}) = p(\underline{x}^+) - p(\underline{x}^-) \quad (2.8)$$

et  $\sigma(\underline{x})$  le potentiel simple couche qui représente le saut de gradient normal de pression entre les deux côtés de la frontière :

$$\sigma(\underline{x}) = \frac{\partial p(\underline{x}^+)}{\partial \underline{n}} - \frac{\partial p(\underline{x}^-)}{\partial \underline{n}} \quad (2.9)$$

Les vecteurs positions  $\underline{x}^+$  et  $\underline{x}^-$  repèrent de quel côté de la frontière se situe le point, les signes positif et négatif étant définis par le sens de la normale  $\underline{n}$  à  $\partial\Omega$  choisi.

La résolution d'un problème par cette méthode se déroule de façon analogue à l'approche directe, à la différence près que le modèle numérique construit ici est obtenu par l'utilisation d'une formulation variationnelle de l'intégrale de frontière et des conditions aux limites. Les techniques variationnelles ont suscité de nombreux travaux [Pierce et Wu, 1983, Bonnet, 1995].

Contrairement à l'approche directe où les coefficients matriciels nécessitent une intégrale surfacique simple, ceux de l'approche indirecte sont obtenus par une double intégration surfacique plus onéreuse et techniquement plus compliquée. Néanmoins, la matrice issue de l'approche directe est non-symétrique, tandis que celle de l'approche indirecte est symétrique. Cet avantage de la méthode indirecte contrebalance son coût de calcul plus important. Enfin, l'utilisation d'une formulation variationnelle conduit généralement à un taux de convergence plus rapide qu'un schéma de collocation, par conséquent la méthode indirecte fournit des résultats légèrement plus précis à densité de maillage égale.

### 2.1.2.3 Améliorations de la BEM

Les matrices issues de la BEM sont pleines, ce qui constitue un des principaux inconvénients de cette méthode. C'est pourquoi certaines variantes de la méthode cherchent à réduire la densité des matrices et également à accélérer le calcul des coefficients qui peut être très coûteux car il fait intervenir des intégrations délicates à mettre en oeuvre. Ainsi, on peut

mentionner la résolution des singularités [Wu et Ginsberg, 1998], l'utilisation de solveurs itératifs dédiés aux matrices pleines [Makarov et Ochmann, 1998], ainsi que les Rayleigh-based methods [Herrin *et al.*, 2006].

Une technique très répandue pour accélérer les calculs impliqués par la BEM est la *fast multi-pole method* qui a été initiée dans [Greengard et Rokhlin, 1987]. Son application à la BEM s'appelle la *fast multi-pole BEM* (FMP-BEM). Elle se base sur l'utilisation de deux formulations basées sur les noyaux de Green, l'une en « champ proche », l'autre en « champ lointain ». En un point de la frontière, l'effet des sources lointaines est représenté par un groupe de pôles (multi-pole), tandis que les sources proches sont prises en compte par la BEM standard. Cette idée réduit sensiblement le nombre d'opérations, puisque l'interaction entre chaque source n'est plus calculée. De plus, des procédures hiérarchiques ont été développées pour accélérer cette approche en acoustique et en élastodynamique [Yasuda et Sakuma, 2002, Yasuda et Sakuma, 2005, Bonnet *et al.*, 2008]. Ainsi, les algorithmes FMP-BEM hiérarchiques réduisent la complexité des opérations à  $N \log N$  au lieu de  $N^2$  pour la BEM classique.

### 2.1.3 Méthodes basées sur la partition de l'unité

La méthode de partition de l'unité (ou PUM pour *Partition of Unity Method*) se base sur une propriété très générale [Melenk et Babuška, 1996] : soit une base de fonctions  $\phi_j(\underline{x})$  à supports compacts  $\Omega_j$  réalisant un recouvrement de  $\Omega$  telle que

$$\sum_j \phi_j(\underline{x}) = 1, \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad (2.10)$$

et soit une base de fonctions  $v_j$  approximant  $u$  de manière à ce que

$$\begin{aligned} \|u - v_j\|_{L^2(\Omega_j)} &\leq \varepsilon_{1,j} \\ \|\nabla(u - v_j)\|_{L^2(\Omega_j)} &\leq \varepsilon_{2,j} \end{aligned} \quad (2.11)$$

alors la fonction  $\sum_j \phi_j v_j$  vérifie

$$\begin{aligned} \|u - \sum_j \phi_j v_j\|_{L^2(\Omega)} &\leq C_1 \sqrt{\sum_j \varepsilon_{1,j}^2} \\ \|\nabla(u - \sum_j \phi_j v_j)\|_{L^2(\Omega)} &\leq C_2 \sqrt{\sum_j \varepsilon_{1,j} + \varepsilon_{2,j}^2} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Une telle propriété signifie que si l'on construit une partition de l'unité, il est possible d'enrichir localement l'approximation de  $u$  par des fonctions  $v_j$  ayant un contenu mécanique ou topologique. Cet enrichissement se fait par une voie multiplicative, contrairement aux EF-multiéchelles qui utilisent une voie additive.

#### 2.1.3.1 Les éléments finis généralisés (GFEM)

Les fonctions de forme utilisées dans la FEM réalisent une partition de l'unité. L'application de la PUM à cette méthode porte le nom de GFEM (pour *Generalized Finite Element Method*) et a été introduite dans [Melenk, 1995, Melenk et Babuška, 1996] pour le traitement de problèmes de Helmholtz. Elle porte également parfois le nom de PUFEM (*Partition of Unity Finite Element Method*). Elle utilise une base de fonctions  $v_j$  solutions de l'équation de Helmholtz. Deux familles sont possibles :

- un ensemble de polynômes harmoniques généralisés [Melenk et Babuška, 1997]

$$v(\mathbf{r}) = e^{\pm in\theta} J_n(kr), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

où  $\mathbf{r} = (r, \theta)$  désigne les coordonnées polaires et  $J_n$  les fonctions de Bessel de première espèce d'ordre  $n$  ;

- un ensemble d'ondes planes propagatives [Melenk et Babuška, 1996, Laghrouche et Bettess, 2000, Strouboulis *et al.*, 2000].

$$v(\underline{x}) = e^{ik(x \cos \theta_n + y \sin \theta_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

avec un ensemble de directions de propagations équiréparties  $\theta_n$  défini dans  $[0, 2\pi[$ .

Dans [Melenk, 1995], des résultats théoriques de convergence sur l'utilisation de telles fonctions sont démontrés. En notant  $h$  la taille des éléments,  $p$  l'ordre des polynômes des fonctions de forme EF,  $q$  le nombre d'ondes planes utilisées, et  $\varepsilon$  l'erreur relative commise par l'approximation dans n'importe quelle norme ( $L^2(\Omega)$ ,  $H^1(\Omega)$ ...), alors pour  $(1 + k^2)h$  suffisamment petit, si  $h$  est fixé alors

$$\varepsilon \leq C(h)e^{-(\alpha q + \beta p)} \quad (2.15)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  dépendent également de  $h$ . Dans le cas où ce sont  $p$  et  $q$  qui sont fixés, alors

$$\varepsilon \leq C(p, q)h^{-p} \quad (2.16)$$

La convergence de l'approximation basée sur un ensemble d'ondes planes est également démontrée dans [de La Bourdonnaye, 1994]. Ce résultat est très important, car il explique pourquoi les approches ondulatoires sont si performantes pour le traitement de problèmes de vibrations et d'acoustique. En effet, l'utilisation d'ondes planes confère à ces stratégies un taux de convergence exponentiel quand on augmente le nombre de fonctions utilisées, alors que la convergence de l'approche  $h$  est beaucoup plus lente. Cette méthode a été étudiée dans de très nombreux travaux. On peut par exemple citer [Laghrouche et Bettess, 2000, Ortiz et Sanchez, 2001, Laghrouche *et al.*, 2005, Strouboulis *et al.*, 2006b, Strouboulis *et al.*, 2006a]. Même si la GFEM permet un gain très important en terme de dds comparée à la FEM (stabilisée), elle présente quelques inconvénients : la prise en compte des conditions aux limites imposées requiert une attention spéciale, des règles spécifiques d'intégration numérique doivent être utilisées si on veut que le coût des calculs reste raisonnable, enfin, le conditionnement des matrices est mauvais, ce qui peut nuire aux performances de la méthode.

### 2.1.3.2 Les méthodes sans maillage

Les méthodes sans maillage sont généralement des méthodes dites « particulières », comme par exemple l'une des plus anciennes d'entre elles : la SPH (pour *Smooth Particles Hydrodynamics*) initialement introduite pour des simulations en astrophysique [Lucy, 1977]. Elles se basent sur une discrétisation du domaine d'étude par un nuage de points. A chaque point  $E$  de ce nuage est associé un domaine d'influence  $\Omega_E$ . Ces domaines peuvent se recouvrir, ce qui n'est pas le cas des EF, où les domaines d'influence peuvent être vus comme les éléments. Ces domaines d'influence forment les supports des fonctions de forme qui servent à approximer le champ inconnu  $u$ . Ainsi, ces méthodes ne sont pas interpolantes, la valeur au point  $E$  étant en quelque sorte une moyenne sur le domaine du champ inconnu. Il existe de très nombreuses méthodes utilisant ce principe de base. Elles diffèrent par l'utilisation

de différentes fonctions de forme, et par leur façon de traiter les équations du problème : formulation variationnelle, schéma de collocation, ou encore technique des moindres carrés. La plus communément utilisée est la Element-Free Galerkin Method.

**2.1.3.2.1 Element-Free Galerkin Method** La méthode *Element-Free Galerkin* (EFGM) introduite dans [Belytschko *et al.*, 1994], comme une amélioration de la *Diffuse Element Method* proposée dans [B. Nayroles, 1992] est une méthode sans maillage. Le champ  $u$  inconnu s'écrit comme une combinaison linéaire de fonctions de forme  $\phi_E(\underline{x})$  dont les coefficients associés sont les valeurs de  $u$  dans un voisinage de la position du noeud  $E$  repéré par le vecteur position  $\underline{x}_E$ .

$$u(\underline{x}) \simeq u^h(\underline{x}) = \sum_{E=1}^{n_E} u_E \phi_E(\underline{x}) = \mathbf{u}^T(\underline{x}) \underline{\phi}(\underline{x}), \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad (2.17)$$

Les fonctions de forme  $\phi_E(\underline{x})$  sont construites par la méthode MLS (pour *Moving Least Squares*) proposée dans [Lancaster et Salkaushaus, 1981]. Les conditions de Dirichlet (pression imposée) sont souvent prises en compte par l'intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange. Cette méthode a été appliquée aux problèmes d'acoustique en cavité fermée dans [Bouillard et Suleau, 1998, Suleau *et al.*, 2000]. Ces travaux montrent que la EFGM souffre moins de l'effet de pollution que la FEM. Cet effet diminue drastiquement si l'on utilise une base d'enrichissement local constituée d'ondes planes comme dans la GFEM (paragraphe 2.1.3.1). Dans ce cas, l'erreur de dispersion devient similaire à celle de la QS-FEM. L'efficacité numérique de la méthode peut être améliorée par l'application d'une procédure de résolution multi-niveaux [Lacroix *et al.*, 2003]. Tout d'abord une base linéaire est utilisée pour approximer les directions de propagation des ondes. Ces directions sont ensuite réutilisées dans une deuxième analyse basée sur l'emploi d'ondes planes.

En conclusion, la EFGM exhibe les mêmes propriétés que la PUFEM, excepté qu'un maillage EF n'est pas nécessaire.

## 2.2 Les méthodes ondulatoires

En 1926, Trefftz propose l'idée originale d'introduire une connaissance *a priori* de la solution dans l'espace fonctionnel d'approximation [Trefftz, 1926]. Ces fonctions vérifient l'équation d'équilibre et la relation de comportement mais ne vérifient pas, en règle générale, les conditions aux limites imposées. Dans [Herrera, 1984], il est prouvé qu'une solution cherchée dans de tels espaces converge vers la solution exacte s'ils sont complets : on parle alors de T-complétude. [Kita et Kamiya, 1995] et [Zienkiewicz, 1997] présentent l'historique et le développement de ces méthodes dont le champ d'applications est très large. On distingue deux grandes classes de méthodes :

- les approches de Trefftz *directes* qui sont très similaires à la BEM directe, à la différence que les noyaux de Green sont remplacés des fonctions T-complètes ;
- les approches de Trefftz *indirectes* qui utilisent des fonctions T-complètes pour approximer la réponse dynamique à l'intérieur d'un domaine. Les coefficients associés à ces fonctions sont déterminés pour que l'approximation vérifie au mieux les conditions aux limites par le biais d'une formulation variationnelle, d'un schéma de collocation ou encore d'une fonctionnelle aux moindres carrés.

Quelle que soit l'approche utilisée, toutes ces méthodes ont en commun le mauvais conditionnement des matrices qui est directement lié à l'espace d'approximation choisi [Zieliński

et Herrera, 1987]. L'utilisation des approches directes pour les problèmes de vibrations n'a été que très peu étudiée, toutefois ces approches sont appliquées à la résolution de problème de Helmholtz en 2-D dans [Cheung *et al.*, 1989, Cheung *et al.*, 1991] avec l'utilisation de séries de Bessel T-complètes, et à la résolution de problèmes de vibrations de plaques de Kirchhoff dans [Jin *et al.*, 1993]. Pour les approches indirectes on distingue les méthodes dites de sources équivalentes et les T-elements.

### 2.2.1 Ultra Weak Variational Formulation

La formulation variationnelle ultra faible (UWVF) est basée sur une discrétisation du domaine en éléments. Une variable d'interface est introduite, et cette variable satisfait une formulation faible portant sur le bord de tous les éléments. La variable primale associée représente la pression acoustique et satisfait l'équation de Helmholtz. Le champ vibratoire est approximé par un ensemble d'ondes planes et une procédure de Galerkin conduit à la résolution d'un système matriciel dont la solution est le vecteur des variables d'interface. La continuité entre les éléments est prise en compte dans la formulation par l'intermédiaire d'une variable duale (vitesse normale) de façon similaire à la méthode FETI. Une fois les variables d'interface calculées, le champ à l'intérieur de chaque élément peut être reconstruit en résolvant un problème local. Quand des problèmes de grande taille sont résolus, la méthode a recours à un pré-conditionneur.

Bien que la UWVF permette de faire des calculs à moindre effort, elle peut présenter des instabilités numériques et reste, dans le principe, une  $h$ -méthode. Elle souffre également d'un mauvais conditionnement. Dans [Cessenat, 1996], il est démontré qu'une distribution équi-répartie des directions de propagation maximise le déterminant de la matrice issue de la UWVF, et par conséquent est la distribution conduisant au meilleur conditionnement possible. L'auteur en conclut donc qu'une telle distribution est préférable si l'on ne connaît pas les directions privilégiées de propagation (ou s'il n'y en a pas). Une comparaison de la méthode avec la PUFEM est présentée dans [Huttunen *et al.*, 2006] sur la résolution de problèmes de Helmholtz en 2D avec des maillages irréguliers. Les auteurs concluent que les deux méthodes fournissent des résultats précis avec des maillages grossiers (*i.e.*  $\lambda/h \simeq 0.3$ ). Une tendance générale est que la UWVF semble plus performante que la PUFEM dans les fréquences élevées, alors que la PUFEM est meilleure en basses fréquences. D'un autre côté, la PUFEM présente un conditionnement bien meilleur que la UWVF (même préconditionnée) dans les hautes fréquences. Notons également que les travaux présentés dans [Gittelsohn *et al.*, 2007] montrent que la UWVF est un cas particulier des approches de Galerkin discontinues utilisant des ondes planes.

### 2.2.2 Les T-elements

Certaines approches indirectes utilisent une sous-structuration du domaine d'étude, et cherchent la solution éléments par éléments par une approche de Trefftz. Les sous-domaines ainsi construits sont appelés *T-elements*. La continuité aux niveaux des interfaces est soit assurée par des multiplicateurs de Lagrange [Texeira de Freitas, 1999], et dans ce cas on parle parfois de méthodes de Trefftz hybrides, car elles peuvent rentrer dans le cadre bien établi des éléments finis ([Zienkiewicz, 1997]); soit par une fonctionnelle aux moindres carrés [Jirousek et Wroblewski, 1996, Stojek, 1998, Monk et Wang, 1999]. Dans ce cas, on parle de *Least-Squares T-elements* (LST). L'utilisation de ces techniques comportent un certain nombre d'avantages par rapport à la FEM :



- puisque que les seules équations qui ne sont pas vérifiées sont les conditions sur le bord, la taille du modèle numérique est petite ;
- les géométries complexes peuvent être prises en compte en utilisant des éléments suffisamment petits ;
- les singularités de la solution (sources acoustiques ponctuelles, efforts mécaniques ponctuels) peuvent être prises en compte de façon exacte en injectant dans l'espace d'approximation une fonction adaptée.

Certains travaux récents ont également soulevés les problèmes liés à la définition de l'origine de Trefftz (origine des fonctions de forme) aussi bien pour les approches directes qu'indirectes, origine qui pour les T-elements est usuellement placée au centre des éléments ou du domaine étudié [Chang et Liu, 2004, Yeih *et al.*, 2006].

Notons également la relation existante entre l'approche par multiplicateurs de Lagrange et la *Discontinuous Enrichment Method* (DEM) présentée au paragraphe suivant.

### 2.2.3 Discontinuous Enrichment Method

La *Discontinuous Enrichment Method* (DEM) a été introduite dans [Farhat *et al.*, 2001]. C'est une méthode très proche des EF multi-échelles. Toutefois, contrairement aux EF multi-échelles qui suppose que les champs  $u^E$  sont à trace nulle sur le bord des éléments, la DEM utilise des fonctions  $u^E$  définies à l'échelle fine qui sont solutions exactes de l'équation d'équilibre à l'intérieur de chaque élément. Toutefois, ces fonctions ne respectent pas les conditions aux limites imposées, ainsi que la continuité des champs entre les éléments. L'emploi de multiplicateurs de Lagrange permet de les vérifier. L'enrichissement proposé dans cette méthode consiste en nombre fini d'ondes planes  $e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)}$  se propageant dans des directions équiréparties  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ . Néanmoins, la définition de l'espace de l'échelle fine requiert une attention toute particulière. En effet, pour des raisons de stabilité, le nombre de multiplicateurs de Lagrange employé sur chaque bord des éléments doit être directement relié au nombre d'ondes planes définies dans chaque élément par la condition inf-sup [Brezzi et Fortin, 1991]. De ce fait, la méthode doit s'appuyer sur la construction d'éléments particuliers notés par exemple  $R - 4 - 1 : R$  pour rectangle, 4 pour le nombre d'ondes prises en compte et 1 pour le nombre de multiplicateurs utilisé sur chaque frontière des éléments. De tels éléments ont été proposés en 2D dans [Farhat *et al.*, 2003, Farhat *et al.*, 2004a, Farhat *et al.*, 2004b] et en 3D dans [Farhat et Tezaur, 2005]. Dans [Farhat *et al.*, 2004b], il est aussi montré que l'approximation EF, *i.e.* les fonctions polynômiales de l'échelle grossière, n'apporte rien à la qualité de la solution pour un grand nombre de problèmes de Helmholtz. La suppression de ces fonctions conduit à la *Discontinuous Galerkin method* (DGM). Cette méthode fournit des résultats précis avec des maillages plus grossiers que la FEM classique, et les matrices sont bien mieux conditionnées que pour la PUM [Grosu et Harari, 2008]. Récemment, des problèmes d'acoustique en milieux mobiles ont été traités dans [Gabard, 2007], et des problèmes d'interaction fluide/fluide et fluide/solide ont été traités grâce à l'utilisation d'ondes évanescentes dans [Tezaur *et al.*, 2008].

En conclusion, cette méthode est robuste et fournit des résultats précis avec un nombre raisonnable de degrés de liberté comparé à la FEM, l'utilisation d'ondes planes réduisant drastiquement l'effet de pollution. Elle permet également de prendre en compte des géométries complexes grâce à l'utilisation d'un maillage EF. En revanche, cette méthode est contrainte par l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange, ce qui nuit à sa souplesse.

### 2.2.4 Wave Boundary Element Method (WBEM)

La *Wave Boundary Element Method* (WBEM) est une extension de la BEM directe. Elle a été proposée dans [Perrey-Debain *et al.*, 2003, Perrey-Debain *et al.*, 2004]. La WBEM introduit un enrichissement constitué d'ondes planes propagatives. Les éléments de frontière peuvent être ainsi beaucoup plus grands que pour l'approche conventionnelle. L'idée de base est que les fonctions polynômiales définies sur la frontière sont multipliées par des ondes planes. Le nombre de fonctions et leur direction de propagation peuvent être choisis librement. Dans [Perrey-Debain *et al.*, 2004] une distribution équirépartie est utilisée, mais il est mentionné que si on a une idée *a priori* sur des directions privilégiées de propagation, on peut tout à fait utiliser une distribution irrégulière de directions. Les auteurs mentionnent également le fait que l'utilisation d'ondes planes dégrade fortement le conditionnement des opérateurs, tout comme la PUFEM ou les autres méthodes mentionnées dans cette partie. La méthode permet d'obtenir des modèles considérablement réduits par rapport à une approche standard, particulièrement si on privilégie l'approche  $p$  à l'approche  $h$ .

### 2.2.5 Wave Based Method (WBM)

La *Wave Based Method* (WBM) introduite dans [Desmet *et al.*, 2001] est similaire aux LST, mais diffère sur deux points. Le premier est l'utilisation d'une base d'ondes planes et évanescentes pour l'approximation de la solution. Le deuxième est le traitement des conditions aux limites et de continuité des champs entre sous-cavités. La WBM adopte une technique variationnelle de résidus pondérés pour respecter ces conditions. Pour illustrer les fondements de cette méthode, prenons le problème d'acoustique pure défini dans le premier chapitre. Considérant la cavité  $\Omega$  décomposée en deux sous domaines. Sur chacune des deux sous-cavités  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , la solution est recherchée sous la forme (pour  $E \in \{1, 2\}$ )

$$p_E = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m^{(E)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L_x^{(E)}}\right) e^{\pm i\sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{L_x^{(E)}}\right)^2} y} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{(E)} \cos\left(\frac{n\pi y}{L_y^{(E)}}\right) e^{\pm i\sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{L_y^{(E)}}\right)^2} x} \quad (2.18)$$

où  $L_x^{(E)}$  et  $L_y^{(E)}$  représentent les dimensions du plus petit rectangle englobant la sous-cavité  $\Omega_E$ . Ces approximations sont évidemment tronquées pour pouvoir les implémenter numériquement. Afin de fixer les nombres  $n_x^{(E)}$  et  $n_y^{(E)}$  de fonctions de forme à employer dans chaque sous-cavités, la WBM propose d'utiliser le critère suivant

$$\frac{n_x^{(E)}}{L_x^{(E)}} \simeq \frac{n_y^{(E)}}{L_y^{(E)}} \simeq T \frac{k}{\pi} \quad (2.19)$$

où  $T$  est un paramètre de troncature de l'approximation (2.18) choisi par l'utilisateur. Dans [Desmet, 1998] il est préconisé de fixer ce paramètre à  $T = 2$ , ce qui garantit que la longueur d'onde  $\lambda_{min}$  de la fonction de forme la plus oscillante n'est pas plus grande que la moitié de la longueur d'onde caractéristique du problème étudié ( $\lambda = 2\pi/k$ ), soit  $2\lambda_{min} < \lambda$ .

L'approximation choisie ne vérifie pas les conditions aux limites et les conditions de transmission à l'interface. Pour les vérifier, des résidus sur chacune de ces conditions notés  $R$  sont définis comme suit

$$\begin{aligned} R_p^{(E)}(\underline{x}) &= p_E^h - p_{dE}, & \underline{x} \in \partial_p \Omega_E \\ R_v^{(E)}(\underline{x}) &= \mathcal{L}_v[p_E^h] - v_{dE}, & \underline{x} \in \partial_v \Omega_E \\ R_Z^{(E)}(\underline{x}) &= \mathcal{L}_v[p_E^h] - Z_E^{-1} p_E^h, & \underline{x} \in \partial_v \Omega_E \end{aligned} \quad (2.20)$$

En multipliant chacun de ces résidus par une fonction test primale ( $\delta p_E$ ) ou par une fonction test duale associée ( $\mathcal{L}_v[\delta p_E]$ ) et en intégrant sur tous les bords concernés, on obtient la forme variationnelle suivante

$$\begin{aligned} \sum_{E=1,2} \left( \int_{\partial_p \Omega_E} \mathcal{L}_v[\delta p_E] \cdot R_p^{(E)} ds + \int_{\partial_v \Omega_E} \delta p_E \cdot R_v^{(E)} ds + \int_{\partial_Z \Omega_E} \delta p_E \cdot R_Z^{(E)} ds \right) \\ + \sum_{E=1, E \neq E'}^2 \int_{\Gamma} \left( \delta p_E \cdot R_{\Gamma v}^{(E-E')} - \mathcal{L}_v[\delta p_E] \cdot R_{\Gamma p}^{(E-E')} \right) ds = 0 \quad (2.21) \end{aligned}$$

Cette technique conduit à la résolution d'un système matriciel  $\mathbf{K}\mathbf{a} = \underline{b}$  dont la solution est le vecteur des amplitudes complexes des ondes de l'expression (2.18).

Notons que dans cette méthode, la prise en compte des conditions de transmission au niveau de l'interface  $\Gamma$  n'est pas très naturelle. En effet, dans la formulation (2.21) les termes sur l'interface sont une variante possible, puisque *a priori* le coefficient de pondération associé à la fonction test est un choix. Ce choix peut éventuellement rendre les modèles numériques instables, particulièrement lorsque la fréquence traitée coïncide avec une fréquence propre d'une des sous-structures. Dans [Pluymers, 2006] des travaux ont porté sur l'étude de ces conditions de transmission. Des conditions de type impédance normale sont imposées au niveau des interfaces, et introduisent de l'amortissement dans le modèle, ce qui semble améliorer la stabilité de la méthode. Il convient toutefois d'ajuster les conditions d'impédance en fonction du problème traité.

Des tests numériques montrent que si le facteur d'impédance choisi correspond à l'impédance caractéristique du milieu de propagation ( $Z_0 = \rho_0 c_0$ ) la formulation est plus stable [Pluymers, 2006].

La WBM est typiquement une  $p$ -méthode, et préfère donc utiliser des éléments de grande taille et augmenter le nombre de fonctions utilisées pour obtenir des solutions de qualité avec des modèles de petite taille. La matrice WBM souffre aussi d'un mauvais conditionnement. Elle a été tout d'abord appliquée à la résolution de plusieurs classes de problèmes d'acoustique et de vibro-acoustique en dimension 2 et 3 [Desmet *et al.*, 2001, Desmet *et al.*, 2002, Desmet *et al.*, 2004]. Elle a été également appliquée à la résolution de problèmes de vibrations structurales dans [Vanmaele *et al.*, 2007]. Enfin plus récemment, une application aux problèmes de diffusion d'onde acoustique dans un milieu infini contenant plusieurs obstacles a été faite dans [Genechten *et al.*, 2010]. Néanmoins, la WBM se limite à des géométries relativement simples, les sous domaines doivent être convexes afin d'assurer la convergence de la méthode, elle a été couplée à la méthode des EF dans le but de traiter des géométries complexes [Van Hal *et al.*, 2005, Pluymers *et al.*, 2007], la zone près des bords étant traitée par des EF couplés avec l'intérieur qui lui est traité par la WBM.

## 2.3 Les méthodes énergétiques

La prédiction de la réponse à haute fréquence d'un système dynamique complexe est une tâche difficile pour deux raisons. Tout d'abord, la déformation du système est de courte longueur d'onde, ce qui signifie que très nombreux degrés de liberté sont nécessaires pour modéliser la réponse en détail, et deuxièmement, la réponse est sensible à de petits changements dans les propriétés du système. Le deuxième point peut conduire à ce que des systèmes identiques issus de la même chaîne de production aient un comportement très dif-

férent, comme les résultats expérimentaux [Kompella et Bernhard, 1993] le montrent sur des éléments automobiles.

Les approches énergétiques comme la SEA (Analyse Énergétique Statistique) sont majoritairement non déterministes et permettent de prédire le comportement vibratoire d'un système. Ces méthodes s'appuient alors sur des grandeurs moyennées aussi bien en espace et en fréquence que sur des paramètres du système. Une modélisation SEA donne ainsi une description énergétique par sous-système. Cependant, elles restent limitées à l'analyse hautes fréquences. La relaxation des limitations de la SEA conduit à des approches dont la validité peut s'étendre au domaine des moyennes fréquences. C'est le cas de la MES (méthode énergétique simplifiée) et de la WIA (wave intensity analysis).

### 2.3.1 Statistical Energy Analysis

L'analyse statistique de l'énergie (ou SEA pour *Statistical Energy Analysis*) initiée dans [Lyon et Maidanik, 1962] est aux hautes fréquences ce que les éléments finis sont aux basses fréquences. C'est la méthode la plus répandue dans ce domaine, et il existe quelques codes commerciaux utilisés dans le monde industriel comme par exemple AutoSEA qui est largement diffusé, ou encore le code LASCAR utilisé au CNES [Trochet, 1995]. On trouve une description détaillée de cette méthode dans [Lyon et Dejong, 1995].

La SEA s'appuie sur une sous-structuration du système étudié. L'idée fondamentale de la SEA consiste à décrire la réponse vibratoire à l'aide de quantités énergétiques définies sur une large bande de fréquences et supposées constantes dans chaque sous-structure. Sur chacune de ces dernières, un bilan de puissance est effectué. Ainsi, pour la sous-structure  $i$  on a

$$P_{inj}^{(i)} = P_{diss}^{(i)} + \sum_j P_{coup}^{(i,j)} \quad (2.22)$$

où  $P_{inj}^{(i)}$  et  $P_{diss}^{(i)}$  désignent respectivement les puissances injectées et dissipées dans la sous-structure  $i$ , et  $P_{coup}^{(i,j)}$  la puissance transmise par la sous-structure  $i$  à chacune de ses voisines  $j$ . Cette équation résulte d'une moyenne en temps d'un bilan de puissance, et est donc exacte. Si on prend un modèle d'amortissement hystérétique, la puissance dissipée est reliée à l'énergie totale de la sous-structure  $i$  par la relation

$$P_{diss}^{(i)} = \omega \eta_i E_i \quad (2.23)$$

où  $\eta_i$  est un coefficient d'amortissement hystérétique et  $E_i$  l'énergie totale (somme des énergies cinétiques et potentielles). La moyenne en temps sur une bande de fréquences apparaît par l'intermédiaire du terme  $\omega$  qui représente la fréquence centrale. Le point délicat de la méthode consiste à décrire correctement le couplage entre les sous-structures. On suppose généralement que la puissance de couplage peut s'écrire

$$P_{coup}^{(i,j)} = \omega \eta_{ij} n_i \left( \frac{E_i}{n_i} - \frac{E_j}{n_j} \right) \quad (2.24)$$

où  $n_i$  est la densité modale de la sous-structure  $i$ , et  $\eta_{ij}$  un coefficient de perte par couplage. Cette équation signifie que le flux d'énergie entre  $i$  et  $j$  est proportionnel à la différence d'énergie par mode dans chaque sous-structure.

Dans [Langley et Brown, 2004, Cotoni *et al.*, 2005], on trouve une extension de la SEA pour prévoir également la variance de l'énergie dans chacun des sous-systèmes. Cette prédiction se base sur l'hypothèse d'ergodicité de la structure. Cette méthode a été validée dans le cas d'un assemblage de plaque soumis à un effort de type Rain on the roof (ROF).

Les hypothèses de la méthode SEA ne sont vérifiées que sous certaines conditions. Dans [Remington et Manning, 1975, Mace, 1994, Mace, 1996], on trouve des études sur ces hypothèses. Ces conditions dépendent fortement de deux paramètres : le caractère de champ diffus au sein de chaque sous-système (recouvrement modal spatial) et le nombre de modes dans la bande de fréquence considérée (recouvrement fréquentiel). Un recouvrement modal élevé permet de valider l'hypothèse d'équiprobabilité des fréquences propres des modes sur la bande de fréquence considérée. Dans le cas d'un recouvrement modal faible, les facteurs de perte par couplage dépendent fortement des irrégularités géométriques présentes dans le système. Dans ce cas, l'hypothèse d'équiprobabilité des modes n'est plus valable.

Une autre hypothèse importante à considérer lors de l'application de la méthode SEA, et qui dépend également du recouvrement modal, est l'hypothèse de couplage faible.

Le couplage est considéré comme faible si le couplage de deux modes d'un même sous-système via un mode de l'autre sous-système est négligeable par rapport au couplage direct entre les modes de chaque sous-système. Lorsque le couplage est fort, il convient d'étudier le couplage indirect (entre deux sous-systèmes non physiquement liées) ainsi que la prise en compte ou non du couplage indirect dans le modèle. Lors de l'application de la modélisation SEA, le couplage indirect est négligé (sauf pour quelques cas particuliers comme l'étude du couplage entre deux cavités séparés par une plaque) : dans [Langley, 1989, Langley, 1990, Finnveden, 1995], il est montré que, pour des systèmes faiblement couplés et réverbérants, le couplage indirect peut-être négligé. L'extension de la SEA aux moyennes fréquences est délicate, c'est pour cela qu'une approche hybride a été développée dans [Langley et Bremner, 1999] et permet de coupler la SEA à d'autres approches pour le traitement de zones structurales où elle perd de sa validité. En modifiant la méthode SEA de manière à prendre en compte le couplage indirect, il est possible d'introduire d'autres méthodes énergétiques qui prennent en compte des couplages plus forts.

### 2.3.2 Méthode SEA-like

La méthode SEA-like est une méthode énergétique par approche modale, comme la méthode des coefficients d'influence énergétiques présentée plus loin, et qui relie le vecteur des énergies au vecteur des puissances injectées. Dans [Mace, 2003, Mace, 2005], la SEA-like est présentée comme un assouplissement de la méthode SEA, où des hypothèses sont relaxées. Ensuite, des expressions analytiques des coefficients SEA-like de systèmes quelconques sont calculées à partir de deux types d'analyse modale : une analyse modale sur les modes du système couplé et une analyse par couplage modal. Ces expressions permettent d'effectuer une brève analyse des mécanismes de couplage spatial et fréquentiel. Lorsque le recouvrement modal dans un système est faible, le système a un comportement modal plus marqué. Il ne peut alors plus être décrit comme une somme de modes équii-énergétiques. La méthode SEA-like, construite à partir d'une analyse modale ou par éléments-finis du système, permet de décrire ce comportement modal particulier au système.

### 2.3.3 Statistical modal Energy distribution Analysis

La méthode Statistical modal Energy distribution Analysis présentée dans [Guyader *et al.*, 1988] cherche à améliorer les résultats mitigés de la SEA en moyennes fréquences qui sont dûs à une description sommaire des couplages entre les sous-structures. Elle conserve les concepts énergétiques de la SEA en cherchant à caractériser l'énergie cinétique des sous-systèmes. Pour un problème de vibro-acoustique [Totaro *et al.*, 2009], elle propose un décou-

page du système en deux types d'éléments couplés : les uns de nature mécanique, les autres de nature acoustique. Les transferts d'énergie sont décrits à l'aide des CIE. Leur évaluation s'appuie sur le calcul préalable des modes propres de l'ensemble des systèmes couplés. Le couplage d'une stratégie d'échantillonnage modal avec l'approche SEA permet de déterminer les coefficients par la FEM. Cette méthode a été appliquée dans le cadre de structures complexes dans [Maxit et Guyader, 2001a, Maxit et Guyader, 2001b]. Cette démarche fournit des résultats satisfaisants pour les assemblages de plaques et permet de comprendre de façon fine l'influence de la géométrie et de l'amortissement sur les échanges énergétiques entre chaque composants du système. Toutefois elle nécessite des calculs très coûteux de modes à l'échelle globale.

### 2.3.4 Méthode des coefficients d'influence énergétique

La méthode des *Coefficients d'Influence Énergétique* (CIE) présentée dans [Guyader *et al.*, 1988] cherche à améliorer les résultats mitigés de la SEA en moyennes fréquences qui sont dûs à une description sommaire des couplages entre les sous-structures. Elle conserve les concepts énergétiques de la SEA en cherchant à caractériser l'énergie cinétique des sous-systèmes. Pour un problème de vibro-acoustique, elle propose un découpage du système en deux types d'éléments couplés : les uns de nature mécanique, les autres de nature acoustique. Les transferts d'énergie sont décrits à l'aide des CIE. Leur évaluation s'appuie sur le calcul préalable des modes propres de l'ensemble des systèmes couplés. Le couplage d'une stratégie d'échantillonnage modal avec l'approche SEA permet de déterminer les coefficients par la FEM. Cette méthode a été appliquée dans le cadre de structures complexes dans [Maxit et Guyader, 2001a, Maxit et Guyader, 2001b]. Cette démarche fournit des résultats satisfaisants pour les assemblages de plaques et permet de comprendre de façon fine l'influence de la géométrie et de l'amortissement sur les échanges énergétiques entre chaque composants du système. Toutefois elle nécessite des calculs très coûteux de modes à l'échelle globale.

### 2.3.5 Wave Intensity Analysis

Les grandeurs énergétiques de la SEA ne sont représentatives des phénomènes réels que si elles satisfont les hypothèses de champ diffus et d'équi-répartition de l'énergie entre les modes d'un même groupe. Les coefficients de couplage  $\eta_{ij}$  sont calculés (quand cela est possible) sur ces hypothèses. Dans la réalité, il est tout à fait possible qu'une interface privilégie la transmission de certaines incidences des ondes. La *Wave Intensity Analysis* (WIA) proposée dans [Langley, 1992] relâche donc l'hypothèse de champ diffus et suppose que le champ vibratoire présente éventuellement des directions privilégiées et s'écrit sous la forme

$$u(\underline{x}) = \int_0^{2\pi} A(\theta) e^{i\mathbf{k}(\theta) \cdot \underline{x}} d\theta \quad (2.25)$$

où  $\mathbf{k}(\theta)$  représente le vecteur d'onde de l'onde se propageant dans la direction  $\theta$ . En supposant que les ondes sont statistiquement décorréllées

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} A(\theta_1) A^*(\theta_2) e^{i\mathbf{k}(\theta_1 - \theta_2) \cdot \underline{x}} d\theta_1 d\theta_2 = f(\theta_1) \delta(\theta_1 - \theta_2) \quad (2.26)$$

où  $f(\theta_1)$  est une mesure de l'énergie dans la direction  $\theta_1$  et  $\delta$  désigne la fonction delta de Dirac, alors l'énergie s'exprime par la relation

$$E(\underline{x}) = \int_0^{2\pi} e(\underline{x}, \theta) d\theta \quad (2.27)$$

L'énergie  $e(\underline{x}, \theta)$  est ensuite homogénéisée en espace et développée en série de Fourier

$$e(\underline{x}, \theta) = \sum_{p=0}^{+\infty} e_p N_p(\theta) \quad (2.28)$$

Un bilan de puissance par sous-structure permet de connaître les amplitudes énergétiques  $e_p$ . Au niveau des interfaces, le couplage fait intervenir là aussi des coefficients de couplage qui ne sont pas toujours connus. La méthode fournit de meilleurs résultats que la SEA sur les assemblages de plaques [Langley *et al.*, 1997], mais ne permet pas de donner la répartition de l'énergie à l'échelle de la sous-structure.

### 2.3.6 Méthodes de diffusion de l'énergie

L'approche EFA (pour *Energy Flow Analysis*) initiée dans [Belov et Ryback, 1975], et [Belov *et al.*, 1977] s'appuie sur une description continue des grandeurs énergétiques caractérisant le phénomène vibratoire d'un système mécanique. L'inconnue principale est la densité d'énergie effective  $e$ . Une hypothèse relie cette énergie au flux d'énergie par une relation de comportement

$$\mathbf{I} = - \left( \frac{c_g^2}{\eta\omega} \right) \underline{\nabla} e \quad (2.29)$$

où  $c_g$  est la vitesse de groupe. Un bilan de puissance ( $\text{div} \mathbf{I} = P_{inj} - P_{diss}$ ) conduit à une équation de diffusion analogue à celle de l'équation de la chaleur

$$\frac{c_g^2}{\eta\omega} \Delta e - \omega\eta e = -P_{inj} \quad (2.30)$$

La simplicité de cette équation permet de la traiter facilement avec un code EF existant, car la quantité  $e$  évolue lentement avec la variable d'espace. Cependant, les difficultés pour le traitement du couplage entre sous-structures sont les mêmes qu'avec la SEA. S'il est bien maîtrisé en 1-D [Lase *et al.*, 1996, Ichchou *et al.*, 1997], le couplage en 2-D reste problématique [Langley, 1995]. De plus la description du comportement de l'énergie par une équation telle que (2.30) pose de nombreuses difficultés [Carcattera et Adamo, 1999]. Par exemple, le champ rayonné par une source pour une structure 2-D présente une décroissance en  $1/\sqrt{r}$ , ce qui est en contradiction avec la théorie qui prévoit une décroissance en  $1/r$ . De plus, dans le cas stationnaire, ce modèle ne représente correctement l'évolution de l'énergie qu'en supposant les ondes décorréélées [Ichchou et Jézéquel, 1996], et malgré cette hypothèse le comportement instationnaire de l'énergie reste mal décrit [Ichchou et Jézéquel, 2001, Ichchou *et al.*, 2001].

### 2.3.7 Méthode énergétique simplifiée

L'approche conduite dans [Le Bot, 1998b, Le Bot, 1998a, Cotoni *et al.*, 2001, Le Bot, 2002] propose de pallier les insuffisances de la EFA. Elle considère les échanges d'énergie transportée par des ondes propagatives supposées non-corrélées. La solution est recherchée en terme de champ direct et de champ réfléchi. Le champ direct est décrit par une onde partant d'une source d'excitation, et le champ réfléchi, résultant des diverses réflexions, est représenté par un ensemble de sources secondaires placées sur le bord de la (sous-)structure. Les amplitudes des champs rayonnés par ces sources constituent les inconnues du problème. La propagation du champ d'une source à une autre est gouvernée par des relations linéaires

faisant intervenir un certains nombre de paramètres, comme leur position relative ainsi que les valeurs des coefficients de transmission et de réflexion. De telles relations permettent de construire un système matriciel dont la solution est le vecteur des amplitudes des sources secondaires. En couplant cette approche à WBEM 2.2.4, cette approche a conduit à la Energy Boundary Element Method, qui fournit de bons résultats pour des problèmes de vibro-acoustiques [Thivant *et al.*, 2010].

### 2.3.8 Méthode de tracé de rayons

Initialement proposée dans le cadre de l'acoustique des salles ([Krokstadt, 1968]), la RTM (pour *Ray Tracing Method*) dérive des concepts de l'optique géométrique. Elle propose de calculer le champ vibratoire en le décrivant par un ensemble de rayons (qui sont des ondes planes propagatives) dont le parcours est suivi jusqu'à amortissement complet. Les transmissions et réflexions de ces rayons sont calculés par les lois classiques de Snell-Descartes.

D'une certaine façon, la RTM synthétise les avantages de la WIA et de la méthode énergétique simplifiée présentée dans le paragraphe précédent. En effet, elle permet de prendre en compte les effets de filtrage aux interfaces grâce au loi de Snell-Descartes, et elle permet également de donner une description de la répartition de l'énergie au sein du domaine étudié. Toutefois, elle nécessite des calculs assez lourds lorsque l'amortissement des ondes est trop petit ou lorsque la fréquence est trop basse. De plus, le choix des directions initiales de propagation n'est pas toujours aisé, particulièrement pour les géométries complexes. Des approches basées sur les concepts de la RTM ont été proposées pour la résolution des problèmes d'acoustique dans [Allen et Berkley, 1979] et de plaques dans [Chae et Ih, 2001].

### 2.3.9 Méthodes de l'enveloppe

L'incapacité des approches classique à traiter les fonctions très oscillantes ont conduit certaines méthodes à prédire le comportement de l'enveloppe du champ vibratoire qui est supposée à variations spatiales lentes. Une fois que les équations que satisfont ces enveloppes sont déterminées, il devient possible d'utiliser la FEM pour en donner une approximation.

La *Wave Enveloppe Method* présentée dans [Bettess et Chadwick, 1995, Chadwick et Bettess, 1997] cherche le potentiel  $\phi$  solution de l'équation de Helmholtz sous la forme  $\phi = Ae^{i\psi}$ , où  $A$  est l'amplitude de l'enveloppe et  $\psi$  sa phase. Ces deux quantités sont des variables lentes, alors que  $\phi$  peut présenter des variations rapides. Pour vérifier l'équation de Helmholtz ces quantités doivent vérifier

$$\begin{aligned} (\underline{\nabla}\psi)^2 &= 1 \\ 2\underline{\nabla}A \cdot \underline{\nabla}\psi + A\Delta\psi &= 0 \end{aligned} \tag{2.31}$$

En partant d'une solution initiale  $\psi_0$ , cette approche cherche une solution de façon itérative en recherchant une fonction  $A$  vérifiant (2.31), puis en reconstruisant la phase associée. L'équation (2.31) est résolue par une technique EF. Cependant, cette résolution nécessite la connaissance des conditions aux limites et dans le cas d'un couplage entre sous-structures, ce point reste ouvert.

L'approche CEDA (pour *Complex Enveloppe Displacement Analysis*) proposée dans [Carcattera et Sestieri, 1997, Sestieri et Carcattera, 2001] est une méthode qui cherche, dans le cadre des structures, l'enveloppe des déformations. Cette enveloppe est gouvernée par la transformée de Hilbert de l'équation de la dynamique. Les auteurs soulignent le fait que les



équations issues de cette approche sont compliquées. Elle a tout de même été appliquée avec succès dans des cas uni-dimensionnels.

### 2.3.10 Méthodes asymptotiques

L'évolution de l'équation de la dynamique peut être prédite par un développement asymptotique en fonction de paramètres comme la fréquence et l'élanement ([Ohayon, 1989]). La méthode WBJK (Wentzel Kramers Brillouin Jeffroys) recherche les modes propres sous la forme  $e^{ik(y)/\varepsilon}(v_0(y) + \varepsilon v_1(y) + \dots)$  où  $\varepsilon$  est un petit paramètre lié à l'élanement et  $y$  la direction de l'élanement. En injectant un tel développement dans l'équation de la dynamique, un développement asymptotique permet de prédire si le mode est global ou local. La méthode de la phase stationnaire est une méthode générale pour évaluer le comportement asymptotique d'une certaine classe d'intégrales. Son application aux problèmes de dynamique ([Gibert, 1984]) permet d'évaluer, sur le plan théorique, la réponse d'une structure soumise à des forces sinusoïdales.

Bien que ces techniques aient un apport théorique important sur la compréhension des phénomènes vibratoires, comme par exemple la sensibilité à la position du chargement, et des liens entre comportements basses et hautes fréquences, elles sont toutefois restreintes à des géométries très simples.

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre ont été présentées les principales méthodes dédiées aux problèmes de vibrations et (ou) d'acoustique. Des stratégies spécifiques sont développées selon le domaine fréquentiel traité. Ainsi, pour les basses fréquences les deux principales méthodes sont la FEM et la BEM. La première s'appuie sur un affaiblissement de l'équation d'équilibre locale, et la deuxième sur une forme intégrale de l'équation d'équilibre qui représente une solution particulière du problème. Elles s'appuient toutes deux sur un maillage, mais dans la BEM seul le bord est discrétisé. Si ces méthodes sont robustes et fiables dans le domaine des BF, leur extension aux moyennes fréquences pose de sérieuses difficultés. La FEM se heurte à l'effet de pollution qui nécessite un raffinement du maillage très important quand la fréquence augmente. C'est pourquoi certaines techniques, comme la stabilisation de la forme bilinéaire de la formulation variationnelle, ont été proposées. Ces méthodes restent toutefois très coûteuses. Pour la BEM la principale difficulté est plus d'ordre numérique, elle conduit à des modèles numériques plus petits que la FEM, mais les intégrations numériques qu'elle fait intervenir sont beaucoup plus coûteuses. La BEM est également sujette à l'effet de pollution, et doit donc elle aussi utiliser un maillage de frontière de plus en plus fin quand la fréquence augmente.

A l'opposé, la communauté des hautes fréquences s'intéresse à des modèles basés sur des considérations énergétiques souvent globales, telle la SEA. Sauf dans le cadre d'hypothèses simplificatrices et restrictives, ces méthodes sont généralement non-prédictives. De plus, elles font parfois intervenir des coefficients qu'il faut identifier par l'expérience ou qui nécessitent des calculs très coûteux. Leur extension au MF est donc souvent peu efficace.

Enfin, entre ces deux communautés existe une communauté MF qui développe des approches que nous pouvons qualifier d'ondulatoires. Ces méthodes utilisent toutes une base de fonctions qui sont des solutions exactes de l'équation d'équilibre, *ie* des ondes planes ou encore des fonctions de Bessel. Ces fonctions sont utilisées soit par l'enrichissement d'un

espace fonctionnel classique (par exemple les fonctions EF) comme la PUM, la EFGM, la DEM, ou encore la WBEM, soit en tant que fonctions de forme à part entière pour les méthodes de Trefftz ou encore la DGM. Toutes ces méthodes se distinguent les unes des autres par le traitement spécifique des autres équations du problème de référence. Ici, nous avons distingué les approches de type  $p$  et de type  $h$ . Les approches de type  $p$  fournissent à nombre de ddls égal des résultats plus précis.

La TVRC est une de ces méthodes. Elle utilise une base d'ondes planes propagatives (et évanescentes dans le cadre des vibrations structurales). Elle préfère toutefois une vision intégrale des directions de propagation, l'idée étant de prendre toutes les directions en compte. Elle se distingue également par une formulation variationnelle originale qui permet l'indépendance *a priori* des approximations entre chaque sous-structure, car les conditions de transmission entre sous-structures y sont incorporées de façon naturelle et automatique.

Cet état de l'art montre aussi que toutes ces méthodes ont en commun le mauvais conditionnement des systèmes algébriques auxquels elles aboutissent. Ce problème est souvent attribué au fait que ces méthodes utilisent des fonctions définies sur la (sous-)structure entière, et qu'elles sont très peu orthogonales. L'utilisation des séries de Fourier (dans le cas 2D) ou des séries de Laplace (dans le cas 3D), et les propriétés d'orthogonalité qui les accompagnent permettent d'améliorer ce dernier point.

Enfin, la plupart de ces méthodes sont limitées à des géométries simples, nous verrons au cours des différents chapitres que la TVRC n'a pas de telles limitations.

---

# La Théorie Variationnelle des Rayons Complexes

L'OBJET DE CE CHAPITRE est la présentation de la TVRC appliquée aux problèmes de couplage vibro-acoustique, et le rappel des principales propriétés de la TVRC. Dans un premier temps, la formulation initialement proposée dans [Ladevèze, 1996] est adaptée pour ce type de problème. Cette formulation variationnelle mixte du problème de référence où les conditions sur les frontières sont vérifiées au sens faible est un point-clé de la méthode, car elle autorise l'indépendance *a priori* des approximations faites sur chaque sous-système. La continuité des champs au niveau des interfaces entre sous-systèmes est directement incorporée dans la formulation variationnelle, contrairement à d'autres approches qui doivent l'assurer par des multiplicateurs de Lagrange ou par l'emploi d'une technique de pénalisation. Ensuite, l'approximation utilisée dans la TVRC est présentée. Cette approximation est construite sur une base de fonctions qui vérifient exactement l'équation d'équilibre en tous points d'un (sous-)système. La partie homogène de la solution utilise une base d'ondes planes se propageant dans toutes les directions. Les fonctions de forme issues de cette approximation sont appelées rayons de vibration et comportent deux échelles. L'échelle rapide caractérisant le phénomène vibratoire est prise en compte analytiquement, tandis que l'échelle lente est calculée numériquement. Cette échelle lente est constituée par le portrait d'amplitudes complexes des rayons de vibration. Enfin, on illustrera sur un exemple les performances de convergence de la méthode. En effet l'inconnue du problème est le portrait d'amplitude qui nécessite une discrétisation relativement grossière en comparaison de la discrétisation nécessaire pour décrire correctement le champ de pression. Ce qui permet d'obtenir des solutions de qualité avec un faible nombre d'inconnues.

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Réécriture du problème de référence . . . . .</b>	<b>35</b>
3.1.1	Formulation variationnelle . . . . .	35

3.1.2	Equivalence avec le problème de référence . . . . .	37
<b>3.2</b>	<b>Approximations et discrétisation du problème . . . . .</b>	<b>38</b>
3.2.1	Approximation des solutions homogènes des équations de Helmholtz et des plaques . . . . .	39
3.2.1.1	Espace des vecteurs d'ondes admissibles en acoustique linéaire	39
3.2.1.2	Espace des vecteurs d'ondes admissibles en vibrations des plaques . . . . .	40
3.2.2	Solution particulière de la partie inhomogène des équations de Helmholtz et de Kirchhoff . . . . .	41
3.2.3	Discrétisation classique du problème . . . . .	41
<b>3.3</b>	<b>Convergence de la TVRC . . . . .</b>	<b>43</b>
3.3.1	$h$ - et $p$ -convergence : cas d'une onde plane . . . . .	43
<b>3.4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>45</b>

---

## 3.1 Réécriture du problème de référence

Le problème de référence de couplage vibroacoustique présenté au chapitre 1 peut être reformulé par la formulation faible introduite dans [Ladevèze, 1996]. Cette formulation fait intervenir des quantités de type puissance et permet de construire une approximation vérifiant exactement l'équation de la dynamique en régime forcé, les conditions aux limites étant vérifiées de façon faible. La continuité des champs au niveau des interfaces est directement prise en compte dans la formulation.

### 3.1.1 Formulation variationnelle

On note  $\mathcal{A}_{ad}^{(E)}$  l'espace des fonctions vérifiant de façon exacte l'équation de Helmholtz inhomogène (1.2) en tous points de la (sous-)cavité  $\Omega_E$ . Cet espace est noté  $\mathcal{A}_{ad,0}^{(E)}$  en absence de sources, et dans ce cas l'équation vérifiée est l'équation de Helmholtz homogène. De la même façon on note  $\mathcal{S}_{ad}^{(E)}$  et  $\mathcal{S}_{ad,0}^{(E)}$  les espaces des fonctions vérifiant de façon exacte l'équation des plaques inhomogène ou homogène (1.10) en tous points de la plaque  $S_E$ .

$$\mathcal{A}_{ad}^{(E)} = \left\{ p_E \text{ régulier sur } (\Omega_E) \mid \Delta p_E + k^2 p_E = f(\underline{x}), \forall \underline{x} \in \Omega_E \right\} \quad (3.1)$$

$$\mathcal{A}_{ad,0}^{(E)} = \left\{ p_E \text{ régulier sur } (\Omega_E) \mid \Delta p_E + k^2 p_E = 0, \forall \underline{x} \in \Omega_E \right\} \quad (3.2)$$

$$\mathcal{S}_{ad}^{(E)} = \left\{ w_E \text{ régulier sur } (S_E) \mid \Delta \Delta w_E - k_s^4 w_E = g(\underline{x}), \forall \underline{x} \in S_E \right\} \quad (3.3)$$

$$\mathcal{S}_{ad,0}^{(E)} = \left\{ w_E \text{ régulier sur } (S_E) \mid \Delta \Delta w_E - k_s^4 w_E = 0, \forall \underline{x} \in S_E \right\} \quad (3.4)$$

Le problème aux dérivées partielles avec conditions aux limites sur le bord (1.2)-(1.3)-(1.4)-(1.10)-(1.11)-(1.12)-(1.13) est équivalent au problème variationnel suivant

$$\begin{aligned}
 & \text{Trouver } (p_1, \dots, p_{N_\Omega}, w_1, \dots, w_{N_S}) \in \mathcal{A}_{ad}^{(1)} \times \dots \times \mathcal{A}_{ad}^{(N_\Omega)} \times \mathcal{S}_{ad}^{(1)} \times \dots \times \mathcal{S}_{ad}^{(N_S)}, \text{ tels que} \\
 & \Re \left\{ \sum_{\Omega_E} \int_{\partial_p \Omega_E} (p_E - p_{dE}) \overline{\mathcal{L}_v[\delta p_E]} ds + \sum_{\Omega_E} \int_{\partial_v \Omega_E} (\overline{\mathcal{L}_v[p_E] - v_{dE}}) \delta p_E ds \right. \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{\Omega_E} \int_{\partial_Z \Omega_E} \left( ((1 - Z_E \mathcal{L}_v)[p_E] - h_{dE}) \overline{\mathcal{L}_v[\delta p_E]} + (\overline{(\mathcal{L}_v - 1/Z_E)[p_E] + h_{dE}/Z_E}) \delta p_E \right) ds \\
 & \quad + \frac{1}{2} \sum_{\Gamma_{EE'}} \int_{\Gamma_{EE'}} \left( (p_E - p_{E'}) \overline{\mathcal{L}_v[\delta p_E - \delta p_{E'}]} + \overline{\mathcal{L}_v[p_E + p_{E'}]} (\delta p_E + \delta p_{E'}) \right) ds \\
 & \quad + \sum_{\Omega_E} \int_{\partial_{S_{E'}} \Omega_E} (\overline{\mathcal{L}_v[p_E] - i\omega w_{E'}}) \delta p_E ds - \sum_{S_E} \int_{\partial_w S_E} i\omega (\overline{w - w_{dE}}) \mathcal{L}_T[\delta w_E] ds \\
 & \quad + \sum_{S_E} \int_{\partial_\theta S_E} i\omega (\overline{\mathcal{L}_\theta[w_E] - \theta_{dE}}) \mathcal{L}_M[\delta w_E] ds - \sum_{S_E} \int_{\partial_T S_E} i\omega (\mathcal{L}_T[w_E] - T_{dE}) \overline{\delta w_E} ds \\
 & \quad + \sum_{S_E} \int_{\partial_M S_E} i\omega (\mathcal{L}_M[w_E] - M_{dE}) \overline{\mathcal{L}_\theta[\delta w_E]} ds + \sum_{S_E} \sum_{coins} i\omega \mathcal{L}_M^c[w_E] w_E \\
 & \quad \quad + \frac{1}{2} \sum_{\Upsilon_{EE'}} \int_{\Upsilon_{EE'}} i\omega \mathcal{L}_M[w_E - w_{E'}] \overline{\mathcal{L}_\theta[\delta w_E - \delta w_{E'}]} ds \\
 & \quad + \frac{1}{2} \sum_{\Upsilon_{EE'}} \int_{\Upsilon_{EE'}} i\omega \overline{w_E} \mathcal{L}_T[\delta w_E] + i\omega \overline{w_{E'}} \mathcal{L}_T[\delta w_{E'}] + i\omega \overline{\mathcal{L}_\theta[w_E + w_{E'}]} \mathcal{L}_M[\delta w_E + \delta w_{E'}] ds \\
 & \quad + \frac{1}{2} \sum_{\Upsilon_{EE'}} \int_{\Upsilon_{EE'}} i\omega (\overline{w_E - w_{E'}}) \mathcal{L}_T[\delta w_E - \delta w_{E'}] + i\omega \overline{\mathcal{L}_\theta[w_E + w_{E'}]} \mathcal{L}_M[\delta w_E + \delta w_{E'}] ds \\
 & \quad + \frac{1}{2} \sum_{\Upsilon_{EE'}} \int_{\Upsilon_{EE'}} i\omega \mathcal{L}_M[w_E - w_{E'}] \overline{\mathcal{L}_\theta[\delta w_E - \delta w_{E'}]} + i\omega \mathcal{L}_T[w_E + w_{E'}] (\overline{\delta w_E + \delta w_{E'}}) ds \left. \right\} = 0, \\
 & \forall (\delta p_1, \dots, \delta p_{N_\Omega}, \delta w_1, \dots, \delta w_{N_S}) \in \mathcal{A}_{ad,0}^{(1)} \times \dots \times \mathcal{A}_{ad,0}^{(N_\Omega)} \times \mathcal{S}_{ad,0}^{(1)} \times \dots \times \mathcal{S}_{ad,0}^{(N_S)} \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

où  $\overline{\square}$  et  $\Re \{\square\}$  désignent respectivement le conjugué et la partie réelle de la quantité complexe  $\square$ , et  $\mathcal{L}_v$ ,  $\mathcal{L}_\theta$ ,  $\mathcal{L}_M$  et  $\mathcal{L}_T$  désignent respectivement l'opérateur de vitesse, de rotation, de moment, et d'effort tranchant tels que définis dans le chapitre 1.

Cette formulation peut être vue comme un bilan de puissance sur les frontières de chacune des sous-cavités  $\Omega_E$ . Cette formulation est une formulation mixte non-symétrique, ce qui est un inconvénient. En revanche, elle permet de construire des approximations *a priori* indépendantes sur chacune des sous-cavités  $\Omega_E$ , car les conditions de continuité à l'interface y sont directement incorporées. Ceci lui confère une grande souplesse en comparaison avec les techniques utilisant des multiplicateurs de Lagrange discrétisés ou un terme de pénalisation pour assurer ces conditions. De plus cette formulation permet d'imposer sur une partie du bord de  $\Omega_E$ , qu'on notera  $\partial_{pv} \Omega_E$ , à la fois une pression et une vitesse normale, grâce à l'ajout d'un terme supplémentaire permettant de construire une approximation qui vérifie ces deux conditions au sens faible :

$$\Re \left\{ \frac{1}{2} \int_{\partial_{pv} \Omega_E} \left( (p_E - p_{dE}) \overline{\mathcal{L}_v[\delta p_E]} + (\overline{\mathcal{L}_v[p_E] - v_{dE}}) \delta p_E \right) ds \right\} \quad (3.6)$$

### 3.1.2 Equivalence avec le problème de référence

La démonstration d'équivalence de cette formulation avec le problème de référence a été faite dans le cadre général des vibrations forcées des structures dans [Ladevèze, 1996, Ladevèze *et al.*, 2000], et dans le cadre de l'acoustique linéaire [Riou *et al.*, 2008]. Dans le cas de la vibro-acoustique, le résultat est le suivant

■ **Théorème 1** *Si la solution du problème de référence (1.2)-(1.3)-(1.4)-(1.10)-(1.11)-(1.12)-(1.13) existe, et si  $\eta_a > 0$ ,  $\eta_s > 0$  et  $\kappa_s > 0$ , alors le problème variationnel (3.5) est équivalent au problème de référence.*

(i) En effet, si l'ensemble  $(p_1, \dots, p_{N_\Omega}, w_1, \dots, w_{N_S})$  vérifie le problème de référence (1.2)-(1.3)-(1.4)-(1.10)-(1.11)-(1.12)-(1.13), alors il vérifie le problème variationnel (3.5), car toutes les intégrales sont nulles séparément.

(ii) Par ailleurs, en notant  $u = (p_1, \dots, p_{N_\Omega}, w_1, \dots, w_{N_S})$  la solution du problème, la formulation variationnelle peut se réécrire sous la forme condensée :

trouver  $u \in \mathcal{A}_{ad}^{(1)} \times \dots \times \mathcal{A}_{ad}^{(N_\Omega)} \times \mathcal{S}_{ad}^{(1)} \times \dots \times \mathcal{S}_{ad}^{(N_S)}$  tel que :

$$a(u, \delta u) = L(\delta u), \quad \forall \delta u \in \mathcal{A}_{ad,0}^{(1)} \times \dots \times \mathcal{A}_{ad,0}^{(N_\Omega)} \times \mathcal{S}_{ad,0}^{(1)} \times \dots \times \mathcal{S}_{ad,0}^{(N_S)} \quad (3.7)$$

où  $a$  est une forme bilinéaire et  $L$  une forme linéaire.

On considère deux solutions distinctes de (3.5)  $u$  et  $u'$ . On note  $\tilde{u} = (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{N_\Omega}, \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_{N_S})$  leur différence. On obtient alors :

$$a(\tilde{u}, \tilde{u}) = 0 \quad (3.8)$$

Soit encore, dans la mesure où on impose deux conditions limites sur les bords des plaques une en rotation (ou moment) et une en translation (ou effort tranchant) :

$$a(\tilde{u}, \tilde{u}) = \Re \left\{ \sum_{E=1, N_\Omega} \oint_{\partial\Omega_E} \tilde{p}_E \overline{\mathcal{L}_v[\tilde{p}_E]} ds - \sum_{E=1, N_\Omega} \int_{\partial_Z\Omega_E} \left( Z_E \mathcal{L}_v[\tilde{p}_E] \overline{\mathcal{L}_v[\tilde{p}_E]} + \frac{1}{Z_E} \tilde{p}_E \overline{\tilde{p}_E} \right) ds \right. \\ \left. + \sum_{E=1, N_S} \oint_{\partial S_E} i\omega \left( \overline{\mathcal{L}_\theta[\tilde{w}_E]} \mathcal{L}_M[\tilde{w}_E] - \mathcal{L}_T[\tilde{w}_E] \overline{\tilde{w}_E} \right) ds - \sum_{E=1, N_\Omega} \int_{\partial_{S'_E}\Omega_E} i\omega \overline{\tilde{w}_{E'}} \tilde{p}_E ds \right\} = 0 \quad (3.9)$$

L'application de la formule de Stokes sur chacun des contours  $\partial\Omega_E$  et  $\partial S_E$  nous conduit à

$$a(\tilde{u}, \tilde{u}) = \Re \left\{ \sum_{E=1, N_\Omega} -\frac{i}{\rho_0 \omega} \int_{\Omega_E} \left( \nabla \tilde{p}_E \cdot (\nabla \overline{\tilde{p}_E}) + \tilde{p}_E \Delta \overline{\tilde{p}_E} \right) d\Omega - \sum_{E=1, N_\Omega} \int_{\partial_{S'_E}\Omega_E} i\omega \overline{\tilde{w}_{E'}} \tilde{p}_E ds \right. \\ \left. - \sum_{E=1, N_\Omega} \int_{\partial_Z\Omega_E} \left( Z_E \mathcal{L}_v[\tilde{p}_E] \overline{\mathcal{L}_v[\tilde{p}_E]} + \frac{1}{Z_E} \tilde{p}_E \overline{\tilde{p}_E} \right) ds \right. \\ \left. + \sum_{E=1, N_S} \int_{S_E} i\omega \left( \text{Tr} \left( \frac{h^3}{12} \underline{\underline{K}}_{CP} \underline{\underline{\varepsilon}}[\tilde{w}_E] \underline{\underline{\varepsilon}}[\overline{\tilde{w}_E}] \right) - \left( \text{div} \text{div} \frac{h^3}{12} \underline{\underline{K}}_{CP} \underline{\underline{\mathcal{L}}}[\tilde{w}_E] \right) \overline{\tilde{w}_E} \right) d\Omega \right\} = 0 \quad (3.10)$$

En tenant compte de l'équation de Helmholtz (1.2) et l'équation des plaques en flexion (1.10), cette expression devient :

$$\begin{aligned}
 a(\tilde{u}, \tilde{u}) = \Re \left\{ \sum_{E=1, N_\Omega} -\frac{i}{\rho_0 \omega} \int_{\Omega_E} \left( \nabla \tilde{p}_E \cdot (\nabla \tilde{p}_E) - \bar{k}^2 \tilde{p}_E \tilde{p}_E \right) d\Omega + \sum_{E=1, N_\Omega} \int_{\partial_{S'_E} \Omega_E} i\omega \overline{\tilde{w}_E} \tilde{p}_E ds \right. \\
 \left. - \sum_{E=1, N_\Omega} \int_{\partial_{Z\Omega_E}} \left( Z_E \mathcal{L}_v[\tilde{p}_E] \overline{\mathcal{L}_v[\tilde{p}_E]} + \frac{1}{Z_E} \tilde{p}_E \tilde{p}_E \right) ds \right. \\
 \left. + \sum_{E=1, N_S} \int_{S_E} i\omega \left( \text{Tr} \left( \frac{h^3}{12} \underline{\underline{K}}_{CP} \underline{\underline{\varepsilon}}[\tilde{w}_E] \underline{\underline{\varepsilon}}[\tilde{w}_E] \right) - (\rho_S \omega^2 h \tilde{w}_E - \tilde{p}_E) \overline{\tilde{w}_E} \right) d\Omega \right\} = 0 \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

soit encore :

$$\begin{aligned}
 a(\tilde{u}, \tilde{u}) = \Re \left\{ \sum_{E=1, N_\Omega} -\frac{i}{\rho_0 \omega} \int_{\Omega_E} \left( \nabla \tilde{p}_E \cdot (\nabla \tilde{p}_E)^* - \bar{k}^2 \tilde{p}_E \tilde{p}_E \right) d\Omega \right. \\
 \left. - \sum_{E=1, N_\Omega} \int_{\partial_{Z\Omega_E}} \left( Z_E \mathcal{L}_v[\tilde{p}_E] \overline{\mathcal{L}_v[\tilde{p}_E]} + \frac{1}{Z_E} \tilde{p}_E \tilde{p}_E \right) ds \right. \\
 \left. + \sum_{E=1, N_S} \int_{S_E} i\omega \left( \text{Tr} \left( \frac{h^3}{12} \underline{\underline{K}}_{CP} \underline{\underline{\varepsilon}}[\tilde{w}_E] \underline{\underline{\varepsilon}}[\tilde{w}_E] \right) - \rho_S \omega^2 h \tilde{w}_E \right) \overline{\tilde{w}_E} d\Omega \right\} = 0 \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

En explicitant la partie réelle de  $a(\tilde{u}, \tilde{u})$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 - \sum_{E=1, N_\Omega} \int_{\partial_{Z\Omega_E}} \left( \frac{\Re\{Z_E\}}{\rho_0^2 \omega^2} (\nabla \tilde{p}_E)^T \cdot \underline{n}_E (\nabla \tilde{p}_E)^* \cdot \underline{n}_E + \frac{1}{\Re\{Z_E\}} \tilde{p}_E \tilde{p}_E \right) ds \\
 - \sum_{E=1, N_\Omega} \frac{2\eta_a k_{0,a}^2}{\rho_0 \omega} \int_{\Omega_E} \tilde{p}_E \tilde{p}_E d\Omega - \sum_{E=1, N_S} \int_{S_E} \eta_S \text{Tr} \left( \frac{h^3}{12} \underline{\underline{K}}_{CP,0} \underline{\underline{\varepsilon}}[\tilde{w}_E] \underline{\underline{\varepsilon}}[\tilde{w}_E] \right) + \kappa_S \rho_{0,S} \omega^2 h \tilde{w}_E \overline{\tilde{w}_E} ds = 0 \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

Cette dernière expression entraîne premièrement que  $\tilde{p}_E = 0$  et  $(\nabla \tilde{p}_E)^T \cdot \underline{n}_E = 0$  sur la frontière  $\partial_{Z\Omega_E}$ . De plus, si le coefficient d'amortissement  $\eta_a$  est non nul alors le champ  $\tilde{p}$  est nul. Enfin si les coefficients d'amortissement  $\eta_S$  et  $\kappa_S$  sont non nuls alors le champ  $\tilde{w}_E$  est nul. On vient de montrer que si  $\tilde{u}$  vérifie la formulation initiale de vibro-acoustique pour des conditions homogènes avec des coefficients d'amortissement hystérétique non nuls alors :

$$\begin{cases} \tilde{p}_E = 0 \text{ sur } \Omega_E \\ \tilde{w}_E = 0 \text{ sur } S_E \end{cases} \quad (3.14)$$

ce qui prouve l'unicité du problème de vibro-acoustique 3.5.

## 3.2 Approximations et discrétisation du problème

L'approximation des champs vibratoires est décomposée en une somme d'une solution particulière (notée avec un exposant  $p$ ) et d'un solution homogène (notée avec un exposant  $h$ ). Cette dernière est cherchée sur une base d'ondes planes se propageant dans toutes les directions.

$$p_E(\underline{x}) = p_E^h(\underline{x}) + p_E^p(\underline{x}) \quad w_E(\underline{x}) = w_E^h(\underline{x}) + w_E^p(\underline{x}) \quad (3.15)$$

où  $p_E^h(\underline{x}) \in \mathcal{A}_{ad,0}^{(E)}$  et  $w_E^h(\underline{x}) \in \mathcal{S}_{ad,0}^{(E)}$ .



### 3.2.1 Approximation des solutions homogènes des équations de Helmholtz et des plaques

La TVRC considère que la solution homogène peut être localement décrite par une répartition intégrale de modes locaux appelés rayons de vibration.

Les solutions du problème d'acoustique  $p_E^h(\underline{x})$  et celle du problème de plaque  $w_E^h(\underline{x})$  sont donc recherchées sous la forme

$$p_E^h(\underline{x}) = \int_{C_a^{(E)}} A_E^a(\underline{k}_E^a) e^{i\underline{k}_E^a \cdot (\underline{x} - \underline{x}_E)} dC_a^{(E)} \quad w_E^h(\underline{x}) = \int_{C_s^{(E)}} A_E^s(\underline{k}_E^s) e^{i\underline{k}_E^s \cdot (\underline{x} - \underline{x}_E)} dC_s^{(E)} \quad (3.16)$$

où  $\underline{k}_E^a$  désigne le vecteur d'onde associé aux ondes acoustiques et  $\underline{k}_E^s$  aux ondes élastiques,  $\underline{x}_E$  un point (en général son centre) à l'intérieur de la sous-structure  $E$ ,  $A_E^\square$  est la distribution des amplitudes des rayons complexes aussi appelées amplitudes généralisées, et  $C_\square^E$  la surface décrite par l'ensemble des vecteurs d'onde quand ces derniers parcourent toutes les directions de l'espace. L'expression de telle surface dans le cadre de problème de couplage vibro-acoustique est présentée dans les prochains paragraphes. La question de la complétude de l'espace peut être posée. On retrouve dans [Melenk, 1995] quelques éléments de réponse à ce sujet, la forme des sous domaines serait néanmoins limitée à des parties étoilées de l'espace.

#### 3.2.1.1 Espace des vecteurs d'ondes admissibles en acoustique linéaire

Dans le cas de l'acoustique, pour appartenir à  $\mathcal{A}_{ad,0}^{(E)}$ , ces fonctions doivent satisfaire l'équation de Helmholtz homogène, ce qui donne une condition d'admissibilité sur  $\underline{k}_E^a$ . En injectant (3.16) dans l'équation homogène associée à (1.2), on conclut à l'existence de 2 familles de rayons possibles dont deux exemples sont montrés sur la figure 3.1 :

- les rayons propagatifs qui sont des ondes planes se propageant dans une direction  $\theta$  donnée. Pour un problème 2D défini dans le plan  $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$ , le vecteur d'onde s'écrit :

$$\underline{k}_E^{a,p} = k_a (\cos(\theta) \underline{e}_x + \sin(\theta) \underline{e}_y) \quad (3.17)$$

avec  $\theta \in [0, 2\pi[$ . Dans les cadres des problèmes d'acoustique bidimensionnelle la distribution des amplitudes associée aux rayons propagatifs est définie sur le cercle unité.

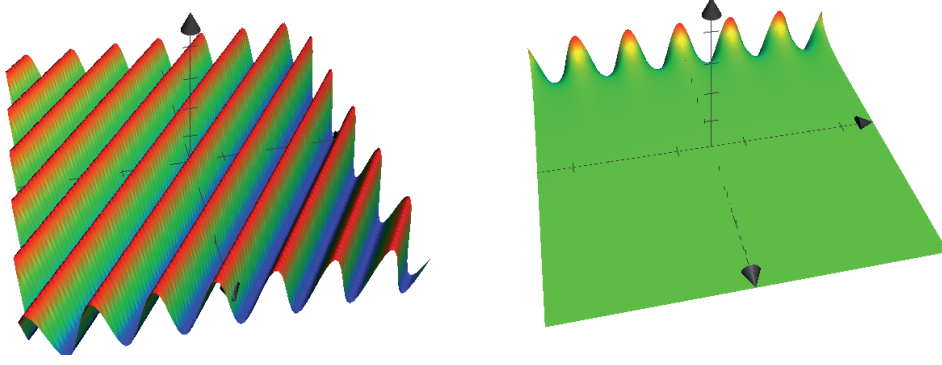
- les rayons évanescents de bord, ces ondes se caractérisent par le fait qu'elles ont une longueur d'onde plus courte que les ondes propagatives. Ils ne sont pas pris en compte dans un problème d'acoustique pur. En revanche, ils sont nécessaires dans le traitement des problèmes de couplage vibroacoustique car le couplage fait intervenir des équations d'ordre 4. Une forme générale du vecteur d'onde est :

$$\underline{k}_E^{a,e} = -ik_a (\cosh(\theta) \underline{n} + \sinh(\theta) \underline{\tau}) \quad (3.18)$$

avec  $\theta \in [0, 2\pi[$  et  $(\underline{n}, \underline{\tau})$  la base formée par le vecteur normal et le vecteur tangent du bord de la plaque. Dans la pratique on se restreint à l'utilisation de rayons évanescents ayant un vecteur d'onde qui s'écrit :

$$\underline{k}_E^{a,e} = -ik_a \sqrt{1 + \left(\frac{k'}{k_a} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2} \underline{n} + k' \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \underline{\tau} \quad (3.19)$$

avec  $k'$  le nombre d'onde maximum atteint par les ondes de bord. La distribution des amplitudes associée aux rayons évanescents est donc définie sur le cercle unité.



**Figure 3.1** Exemple de fonctions de forme acoustique : rayon propagatif (à gauche) et rayon évanescent (à droite).

La solution homogène d'un problème d'acoustique bidimensionnel s'écrit donc :

$$p_E^h(\underline{x}) = \int_0^{2\pi} A_E^{a,p}(\underline{k}_E^{a,p}) e^{i\underline{k}_E^{a,p} \cdot \underline{x}} dC_{a,p}^{(E)} + \int_0^{2\pi} A_E^{a,e}(\underline{k}_E^{a,e}) e^{i\underline{k}_E^{a,e} \cdot \underline{x}} dC_{a,e}^{(E)} \quad (3.20)$$

### 3.2.1.2 Espace des vecteurs d'ondes admissibles en vibrations des plaques

Dans le cas de vibrations de plaques, pour appartenir à  $\mathcal{S}_{ad,0}^{(E)}$ , ces fonctions doivent satisfaire l'équation homogène des plaques, ce qui donne une condition d'admissibilité sur  $\underline{k}_E^s$ . En injectant (3.16) dans l'équation homogène associée à (1.10), on conclut à l'existence de 3 familles de rayons possibles :

- les rayons propagatifs qui sont des ondes planes se propageant dans une direction  $\theta$  donnée. Le vecteur d'onde s'écrit :

$$\underline{k}_E^{s,p} = k_s (\cos(\theta) \underline{\tau}_1 + \sin(\theta) \underline{\tau}_2) \quad (3.21)$$

avec  $\theta \in [0, 2\pi[$  et  $(\underline{\tau}_1, \underline{\tau}_2)$  une base formée par deux vecteurs orthogonaux du plan de la plaque. La distribution des amplitudes associée aux rayons propagatifs est donc définie sur le cercle unité.

- les rayons évanescents de bord, ces ondes se caractérisent par le fait qu'elles se propagent uniquement le long du bord. Une forme générale du vecteur d'onde est :

$$\underline{k}_E^{s,e} = k_s (-i \cosh(\theta) \underline{n} + \sinh(\theta) \underline{\tau}) \quad (3.22)$$

avec  $\theta \in [0, 2\pi[$  et  $(\underline{n}, \underline{\tau})$  la base formée par le vecteur normal et le vecteur tangent du bord de la plaque. Dans la pratique on se restreint à l'utilisation de rayons évanescents ayant un vecteur d'onde qui s'écrit :

$$\underline{k}_E^{s,e} = -ik_s \sqrt{1 + \left(\frac{k'}{k_s} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2} \underline{n} + k' \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \underline{\tau} \quad (3.23)$$

avec  $k'$  le nombre d'onde maximum atteint par les ondes de bord (on considère généralement  $k' = k_s$ ). La distribution des amplitudes associée aux rayons évanescents est donc définie sur le cercle unité. Pour ce type d'ondes l'origine du repère doit être prise sur le bord en question.

- les rayons évanescents de coin, ce type de rayon n'est pas utilisé en pratique, sauf si le chargement extérieur est localisé sur un coin.

La solution homogène d'un problème de plaque s'écrit donc :

$$w_E^h(\underline{x}) = \int_0^{2\pi} A_E^{s,p}(\underline{k}_E^{s,p}) e^{i\underline{k}_E^{s,p} \cdot \underline{x}} dC_{s,p}^{(E)} + \int_0^{2\pi} A_E^{s,e}(\underline{k}_E^{s,e}) e^{i\underline{k}_E^{s,e} \cdot \underline{x}} dC_{s,e}^{(E)} \quad (3.24)$$

### 3.2.2 Solution particulière de la partie inhomogène des équations de Helmholtz et de Kirchhoff

Le traitement d'une source ponctuelle dans l'équation de Helmholtz inhomogène ne pose pas de difficultés particulières. Il suffit de rajouter une solution particulière dans l'approximation. Pour un problème de dimension  $d$ , cette fonction s'écrit

$$p^p(\underline{x}) = -\frac{\rho_0 \omega}{4^{d-1}} q_d H_0(k^a \|\underline{x} - \underline{x}_{q_d}\|) \quad (3.25)$$

où  $H_0$  désigne la fonction de Hankel de première espèce d'ordre 0. Cette fonction représente le champ rayonné par la source  $q_d$  dans un milieu infini. Une telle procédure a déjà été présentée dans le cadre des vibrations des plaques pour la prise en compte des efforts ponctuels [Arnaud, 2000, Riou, 2004], et pour la prise en compte des hétérogénéités structurales [Ladevèze *et al.*, 2003a]. Dans le cas de plaques minces en flexion, la solution particulière utilisée pour un chargement ponctuel normal à la surface est :

$$w^p(\underline{x}) = -\frac{-i}{k^s 2D} q_d (H_0(k^s \|\underline{x} - \underline{x}_{q_d}\|) - H_0(ik^s \|\underline{x} - \underline{x}_{q_d}\|)) \quad (3.26)$$

Pour traiter le cas d'un chargement surfacique dans l'équation des plaques, on considère une solution particulière proportionnelle au champ de pression associé à la fonction à une onde plane de vecteur d'onde  $\underline{k}_E^a$ .

$$w^p(\underline{x}) = \frac{e^{i\underline{k}_E^a \cdot \underline{x}}}{D[(\underline{k}_E^a \cdot \underline{\tau}_1)^4 + 2(\underline{k}_E^a \cdot \underline{\tau}_1)^2(\underline{k}_E^a \cdot \underline{\tau}_2)^2 + (\underline{k}_E^a \cdot \underline{\tau}_2)^4] - \underline{k}_E^a{}^4} \quad (3.27)$$

Pour un problème en milieu fermé, les solutions particulières utilisées ne vérifient pas *a priori* les conditions aux limites imposées. Il convient donc de modifier ces dernières de sorte que l'ajout d'une solution particulière à l'approximation du problème homogène associé conduise à la solution recherchée.

### 3.2.3 Discrétisation classique du problème

L'expression (3.16) présente deux échelles : une échelle lente constituée par la distribution des amplitudes  $A_E(\underline{k}_E)$  qui varie *a priori* lentement quand le vecteur d'onde  $\underline{k}_E$  varie, ce qui en d'autres termes signifie que cette distribution oscille lentement, et une échelle rapide constituée par le terme  $e^{i\underline{k}_E \cdot \underline{x}}$  caractérisant le phénomène vibratoire et qui varie rapidement avec  $\underline{k}_E$  et la variable spatiale  $\underline{x}$ . Cette échelle est prise en compte de façon analytique.

Construire une approximation de dimension finie revient à discrétiser la distribution inconnue des amplitudes  $A_E$ . Ne sachant pas à l'avance quelles sont les directions qui comptent dans la solution, la TVRC choisit de faire une représentation intégrale de ces directions afin

de toutes les prendre en compte. Ainsi, la fonction  $A_E^\square$  est considérée constante par morceaux, l'approximation construite s'écrit

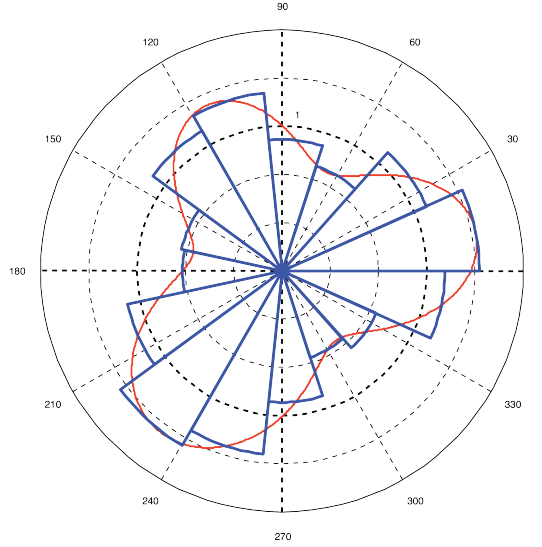
$$p_E^h(\underline{x}) = \sum_{\square=p,e} \int_0^{2\pi} A_E^{a,\square}(\underline{k}_E^{a,\square}) e^{i\underline{k}_E^{a,\square} \cdot \underline{x}} dC_{a,\square}^{(E)} = \sum_{\square=p,e} \sum_{l=1}^{L_E} a_{l,\square}^{(E)} \phi_{l,a,\square}^{(E)}(\underline{x}) \quad (3.28)$$

$$w_E^h(\underline{x}) = \sum_{\square=p,e} \int_0^{2\pi} A_E^{s,\square}(\underline{k}_E^{s,\square}) e^{i\underline{k}_E^{s,\square} \cdot \underline{x}} dC_{s,\square}^{(E)} = \sum_{\square=p,e} \sum_{l=1}^{L_E} a_{l,\square}^{(E)} \phi_{l,s,\square}^{(E)}(\underline{x}) \quad (3.29)$$

Les fonctions de forme présentes dans les expressions (3.28) et (3.29) sont appelées faisceaux de vibration et peuvent s'écrire en fonction de la variable angulaire  $\theta$

$$\phi_{l,\square}^{(E)}(\underline{x}) = \int_{\theta_{l-\frac{1}{2}}}^{\theta_{l+\frac{1}{2}}} e^{i\underline{k}_E^\square(\theta) \cdot \underline{x}} d\theta \quad (3.30)$$

Une telle discrétisation dans le cas d'un problème d'acoustique 2D est représentée sur la figure 3.2 : le portrait d'amplitude est approximé sur quinze secteurs angulaires, et dans chacun de ces secteurs la distribution d'amplitude est approximé par la valeur constante  $a_l^{(E)}$ .



**Figure 3.2** Discrétisation angulaire de la distribution des amplitudes  $A_E^\square$  (voir (3.28)) des rayons propagatifs d'ordre 0 pour un problème 2D.

Pour construire le modèle numérique basé sur l'approximation (3.28), nous introduisons la notation algébrique suivante :

$$p_E^h(\underline{x}) = \mathbf{a}_{E,a}^T \cdot \underline{\phi}_{E,a}(\underline{x}) \quad w_E^h(\underline{x}) = \mathbf{a}_{E,s}^T \cdot \underline{\phi}_{E,s}(\underline{x}) \quad (3.31)$$

où  $\underline{\phi}_{E,\square} = [\phi_{1,\square}^{(E)} \ \phi_{2,\square}^{(E)} \ \cdots \ \phi_{L_E,\square}^{(E)}]^T$  est le vecteur des fonctions de forme  $\phi_{l,\square}^{(E)}$ , et  $\mathbf{a}_{E,\square}$  le vecteur des amplitudes généralisées  $a_{l,\square}^{(E)}$  associées.

En injectant les expressions (3.31) dans la formulation variationnelle (3.5), on aboutit à la résolution d'un système linéaire de la forme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1,1}^a & \cdots & \mathbf{K}_{1,n}^a & \mathbf{K}_{1,1}^{as} & \cdots & \mathbf{K}_{1,m}^{as} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_{n,1}^a & \cdots & \mathbf{K}_{n,n}^a & \mathbf{K}_{n,1}^{as} & \cdots & \mathbf{K}_{n,m}^{as} \\ \mathbf{K}_{1,1}^{sa} & \cdots & \mathbf{K}_{1,n}^{sa} & \mathbf{K}_{1,1}^s & \cdots & \mathbf{K}_{1,m}^a \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_{m,1}^{sa} & \cdots & \mathbf{K}_{m,n}^{sa} & \mathbf{K}_{m,1}^s & \cdots & \mathbf{K}_{m,m}^s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1,a} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{n,a} \\ \mathbf{a}_{1,s} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{1,a} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{n,a} \\ \mathbf{f}_{1,s} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{m,s} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Puisque les fonctions de forme sont distribuées de façon continue dans les sous-cavités  $\Omega_E$ , les blocs  $\mathbf{K}_{EE}$  sont des matrices pleines. Toutefois, quand le nombre de sous-cavités augmente, les blocs de couplage  $\mathbf{K}_{EE'}$  sont des matrices nulles dès que les domaines  $\Omega_E$  et  $\Omega_{E'}$  n'ont pas de frontière commune ;

À ce niveau, un certain nombre de remarques peuvent être faites :

- puisque la formulation variationnelle n'est pas symétrique, le système (3.32) est non-symétrique ;
- la construction de ce système matriciel fait intervenir des intégrales du type :

$$\int_{\partial\Omega_E} p(\underline{x}) \overline{v(\underline{x})} ds = \int_{\partial\Omega_E} \frac{i}{\rho\omega} \phi_i^{(E)} \cdot (\nabla\phi_j^{(E)} \cdot \underline{n}_E)^* ds$$

Pour les faisceaux il n'existe pas d'intégration purement analytique. Pour éviter toutefois des intégrations numériques qui peuvent s'avérer coûteuses, particulièrement aux fréquences élevées, il a été proposé dans [Ladevèze et Riou, 2005] une technique *ad hoc* d'intégration semi-analytique. Cette technique consiste en une discrétisation angulaire du support  $\Delta\theta_l^{(E)}$  du faisceau  $\phi_l^{(E)}$  en un certain nombre de pinceaux angulaires, puis une linéarisation du vecteur d'onde sur chacun des pinceaux. L'intégration analytique sur chaque pinceau est alors possible. Ce type de schéma est toutefois limité aux bords droits, et le traitement de bord courbe passe pour l'instant par une technique d'intégration numérique. Cet aspect purement numérique de la méthode est présenté dans les prochains chapitres.

- contrairement à la FEM, le modèle matriciel issu de la TVRC dépend de la fréquence  $\omega$ , car il est construit à partir de fonctions dépendant explicitement de la fréquence. Il a été proposé dans [Ladevèze *et al.*, 2003b] une stratégie permettant d'évaluer la réponse sur une bande fréquentielle sans avoir à faire de calcul pour chaque fréquence.

### 3.3 Convergence de la TVRC

Cette section présente les résultats sur la convergence de la TVRC obtenus dans les précédents travaux de recherche [Sourcis, 2009].

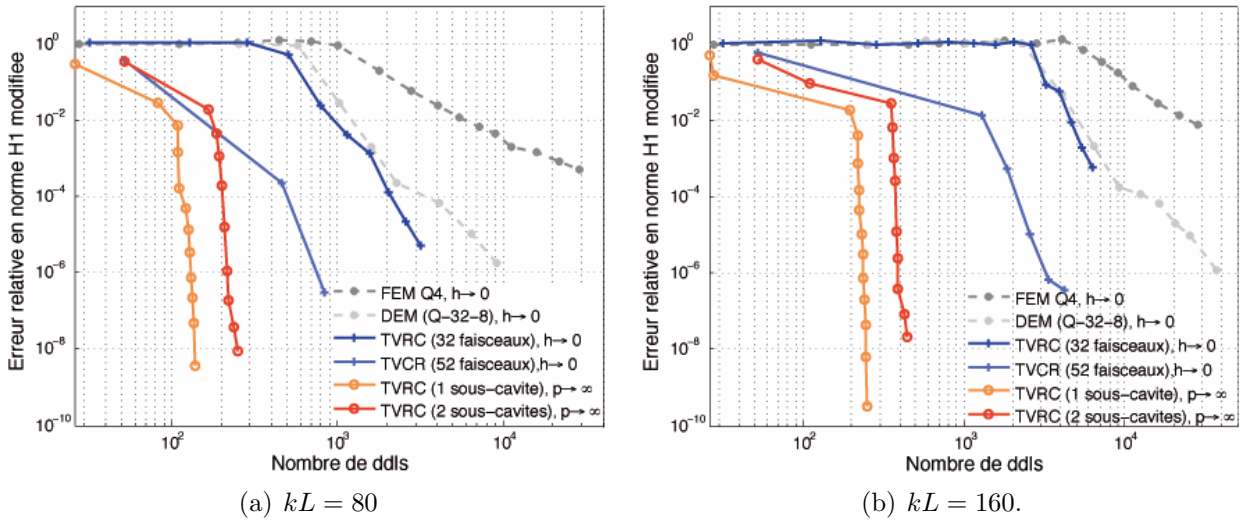
#### 3.3.1 *h*- et *p*-convergence : cas d'une onde plane

Afin d'illustrer les propriétés de convergence de la TVRC, considérons tout d'abord un cas simple. Soit un domaine acoustique carré  $\Omega$  de côté  $L$  dont le bord est soumis à une condition de Robin avec  $Z = \rho_0 c_0$  (impédance caractéristique du milieu de propagation) et une excitation imposée  $h_d$  telle que la solution exacte soit  $p_{ex}(\underline{x}) = e^{i\mathbf{k}_{ex} \cdot \underline{x}}$  avec  $\mathbf{k}_{ex} = k[\cos(\theta_{ex}) \ \sin(\theta_{ex})]^T$ , ce qui correspond à une onde plane se propageant dans la direction  $\theta_{ex}$ . Ce cas académique est souvent utilisé pour tester et illustrer les performances d'une

méthode [Melenk et Babuška, 1997, Farhat *et al.*, 2001, Strouboulis *et al.*, 2006b]. Ici, ce cas est traité pour  $\theta_{ex} = 32^\circ$  et pour deux fréquences telles que  $kL = 80$  (soit environ 13 longueurs d'onde sur la cavité considérée) et  $kL = 160$  (soit environ 25 longueurs d'onde) qui sont des fréquences assez élevées qui nous placent donc dans le cadre des moyennes fréquences. Deux types d'approche sont considérés. La première consiste à fixer le nombre de faisceaux et à diminuer la taille des sous-cavités (ou éléments) ce que nous appelons  $h$ -méthode. Ici, étant donnée la géométrie cette subdivision se fait de manière régulière en considérant des carrés de taille  $h$  tels que  $L/h = n, n \in \mathbb{N}$ . La deuxième consiste à fixer la taille des éléments  $h$  et à augmenter le nombre de faisceaux de vibration, ce que nous nommons  $p$ -méthode. La solution exacte étant connue, il est donc possible de calculer l'erreur exacte. La norme choisie ici pour mesurer l'erreur relative est celle introduite dans [Farhat *et al.*, 2004b]. Elle est constituée d'une norme  $H^1(\Omega)$  par morceau, avec un terme prenant en compte les discontinuités éventuelles des champs au niveau des interfaces  $\Gamma_{E-E'}$  en norme  $L^2$ , soit

$$\|p - p_{ex}\| = \sqrt{\|p - p_{ex}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \sum_{E' < E} \|p_E - p_{E'}\|_{L^2(\Gamma_{E-E'})}^2} \quad (3.33)$$

Sur la figure 3.3 sont tracées les courbes de convergence en fonction du nombre de degrés de liberté pour la TVRC dans les deux versions  $h$  et  $p$ , pour la FEM utilisant des éléments  $Q4$  qui est une  $h$ -méthode, et pour la Discontinuous Enrichment Method (ici les résultats sont extraits de [Farhat *et al.*, 2004b]) qui utilise aussi une base d'ondes planes, mais qui par son traitement particulier des interfaces est plutôt une  $h$ -méthode.



**Figure 3.3** Approximation d'une onde plane : erreur relative en norme  $H^1$  modifiée commise par la TVRC, la FEM et la DEM en fonction du nombre de degrés de liberté.

A partir de ces deux figures plusieurs remarques peuvent être faites :

- comparée à une approche de type  $h$ , une approche de type  $p$  permet d'obtenir des niveaux de précision très grands avec peu de ddl. Cette caractéristique est d'autant plus vraie quand la fréquence augmente ;
- la FEM doit employer un nombre de ddl très important pour lutter contre l'effet de pollution : par exemple pour la fréquence  $kL = 160$  le nombre d'éléments à employer pour garder le facteur  $k^2 h^3$  inférieur à 1 est de 1000 éléments par côté. Pour la DEM et la

TVRC (dans sa version  $h$ ), l'effet de pollution est grandement limité grâce aux fonctions oscillantes utilisées. Cette limitation est d'autant plus importante que le nombre de fonctions est grand, comme le montre la comparaison entre la TVRC utilisant 32 et 52 faisceaux par sous-cavité ;

- la TVRC, dans sa version  $h$  avec 32 faisceaux par sous-cavité, exhibe un taux de convergence similaire à la DEM utilisant des éléments  $Q - 32 - 8$  (quadrangles avec 32 ondes planes propagatives et 8 multiplicateurs de Lagrange par bord).

Ce test numérique est en accord avec les résultats démontrés dans [Melenk, 1995] : la  $p$ -convergence est exponentielle tandis que la  $h$ -convergence est beaucoup plus lente . Ceci explique pourquoi la TVRC produit des solutions précises avec des modèles numériques de petite taille.

### 3.4 Conclusion

Ce chapitre a présenté la TVRC appliquée aux problèmes de couplage vibro-acoustique, et a rappelé les principales propriétés de la TVRC. Après avoir adapté la formulation initialement proposée dans [Ladevèze, 1996] à ce type de problème. L'approximation utilisée par la TVRC est présentée, la solution homogène comme une répartition intégrale de différents types d'ondes (planes, évanescentes...) vérifiant toutes exactement l'équation d'équilibre en tous points du (sous-)système. L'approximation est *a priori* indépendante par sous-domaine. De plus, contrairement aux autres méthodes ondulatoire, la continuité des champs au niveau des interfaces entre sous-structures est directement incorporée dans la formulation variationnelle. L'inconnue est l'ensemble des portraits d'amplitude associés à chacun de ces types d'ondes dans chacun des sous-systèmes. Ces derniers nécessitent une discrétisation relativement grossière en comparaison de la discrétisation nécessaire pour décrire correctement le champ de pression ou de déplacement. Cela permet d'obtenir des solutions de qualité avec un faible nombre d'inconnues.





---

# La TVRC-Fourier, appliquée à l’acoustique bi-dimensionnelle

CE CHAPITRE est consacré à la description de l’approximation fondée sur les séries de Fourier ainsi qu’à ses propriétés. Construire une approximation de dimension finie revient à discrétiser la distribution inconnue des amplitudes  $A_E$  (voir équations (3.28) et (3.29)). Ne sachant pas à l’avance quelles sont les directions qui comptent dans la solution, la TVRC choisit de faire une représentation intégrale de ces directions afin de toutes les considérer. L’approche développée dans [Ladevèze, 1996, Ladevèze *et al.*, 2000, Rouch et Ladevèze, 2003, Riou *et al.*, 2003, Ladevèze et Riou, 2005, Sourcis, 2009] consiste à discrétiser cette fonction en polynôme par morceaux. Cette approche est celle utilisée dans la TVRC depuis ses débuts. Dans ce chapitre, une nouvelle approche est développée. Elle consiste à discrétiser le portrait d’amplitude en série de Fourier, c’est donc le spectre du portrait d’amplitude qui est calculé. Cette approximation conserve les propriétés de convergence classique de la TVRC. La mise en oeuvre et l’étude de cette approche aboutissent d’une part à la mise en place d’un critère efficace pour déterminer la discrétisation optimale à un niveau d’erreur donné. Et d’autre part à l’élaboration d’une technique de régularisation qui permet d’obtenir un portrait d’amplitude stable avec la discrétisation. Ce portrait d’amplitude régularisé permet d’identifier les flux d’énergie sans opération de post-processing coûteuse. Ce chapitre illustre à travers plusieurs exemples la démarche mise en place.

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>L’approximation de type Fourier</b>	<b>49</b>
<b>4.2</b>	<b>Mise en oeuvre numérique</b>	<b>51</b>
4.2.1	Cas d’un bord droit : méthode semi-analytique	51
4.2.2	Cas d’un bord courbe : méthode numérique	52
4.2.3	Influence des paramètres d’intégration	52
4.2.4	Méthode numérique avec approximation asymptotique	53

<b>4.3</b>	<b>Propriétés de convergence du champ de pression</b>	<b>54</b>
4.3.1	Convergence de la TVRC-Fourier	54
4.3.2	Influence de la sous-structuration	55
<b>4.4</b>	<b>Vers un critère énergétique pour le choix du nombre de degrés de liberté</b>	<b>56</b>
<b>4.5</b>	<b>Etude de la convergence du portrait d'amplitude</b>	<b>57</b>
4.5.1	Non convergence paradoxale du portrait d'amplitude	57
4.5.2	Convergence du spectre, et régularisation du portrait d'amplitude	59
<b>4.6</b>	<b>Application à une cavité acoustique complexe</b>	<b>60</b>
<b>4.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>61</b>

---

## 4.1 L'approximation de type Fourier

L'expression (3.16) présente deux échelles : une échelle lente constituée par la distribution des amplitudes  $A_E(\underline{k}_E)$  qui varie *a priori* lentement quand le vecteur d'onde  $\underline{k}_E$  varie, ce qui, en d'autres termes, signifie que cette distribution oscille lentement, et une échelle rapide constituée par le terme  $e^{i\underline{k}_E \cdot \underline{x}}$  caractérisant le phénomène vibratoire et qui varie rapidement avec  $\underline{k}_E$  et la variable spatiale  $\underline{x}$ . Cette échelle est prise en compte de façon analytique.

Construire une approximation de dimension finie revient à discrétiser la distribution inconnue des amplitudes  $A_E$ . Ne sachant pas à l'avance quelles sont les directions qui comptent dans la solution, la TVRC choisit d'utiliser une repartition intégrale de ces directions.

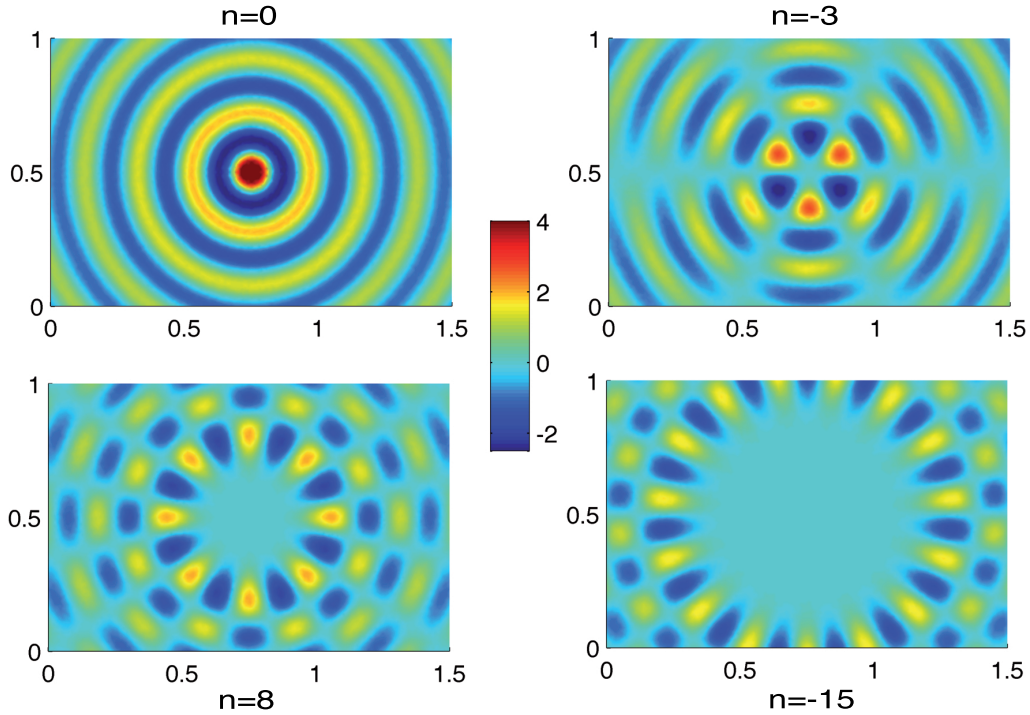
Dans le cadre de problèmes d'acoustique bi-dimensionnels, les distributions d'amplitudes des ondes intérieures et de bords sont des fonctions définies sur le cercle unité. Une discrétisation en série de Fourier est donc parfaitement adaptée. Ainsi les fonctions  $A_E$  sont discrétisées en séries de Fourier et les approximations construites s'écrivent :

$$p_E^h(\underline{x}) = \sum_{\square=p,e} \int_0^{2\pi} A_E^{a,\square}(\underline{k}_E^{a,\square}) e^{i\underline{k}_E^{a,\square} \cdot \underline{x}} d\theta = \sum_{\square=p,e} \sum_{n=-L_E}^{L_E} a_{n,\square}^{(E)} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} e^{i\underline{k}_E^{a,\square} \cdot \underline{x}} d\theta \quad (4.1)$$

Cette discrétisation revient à définir de nouvelles fonctions de forme :

$$\phi_{n,\square}^{(E)}(\underline{x}) = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} e^{i\underline{k}_E^{a,\square}(\theta) \cdot \underline{x}} d\theta \quad (4.2)$$

Le champ de pression associé aux fonctions de forme intérieures est présenté dans la figure 4.1.



**Figure 4.1** Partie réelle du champ de vibration associé aux fonctions de forme intérieures définies dans (4.2) d'indice  $n = 0, -3, 8$ , et  $-15$ .

On définit l'énergie vibratoire  $e_\Omega$  comme :

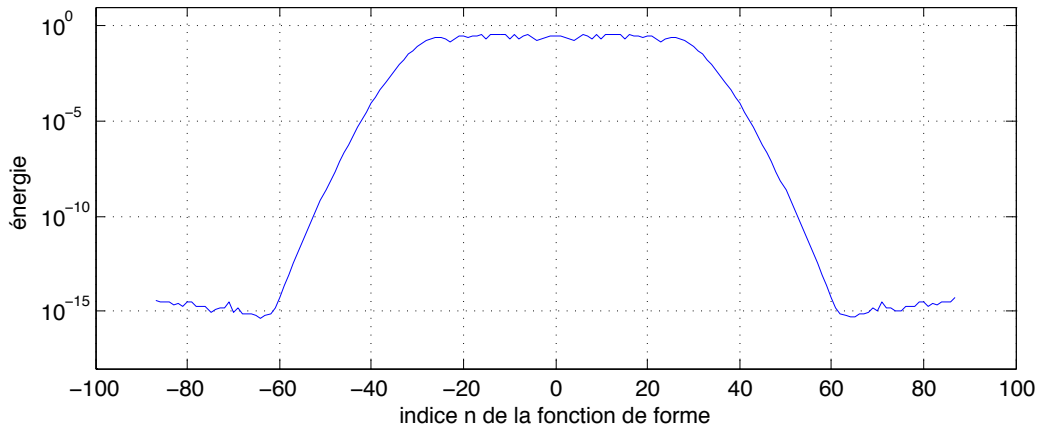
$$e_\Omega = \int_\Omega \frac{1}{2} p(\underline{x}) \overline{p(\underline{x})} d\underline{x} \quad (4.3)$$

Le calcul de l'énergie nécessite une intégrale sur l'ensemble de la cavité. Néanmoins en utilisant la même idée que dans la démonstration du paragraphe 3.1.2 (utilisation du théorème de Stokes et de l'équation de Helmholtz) on peut montrer :

$$\int_\Omega \frac{2\eta_a k_{0,a}^2}{\rho_0 \omega} p(\underline{x}) \overline{p(\underline{x})} d\underline{x} = \oint_{\partial\Omega_E} \tilde{p}_E \overline{\mathcal{L}_v[\tilde{p}_E]} ds \quad (4.4)$$

Le calcul de l'énergie se ramène donc au calcul d'une intégrale sur le bord de la cavité.

Dans le cas des faisceaux, toutes les fonctions de forme ont une énergie du même ordre de grandeur. On peut observer sur la figure 4.2, représentant l'évolution de l'énergie de chaque fonction de forme en fonction de leur indice, que ce n'est pas le cas dans le cas de l'approximation de type Fourier. En effet, l'énergie des fonctions de forme avec un indice relativement faible (sur cet exemple, inférieur à 25) sont du même ordre de grandeur, puis l'énergie des fonctions de forme suivantes décroît de manière exponentielle jusqu'à la précision machine.



**Figure 4.2** Evolution de l'énergie des fonctions de forme intérieures définies en (4.2) dans une cavité rectangulaire ( $2 \times 1\text{m}$  remplie d'air à  $k = 6\text{m}^{-1}$ ) en fonction du degré  $n$ .

Ce résultat se retrouve de manière théorique grâce au lemme de Riemann-Lebesgue :

$$(\forall \underline{x}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_0^{2\pi} e^{k(\theta) \cdot \underline{x}} e^{-in\theta} d\theta \right| = 0 \quad (4.5)$$

Pour un  $n$  suffisamment grand, le champ de pression est négligeable.

Cette répartition de l'énergie en fonction de l'indice des fonctions de forme risque d'aggraver le problème de conditionnement du système d'équations algébriques issu de la TVRC. En effet, les valeurs numériques des termes de la matrice associés aux fonctions de forme d'indice élevé seront très largement inférieures aux premiers termes de la matrice. Pour limiter ce problème, les fonctions de forme utilisées pour le calcul de l'opérateur sont normalisées

en énergie. Cela revient à utiliser un préconditionneur diagonal  $\mathbf{D}$  :

$$\mathbf{D}_{ii} = \frac{1}{\sqrt{e_{\Omega}(\phi_{n,\square}^{(E)}(\underline{x}))}} \quad (4.6)$$

La résolution du problème se ramène donc toujours à la résolution d'un système matriciel  $\mathbf{K}a_E = f$ . Par convention :

$$a_E = \left[ \phi_{0,\square}^{(E)}(\underline{x}), \phi_{1,\square}^{(E)}(\underline{x}), \phi_{-1,\square}^{(E)}(\underline{x}), \dots, \phi_{n,\square}^{(E)}(\underline{x}), \phi_{-n,\square}^{(E)}(\underline{x}), \dots, \phi_{L_E,\square}^{(E)}(\underline{x}), \phi_{-L_E,\square}^{(E)}(\underline{x}) \right] \quad (4.7)$$

## 4.2 Mise en oeuvre numérique

Afin de détailler les procédures d'intégration utilisées pour calculer les termes de l'opérateur  $\mathbf{K}$ , nous allons nous attacher au calcul d'un terme de la matrice. Ce terme résulte du couplage de la fonction de forme  $\phi_l^{(E)}(\underline{x})$  avec la fonction de forme virtuelle  $\delta\phi_m^{(E)}(\underline{x})$ .

Dans le cadre de l'acoustique, le terme  $\mathbf{K}_{lm}$  est de la forme :

$$\mathbf{K}_{lm} = \int_{\partial\Omega_E} p(\underline{x}) \overline{v(\underline{x})} ds \quad (4.8)$$

$$= \int_{\partial\Omega_E} \phi_l^{(E)} \cdot \overline{(\nabla \delta\phi_m^{(E)}) \cdot \underline{n}_E} ds \quad (4.9)$$

$$= \int_{\partial\Omega_E} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} -i \underline{k}_E(\theta') \cdot \underline{n}_E e^{i\theta} e^{-im\theta'} e^{i(\underline{k}_E(\theta) - \underline{k}_E(\theta')) \cdot \underline{x}} d\theta d\theta' ds \quad (4.10)$$

On peut d'ores et déjà remarquer que le domaine d'intégration de chaque terme est  $\partial\Omega_E \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$  dans le cas des fonctions de Fourier, contre  $\partial\Omega_E \times \Delta\theta \times \Delta\theta$  dans le cas de faisceaux. La qualité et l'efficacité du calcul de ces intégrales est donc un enjeu majeur pour la TVRC-Fourier.

### 4.2.1 Cas d'un bord droit : méthode semi-analytique

Dans cette partie, on s'intéresse à la contribution d'un bord droit de longueur  $2\tau_L$ , de normale  $\underline{n}$ , de tangente  $\underline{\tau}$  et de centre  $\underline{x}_M$ . Le terme (4.10) s'écrit alors :

$$\mathbf{K}_{lm} = \int_{\partial\Omega_E} \phi_l^{(E)} \cdot \overline{(\nabla \delta\phi_m^{(E)}) \cdot \underline{n}_E} ds \quad (4.11)$$

$$= \int_{-\tau_L}^{\tau_L} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} -i \underline{k}_E(\theta') \cdot \underline{n}_E e^{i\theta} e^{-im\theta'} e^{i(\underline{k}_E(\theta) - \underline{k}_E(\theta')) \cdot (x\tau - \underline{x}_E)} d\theta d\theta' dx \quad (4.12)$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \theta') 2 \frac{\text{sinc}((\underline{k}_E(\theta) - \underline{k}_E(\theta')) \cdot \underline{\tau} \tau_L)}{(\underline{k}_E(\theta) - \underline{k}_E(\theta')) \cdot \underline{\tau}} d\theta d\theta' \quad (4.13)$$

avec  $f(\theta, \theta') = -i \underline{k}_E(\theta') \cdot \underline{n}_E e^{i\theta} e^{-im\theta'} e^{i(\underline{k}_E(\theta) - \underline{k}_E(\theta')) \cdot \underline{x}_E}$

Ce résultat permet de mettre en place une procédure d'intégration semi-analytique. En effet l'intégration sur le bord est effectuée de manière analytique, alors que les intégrales sur le cercle unité sont effectuées de manière numérique :

$$\mathbf{K}_{lm} = \sum_j \sum_i w_j w_i f(\theta_i, \theta'_j) 2 \frac{\text{sinc}((\underline{k}_E(\theta_i) - \underline{k}_E(\theta'_j)) \cdot \underline{\tau} \tau_L)}{(\underline{k}_E(\theta_i) - \underline{k}_E(\theta'_j)) \cdot \underline{\tau}} \quad (4.14)$$

ou l'ensemble  $(\theta_i, w_i)$  forme une grille d'intégration sur le domaine  $[0; 2\pi[$ .

### 4.2.2 Cas d'un bord courbe : méthode numérique

Dans le cas de bord courbe, il n'existe aucun résultat analytique pour l'intégration sur le bord de la cavité. Il faut donc utiliser une méthode d'intégration purement numérique.

Une première vision consiste à calculer les trois intégrales simultanément :

$$\mathbf{K}_{lm} = \int_{\partial\Omega_E} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} -i\underline{k}_E(\theta') \cdot \underline{n} e^{il\theta} e^{-im\theta'} e^{i(\underline{k}_E(\theta) - \underline{k}_E(\theta')) \cdot \underline{x}} d\theta d\theta' ds \quad (4.15)$$

$$= \sum_h \sum_i \sum_j w_h w_i w_j (-i\underline{k}_E(\theta'_j) \cdot \underline{n}) e^{il\theta_i} e^{-im\theta'_j} e^{i(\underline{k}_E(\theta_i) - \underline{k}_E(\theta'_j)) \cdot \underline{x}_h} \quad (4.16)$$

Cette solution nécessite de faire un calcul complet pour chaque terme. D'un point de vue de la stratégie de calcul ce n'est pas efficace. En effet la trace (pression et vitesse) de la fonction de forme  $\phi_j^{(E)}$  est utilisée dans le calcul des termes de l'opérateur situé sur la j-ème ligne et sur la j-ème colonne. La stratégie mise en place est donc d'effectuer une boucle sur l'ensemble des bords des domaines. Pour chacun de ces bords, on commence par calculer la trace des fonctions de formes du ou des sous-domaines adjacents, puis de calculer la contribution à l'opérateur de ce bord. Cette stratégie permet de ne calculer qu'une seule fois par bord et par fonction de forme l'intégrale sur le cercle unité.

### 4.2.3 Influence des paramètres d'intégration

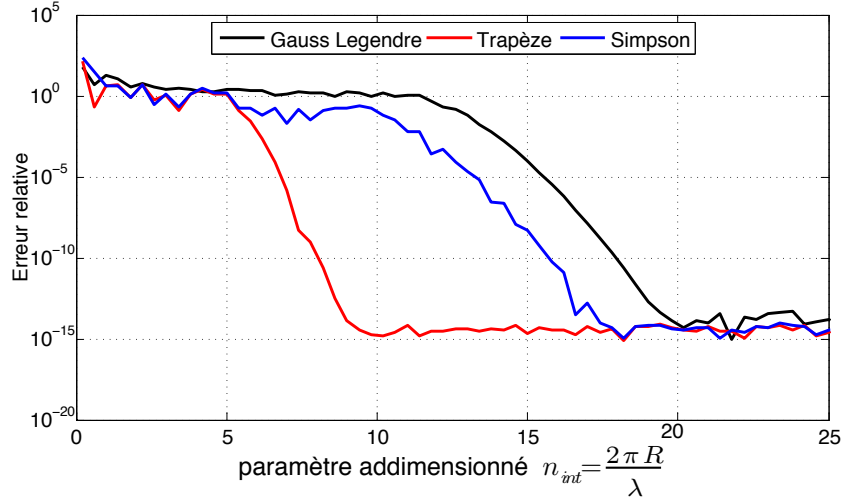
Les domaines d'intégrations des variables  $\theta$  et  $\theta'$  sur le cercle unité sont discrétisés en grilles de  $n_{int}$  points pondérés. On note  $[\theta_i]$  et  $[\theta'_i]$  la liste de ces points,  $[\beta_i]$  et  $[\beta'_i]$  la liste des poids associés à chacun de ces points. Les trois types de grilles testées sont :

- méthode des trapèzes : les  $n$  points d'intégration sont équirepartis sur le domaine  $[0; 2\pi[$ , et les poids valent tous  $1/n$ .
- méthode de Simpson : les  $n$  points d'intégration sont équirepartis sur le domaine  $[0; 2\pi[$ , les poids sont calculés en utilisant la règle de Simpson, et ils reviennent à interpoler la fonction par un polynôme de degré 4.
- méthode de Gauss-Legendre : on note  $\alpha_i$  les  $n$  racines du  $n^{me}$  polynôme de Legendre  $P_n(\alpha)$  sur le domaine  $[-1; 1]$ , alors les points d'intégration sur le domaine  $[0; 2\pi[$  sont donné par  $\theta_i = \pi(1 + \alpha_i)$  et les poids  $\beta_i = \frac{-2\pi}{(n+1)P'_n(\alpha_i)P_{n+1}(\alpha_i)}$

On considère le premier terme  $\mathbf{K}_{(11)}^{elem}$  de la matrice élémentaire calculé sur un bord. Ce bord est discrétisé très finement, afin que l'intégration sur ce bord soit juste. De plus on impose que le point  $\underline{x}_E$  soit situé à une distance  $R$  de ce bord. Pour déterminer la méthode la plus efficace pour calculer ce type d'intégrale, on s'intéresse à l'évolution de la valeur de  $\mathbf{K}_{(11)}^{elem}$  en fonction du nombre  $n_{int}$  de points d'intégration. La convergence est mesurée sur la valeur du terme  $\mathbf{K}_{(11)}^{elem}$  par rapport à la valeur finale calculée avec la méthode de Gauss-Legendre. Les courbes de convergence sont présentées sur la figure 4.3. Le nombre de points d'intégration sur le cercle unité est fixé par rapport au paramètre adimensionné  $n_{int} = \frac{2\pi R}{\lambda}$ .

La méthode des trapèzes semble être la plus efficace pour ce type d'intégration. De plus en réalisant cette étude à différentes fréquences et à différentes distances  $R$ , on peut déterminer un critère euristique pour la discrétisation du cercle unité. C'est donc cette méthode qui est mise en oeuvre dans le logiciel CoFouRays, avec le paramètre  $n_{int}$  fixé à 12.

D'un point de vue technique, ces intégrales sont effectuées sur cartes graphiques (GPU), ce qui permet de réduire considérablement les temps de calcul. En effet les récents progrès en matière de calcul GPU, permettent d'important gain de performances pour les opérations



**Figure 4.3** Convergence des méthodes d'intégration pour le calcul de  $\mathbf{K}_{(11)}^{elem}$  en fonction du paramètre adimensionné  $n_{int} = \frac{2\pi R}{\lambda}$  sur un bord droit à 500 Hz.

matricielles. La librairie open source GPUmat [GPUmat, 2010] permet d'interfacer le calcul GPU dans Matlab de manière transparente pour l'utilisateur.

#### 4.2.4 Méthode numérique avec approximation asymptotique

Dans le rapport interne du LMT [Ladevèze, 2008], une version de la TVRC dite HF-TVRC est présentée. Cette méthode utilise une version asymptotique de l'opérateur, qui ne dépendrait plus de la fréquence, calculée grâce au théorème de la phase stationnaire. Cette théorie n'a pour le moment été que très peu étudiée mais fera l'objet de développements ultérieurs. Néanmoins, le théorème de la phase stationnaire peut être utilisé pour calculer à une fréquence donnée une approximation de l'opérateur. En effet, sous réserve que la fonction  $A(\theta)$  soit continue et dérivable sur le cercle unité, alors :

$$\int_0^{2\pi} A(\theta) e^{i\omega P \cdot \underline{X}} d\theta = \sqrt{2\pi} \left( A(\theta^+) \frac{e^{i|\omega P|R - i\pi/4}}{\sqrt{|\omega P|R}} + A(\theta^-) \frac{e^{-i|\omega P|R + i\pi/4}}{\sqrt{|\omega P|R}} \right) + o\left(\frac{1}{\omega}\right) \quad (4.17)$$

L'utilisation de ce résultat dans le calcul de l'opérateur, permet de réduire le nombre d'intégrations. En effet, une contribution élémentaire à l'opérateur se calcule en effectuant une intégrale triple : une intégration sur le bord et deux intégrales sur le cercle unité. Le théorème de la phase stationnaire permet d'approximer les intégrales sur le cercle unité, et donc de réduire l'intégrale triple à une intégrale simple.

D'autre part, le calcul de la vitesse ne pose *a priori* aucun problème : en effet le gradient de la pression approximée se calcule très bien en coordonnées polaires. Les performances ainsi que le domaine de validité de cette version TVRC pseudo-HF seront présentés dans la partie 4.6.

## 4.3 Propriétés de convergence du champ de pression

### 4.3.1 Convergence de la TVRC-Fourier

Afin d'illustrer les propriétés de convergence de la TVRC-Fourier, on considère le problème d'acoustique défini dans la figure 4.4. La cavité  $\Omega$  est remplie d'air ( $c = 340 \text{ m.s}^{-1}$  et  $\rho = 1.25 \text{ kg.m}^{-3}$ ), elle est soumise à trois différents types de conditions aux limites (pression unitaire sur le bord de gauche, vitesse nulle ou impédance  $Z = 3400 + 50i \text{ Pa.s.m}^{-1}$  sur les autres bords). Le problème est résolu à différentes fréquences, qui sont telles que  $k = 10, 50$  et  $80 \text{ m}^{-1}$ . Les différentes solutions sont présentées sur la figure 4.5.

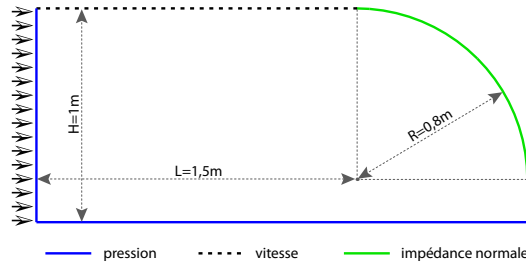


Figure 4.4 Cavité acoustique  $\Omega$  et ses conditions limites.

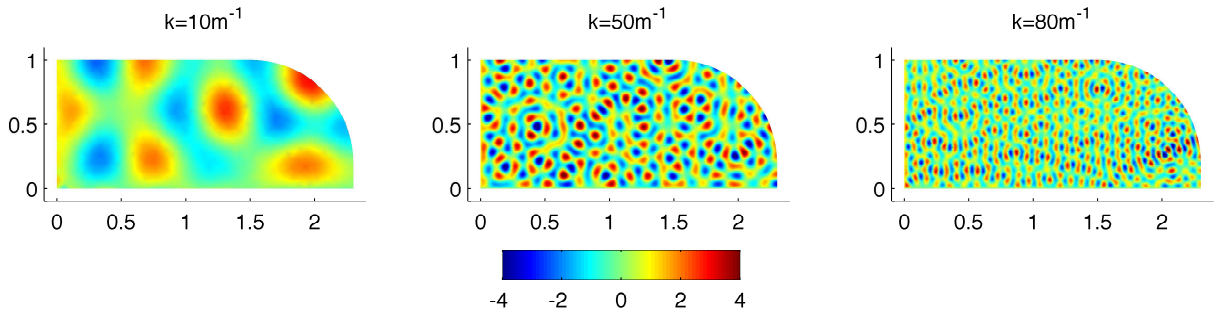


Figure 4.5 Partie réelle du champ solution du problème défini sur la figure 4.4 à différentes fréquences.

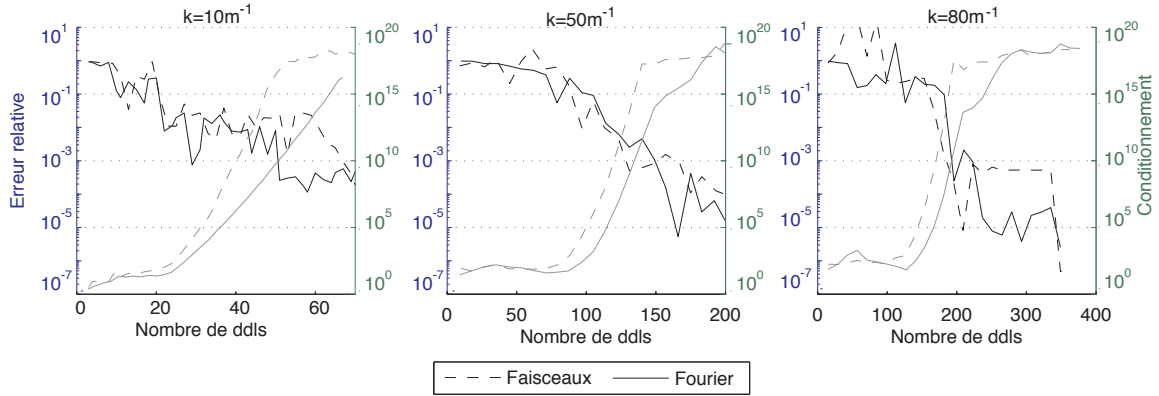
La solution de référence est calculée en utilisant la TVRC associée à une approximation de type faisceaux discrétisée très finement. On définit l'erreur sur l'énergie totale :

$$\varepsilon_{\Omega} = \frac{|e_{ref} - e_{TVRC}|}{e_{ref}} \quad (4.18)$$

La figure 4.6 montre l'évolution de cette erreur ainsi que le conditionnement de l'opérateur en fonction du nombre de degrés de liberté utilisés pour l'approximation de type faisceaux et l'approximation de type Fourier normalisée en énergie.

Comme on peut le constater sur la figure 4.6, l'approximation basée sur les séries de Fourier a un comportement similaire à l'approximation de type faisceaux. Néanmoins, la TVRC-Fourier semble avoir un meilleur conditionnement, ce qui facilite l'inversion du système matriciel. En effet, pour les trois fréquences considérées, au moment où le conditionnement de l'opérateur calculé avec les faisceaux atteint la limite logiciel ( $10^{18}$ ), le conditionnement de l'opérateur de la TVRC-Fourier est d'environ  $10^{12}$ .





**Figure 4.6** Evolution de l'erreur et conditionnement de l'opérateur pour le problème défini sur la figure 4.4.

### 4.3.2 Influence de la sous-structuration

La convergence de la TVRC se base sur une approche de type  $p$ , qui consiste à augmenter le degré de l'approximation sans modifier la discrétisation spatiale. Malheureusement, l'évaluation des fonctions de formes et leur stockage peuvent s'avérer coûteux. Pour limiter ce problème, on peut imaginer d'utiliser une sous-structuration utilisant des sous domaines identiques, appelés super-éléments. Les fonctions de forme ne sont alors évaluées qu'une seule fois par super-élément. Dans cette partie, on cherche à étudier l'influence de la sous-structuration sur les performances de la TVRC. Pour cela on considère le problème défini sur la figure 4.7. La cavité est remplie d'air ( $c = 340 \text{ m.s}^{-1}$  et  $\rho = 1.25 \text{ kg.m}^{-3}$ ). Le bord de gauche est soumis à une pression unitaire, et le bord en haut à droite à une condition de Robin avec une impédance  $Z = 845 - 50i \text{ Pa.s.m}^{-1}$ .

Ce problème est résolu en utilisant trois différentes sous-structurations et trois différentes fréquences telles que :  $k = 50, 80$  et  $140 \text{ m}^{-1}$ . Ces trois fréquences correspondent respectivement à une longueur d'onde de  $0.126, 0.0785$  et  $0.0449 \text{ m}$ . Les solutions de référence sont calculées avec la méthode des éléments finis en utilisant un maillage de degré 3 extrêmement fin (environ 15 éléments par longueur d'onde).

Les résultats de convergence sont présentés sur la figure 4.8. Cet exemple confirme bien le fait que la TVRC est une  $p$ -méthode. En effet pour les trois fréquences évaluées, c'est la sous-structuration A qui est la plus efficace en terme de taille de système matriciel.

Néanmoins l'étude du temps de calcul en fonction de l'erreur (voir figure (4.9)) pour chacune des discrétisations choisies aux fréquences données n'aboutit pas aux mêmes conclusions. En effet, pour la plus petite des fréquences, le temps de calcul est similaire pour les maillages A et B. Le maillage C nécessite un temps de calcul nettement plus long. A cette fréquence, l'intégration numérique sur le bord ne nécessite pas beaucoup de points et est donc très rapide. Dans le cas du maillage C, l'opérateur est long à calculer car il y a beaucoup de bords élémentaires, le temps gagné sur l'évaluation des fonctions de formes par *super-éléments* n'est pas visible. Pour la plus haute des fréquences testées, pour les trois sous-structurations il faut évaluer un millier de fonctions de forme. Dans le cas C, l'utilisation de super-éléments permet de ne calculer qu'une centaine de fonctions de forme. Le gain de temps réalisé grâce à l'utilisation de super-éléments est sensible, en effet c'est le maillage A qui nécessite le plus long temps de calcul.

Lorsque le nombre d'onde devient grand, il semble donc judicieux de privilégier une stratégie de calcul basée sur une décomposition de la géométrie en super-éléments identiques.

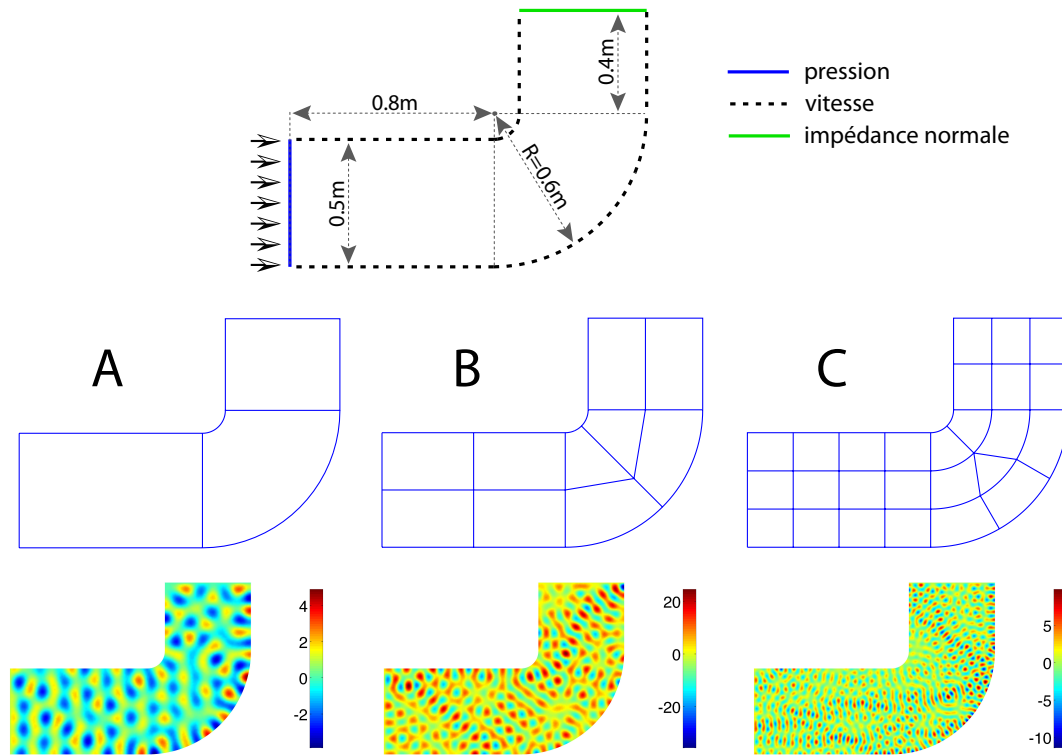


Figure 4.7 Définition du problème, sous-structurations utilisées et solution de référence pour  $k = 50, 80$  et  $140\text{m}^{-1}$ .

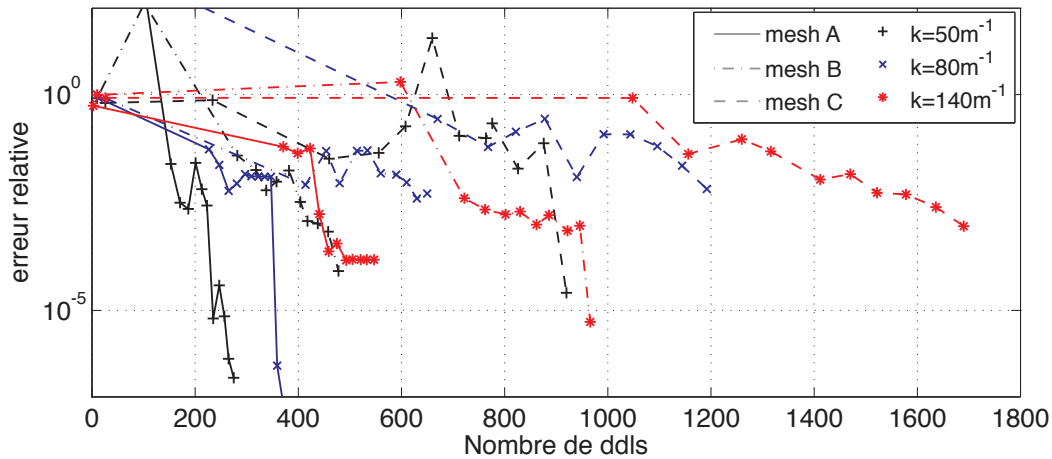
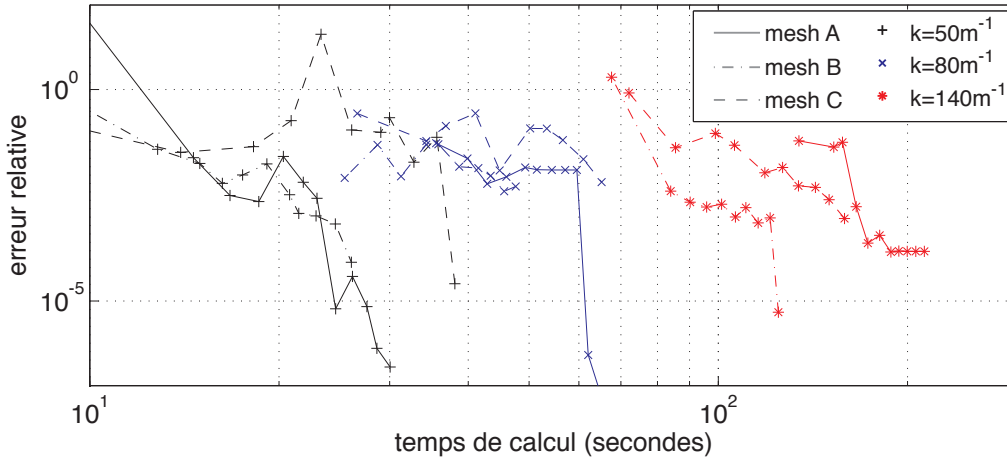


Figure 4.8 Convergence de la TVRC pour le problème défini sur la figure 4.7.

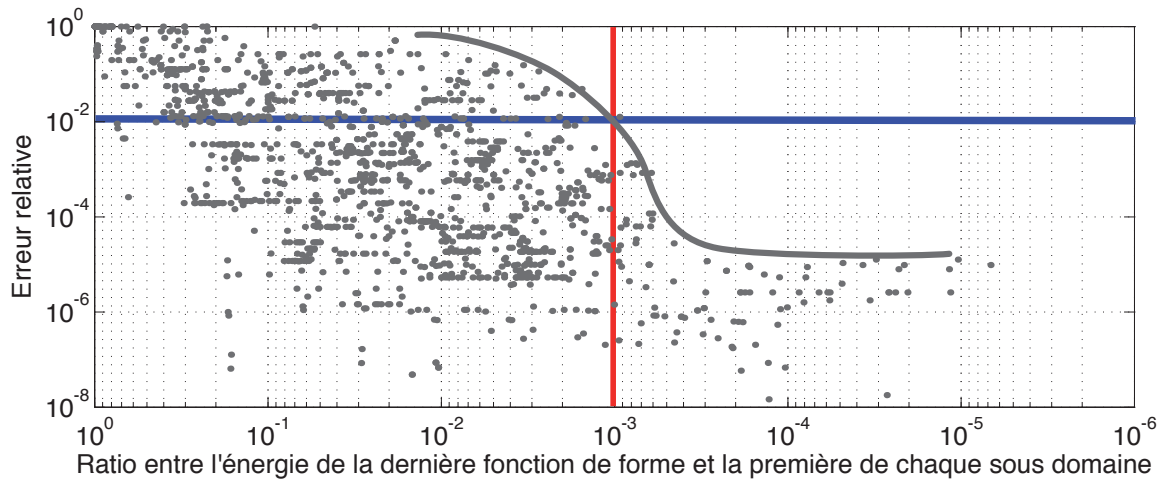
## 4.4 Vers un critère énergétique pour le choix du nombre de degrés de liberté

Le but de cette partie est de définir un critère efficace pour déterminer la discrétisation optimale à un niveau d'erreur donné. Pour essayer de le déterminer, on trace, pour l'ensemble des exemples précédents, l'erreur relative de chacun des sous domaines en fonction du ratio entre l'énergie de la première fonction de forme et celle de la dernière utilisée (voir figure



**Figure 4.9** Evolution de l'erreur en fonction du temps de calcul pour le problème défini sur la figure 4.7.

4.10).



**Figure 4.10** Evolution de l'erreur en fonction de l'énergie de la dernière fonction de forme utilisée.

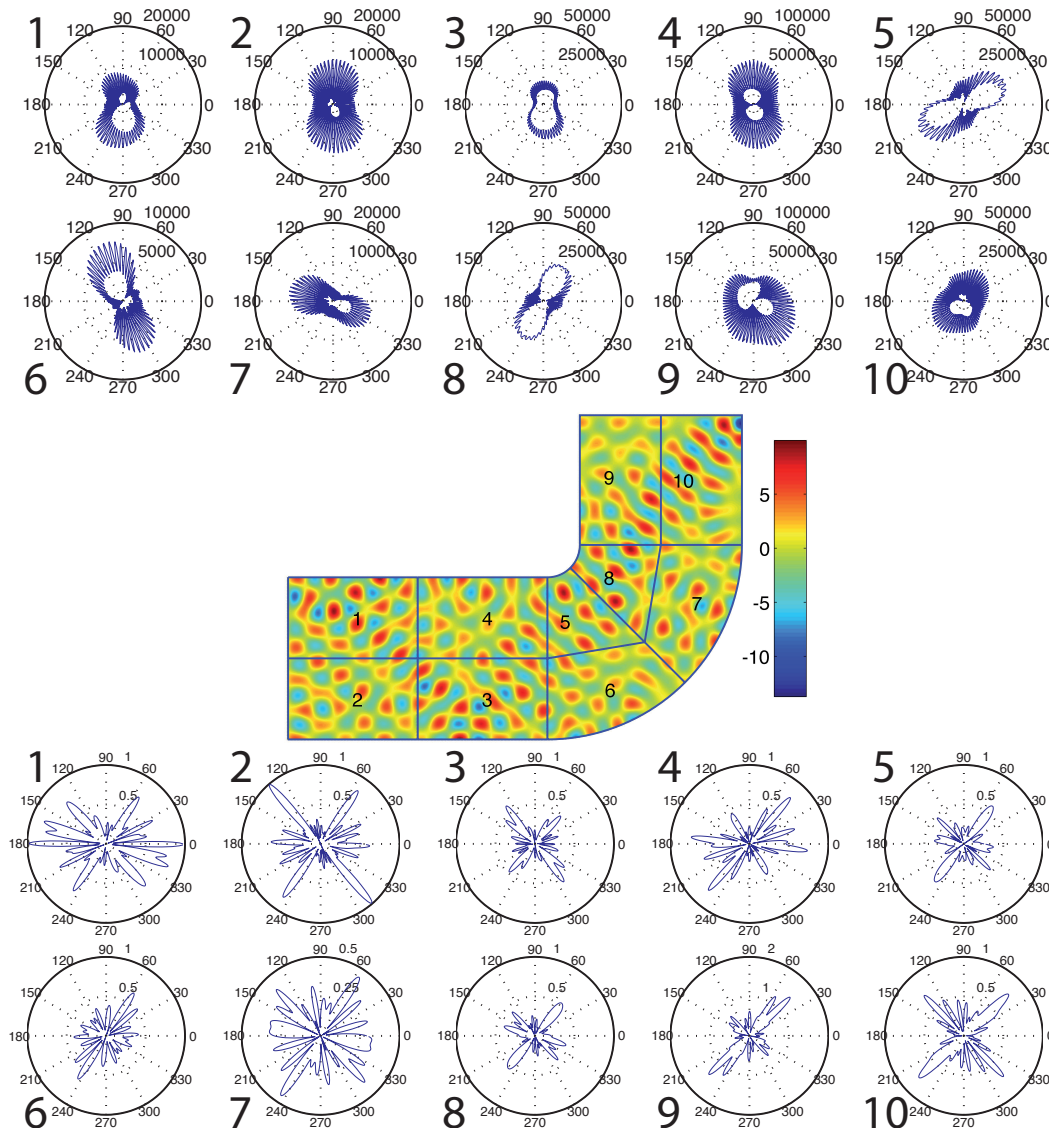
L'enveloppe des points de ce graphe permet de mettre en place un critère qui prédit le nombre de fonctions de forme à utiliser pour chacun des sous domaines. Par exemple, pour une erreur souhaitée de 1%, dans chacun des sous domaines, il faut utiliser toutes les fonctions de forme ayant une énergie au moins supérieure à  $e_0 10^{-3}$ , où  $e_0$  est l'énergie de la première fonction de forme. Bien que ce critère soit euristique, il s'est avéré juste dans la totalité des exemples testés.

## 4.5 Etude de la convergence du portrait d'amplitude

### 4.5.1 Non convergence paradoxale du portrait d'amplitude

La figure 4.6 montre que le système d'équations algébriques issu de la TVRC souffre d'un mauvais conditionnement et ce quelle que soit l'approximation utilisée. Néanmoins

ce phénomène est légèrement moins prononcé avec l'approximation de type Fourier. Un tel problème est généralement source de difficultés numériques, car si le vecteur solution représente réellement la quantité d'intérêt (par exemple, le vecteur solution issu d'un calcul par EF représente le champ de pression approximé aux noeuds), alors l'inversion du système linéaire nécessite une attention toute particulière, et toutes les sources d'erreurs numériques doivent être soigneusement analysées afin d'évaluer leur impact sur la qualité de la solution.



**Figure 4.11** portraits d'amplitude non régularisés (haut) et régularisés (bas) de chacun des sous-domaines du coude pour le problème défini sur la figure 4.7.

Toutefois, pour la TVRC, et plus généralement pour les approches ondulatoires, le vecteur solution n'est pas à proprement parler la solution du problème, cette dernière étant obtenue lors d'une opération de post-processing par une combinaison des ondes (voir (3.16)). De plus, la tendance générale est que plus le conditionnement est mauvais, plus la solution du problème est précise. Le problème de conditionnement ne perturbe pas la convergence, mais complique l'inversion du système algébrique. Dans [Sourcis, 2009], on trouve une explication à ce phénomène. Ces instabilités seraient dues à la nature mal posée des équations intégrales

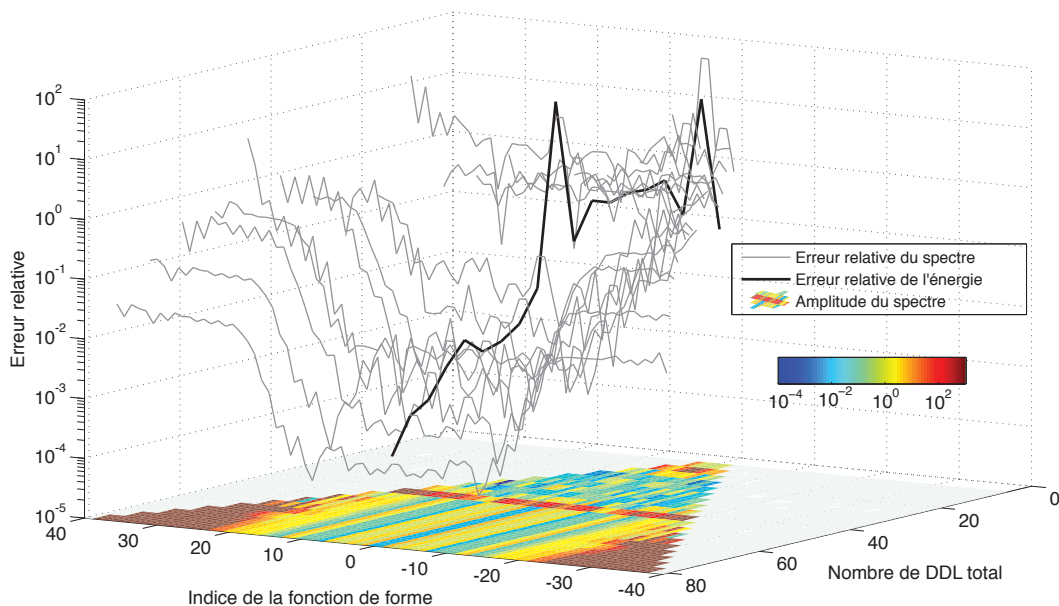
de première espèce. Rappelons qu'un problème est bien posé au sens d'Hadamard si et seulement si

- 1. une solution existe ;
- 2. la solution est unique ;
- 3. la solution dépend de façon continue des données.

Les deux premières conditions sont vérifiées, la troisième ne l'est pas. En effet, deux problèmes très proches peuvent avoir comme solution deux portraits d'amplitudes radicalement différents. En pratique, cela se traduit par une non convergence du portrait d'amplitude malgré la convergence du champ de pression. Un tel comportement est en fait inhérent à une propriété paradoxale de l'approximation par un ensemble d'ondes planes. Sur le haut de la figure 4.11, on peut observer les portraits d'amplitude obtenus avec environ 80 fonctions de formes et associés à chacun des sous domaines du problème sur le coude. Les valeurs atteintes ne reflètent ni les niveaux de pression ni les flux d'énergie.

### 4.5.2 Convergence du spectre, et régularisation du portrait d'amplitude

Le vecteur des inconnues de la TVRC-Fourier est la concaténation des spectres des portraits d'amplitude associés aux différents sous-domaines. Il est intéressant d'étudier la convergence du spectre d'un sous domaine en fonction du nombre de fonctions de forme utilisées. Cette analyse est effectuée sur le spectre associé au premier sous domaine du maillage B du coude, la fréquence des sollicitations est telle que  $k = 80\text{m}^{-1}$ .



**Figure 4.12** Convergence du spectre.

La figure 4.12 montre d'une part l'évolution du spectre en fonction du degré de discrétisation choisi, la couleur rouge correspond à des valeurs supérieures à 100 et le jaune à des valeurs de l'ordre de l'unité. D'autre part, l'erreur relative sur chacun des termes du spectre calculé à partir du spectre obtenu à convergence est tracée pour différente discrétisation (courbes grises). La courbe noire correspond à l'erreur en énergie commise sur l'ensemble

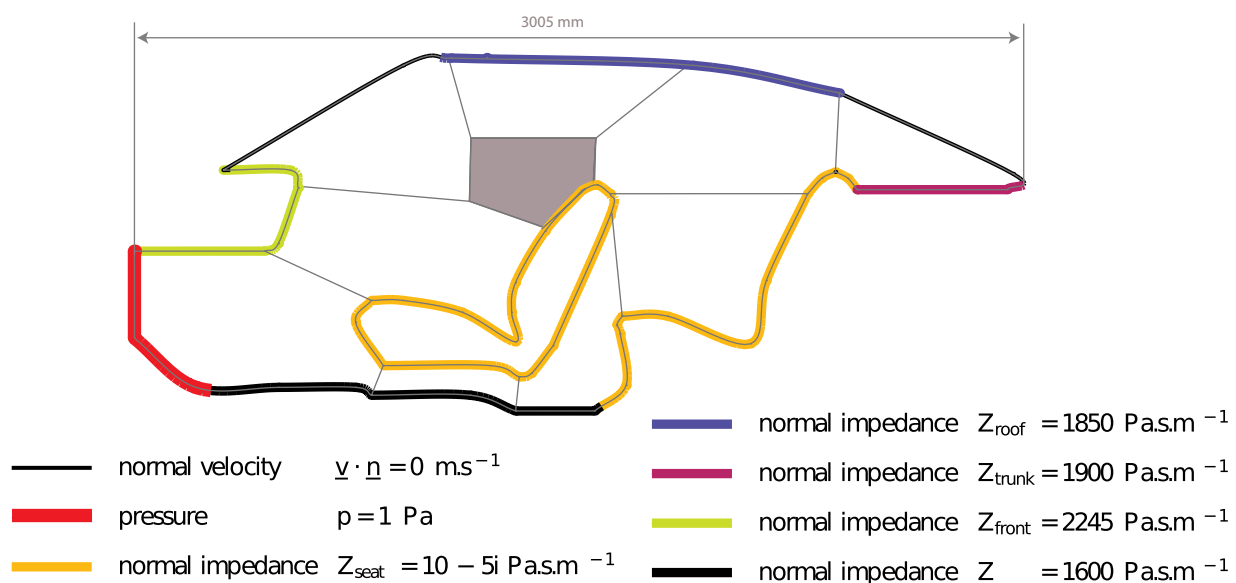
du sous domaine. L'ensemble des courbes de convergence montre que la convergence globale suit la convergence des fonctions de forme d'indice compris entre  $-10$  et  $10$ . Pour ce qui est des fonctions de plus haut indice, on constate que les valeurs d'amplitude sont très importantes, de  $100$  à  $1000$  fois le niveau des premières fonctions. D'autre part l'erreur relative commise sur ces termes est importante, alors que le champ de pression est convergé. Ces fonctions n'apportent donc aucune information sur le champ solution. Ces fonctions sont donc à l'origine de la non convergence du portrait d'amplitude.

La solution de régularisation mise en place ici, consiste à pondérer la contribution d'une fonction de forme par son énergie. Ainsi seules les fonctions de forme avec une énergie non négligeable auront une contribution sur le portrait d'amplitude. L'avantage de cette méthode est qu'elle ne nécessite aucun paramètre extérieur. Elle est donc intrinsèque au problème. La figure 4.11 montre l'efficacité de cette régularisation. En effet la régularité de ces portrait d'amplitude permet d'évaluer les niveaux de pression ainsi que les flux d'énergie. Néanmoins, ce portrait d'amplitude régularisé ne permet pas de reconstruire le champ solution, mais seulement d'observer la partie stable du portrait d'amplitude. On peut également imaginer une régularisation basée sur la troncature du spectre, mais cette technique perdrait son côté intrinsèque. Il faudrait introduire un paramètre de troncature, ce qui d'une certaine façon revient à utiliser le critère heuristique défini dans la partie 4.4. Cette stratégie n'a donc pas été étudiée, mais elle pourrait être l'objet de futures investigations.

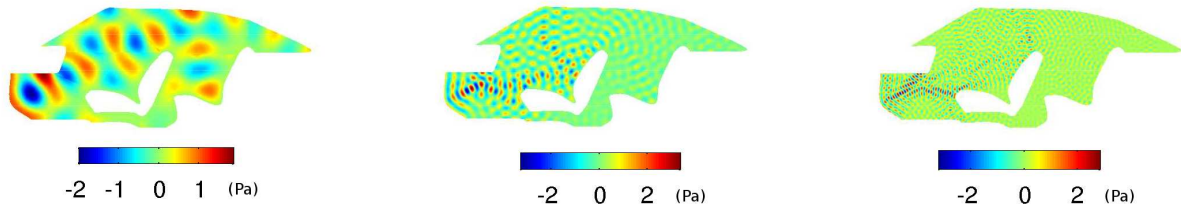
## 4.6 Application à une cavité acoustique complexe

Le but de cette dernière partie est de montrer les capacités de la TVRC-Fourier à résoudre un problème d'acoustique défini dans une cavité complexe. D'autre part, cette partie est aussi l'occasion de montrer les premiers résultats de l'intégration basée sur le théorème de la phase stationnaire.

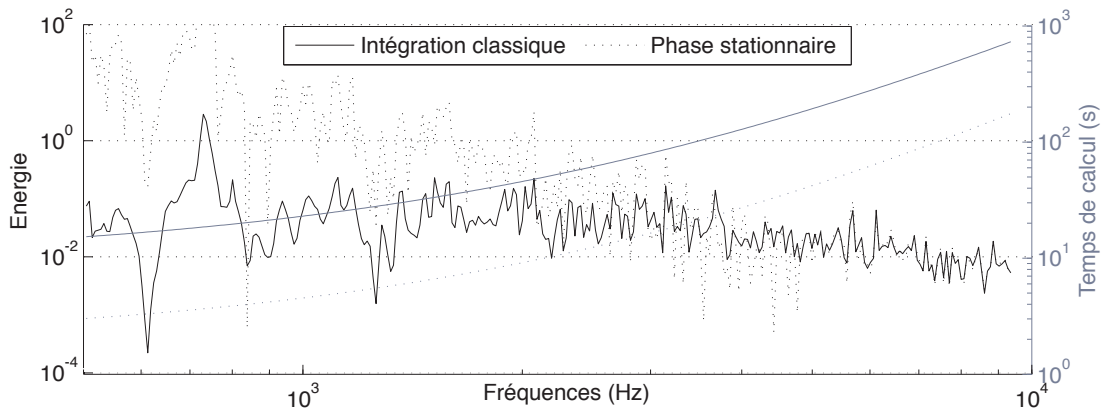
On considère une cavité intérieure de voiture remplie d'air ( $c = 340 \text{ m.s}^{-1}$  et  $\rho = 1.25 \text{ kg.m}^{-3}$ ). La géométrie et les conditions aux limites sont définies sur la figure 4.13.



**Figure 4.13** définition du problème d'une cavité acoustique automobile.



**Figure 4.14** Partie réelle du champ de pression pour le problème défini dans la figure 4.13 à trois fréquences : 2500 Hz (gauche), 4000 Hz (milieu) et 8000 Hz (gauche).



**Figure 4.15** Réponse en fréquence et temps de calcul pour le problème défini dans la figure 4.13.

On s'intéresse à l'évolution de l'énergie située dans le sous domaine à proximité de l'appui tête (zone grisée sur la figure 4.13) en fonction de la fréquence. Le problème est résolu sur la bande de fréquence 500-9500 Hz. Pour ce problème, nous n'avons pas de solution de référence permettant de valider de manière absolue le résultat, mais le comportement de la courbe de réponse en fréquences est compatible avec la physique mise en jeu. En effet, on observe une densification modale aux plus hautes fréquences.

La figure 4.14 représentent la partie réelle du champ de pression à trois fréquences : 2500, 4000 et 8000 Hz. On compare le résultat et le temps de calcul obtenus par la TVRC Fourier classique et celle utilisant l'approximation de phase stationnaire (voir partie 4.2.4). Sur la figure 4.15, on constate que l'approximation de la phase stationnaire donne un résultat faux pour les fréquences les plus basse, mais permet d'avoir un résultat précis avec un temps de calcul très inférieur dans la zone des plus hautes fréquences. Cette méthode d'intégration semble donc prometteuse pour le calcul en hautes fréquences.

## 4.7 Conclusion

Ce chapitre présente la démarche mise en place pour valider la TVRC-Fourier dont l'approximation est basée sur les séries de Fourier. Cette approximation conserve les même propriétés de convergence que l'approche classique basée sur une discrétisation du portrait d'amplitude en faisceaux (fonction constante par morceaux). Le fait de travailler directement

sur le spectre permet d'une part la mise en place d'un critère efficace pour déterminer la discrétisation optimale, et d'autre part l'élaboration d'une technique de régularisation basée sur des considérations énergétique. Cette technique revient à observer la partie stable du portrait d'amplitude calculé. Enfin la robustesse de cette nouvelle approximation est testée sur plusieurs exemples de complexité croissante. Ces travaux permettent d'envisager l'extension de cette approximation aux problèmes d'acoustique tri-dimensionnelle et aux problèmes de plaques en flexion. À plus long terme, on peut également envisager des études approfondies sur l'interprétation du portrait d'amplitude régularisé et sur l'intégration basée sur la phase stationnaire. Ces deux études semblent être une première étape vers le calcul haute fréquence. En effet le portrait d'amplitude régularisé permet d'avoir des informations globales à l'échelle d'une sous-structure, et l'utilisation du théorème de la phase stationnaire réduit le temps de calcul.



---

# Extension de la TVRC-Fourier à l'acoustique tridimensionnelle

CE CHAPITRE présente l'extension de l'approximation de type Fourier aux problèmes d'acoustique tridimensionnelle. C'est la première fois que la TVRC est utilisée pour résoudre ce type de problème. L'approximation utilisée est basée sur l'équivalent des séries de Fourier pour les fonctions définies sur la sphère unité. Dans la mesure où le formalisme utilisé pour décrire la solution dans le cas 3D est identique à celui développé dans le cadre de l'approximation de type Fourier, l'extension de la TVRC au problème acoustique tridimensionnelle se fait sans difficulté. De plus, grâce à la décomposition de Jacobi-Anger, les intégrales sur la sphère unité s'effectuent de manière analytique, ce qui permet de mettre en place une méthode d'intégration semi analytique efficace pour le calcul des opérateurs. Enfin la technique de régularisation et le critère pour choisir la discrétisation optimale développés dans le chapitre 4 sont appliqués à l'acoustique tridimensionnelle. La première partie de ce chapitre présente la nouvelle approximation et ses propriétés. Dans un second temps la méthode est validée sur deux exemples pour lesquels la solution exacte est connue (un guide d'onde, et la diffraction d'une onde par une sphère rigide dans un milieu infini). Enfin, la TVRC-Fourier 3D est utilisée pour résoudre deux problèmes plus complexes : une cavité en Z et une cavité automobile.

## Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>L'approximation de type Fourier dans le cadre tridimensionnel . . .</b>	<b>65</b>
<b>5.2</b>	<b>Propriétés des fonctions de forme . . . . .</b>	<b>66</b>
<b>5.3</b>	<b>Méthode d'intégration . . . . .</b>	<b>67</b>
5.3.1	Intégration sur la sphère unité . . . . .	67
5.3.2	Intégration sur la surface . . . . .	69

<b>5.4</b>	<b>Convergence de la méthode . . . . .</b>	<b>69</b>
5.4.1	Guide d'ondes cubique . . . . .	69
5.4.1.1	Convergence du champ de pression et temps de calcul . . . . .	70
5.4.1.2	Convergence du portrait d'amplitude . . . . .	70
5.4.1.3	Critère pour choisir l'ordre de discrétisation . . . . .	72
5.4.2	Diffraction d'une onde par une sphère en milieu infini . . . . .	72
<b>5.5</b>	<b>Exemples d'application . . . . .</b>	<b>73</b>
5.5.1	Cas d'une cavité en Z . . . . .	74
5.5.2	Cas d'une cavité automobile . . . . .	77
5.5.2.1	Cavité simplifiée . . . . .	77
5.5.2.2	Cavité industrielle . . . . .	77
<b>5.6</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>79</b>

---

## 5.1 L'approximation de type Fourier dans le cadre tridimensionnel

Dans le cadre de l'acoustique pure 3D, la solution homogène est recherchée sous la forme :

$$p_E^h(\underline{x}) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} A_E(\theta, \varphi) \cdot e^{ik_a \cdot \underline{u}(\theta, \varphi) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_E)} \sin(\varphi) d\theta d\varphi \quad (5.1)$$

avec  $\underline{k}^{a,p}(\theta, \varphi) = k_a \underline{u}(\theta, \varphi)$  où  $\underline{u}(\theta, \varphi)$  est le vecteur unitaire de colatitude  $\theta$  et de méridien  $\varphi$ .

Le portrait d'amplitude  $A_E(\theta, \varphi)$  est donc défini sur la sphère unité. Une des manières de représenter une fonction de l'orientation dans l'espace est d'utiliser le développement en harmoniques sphériques [Hobson, 1955, Ryzhik, 2000]. L'ensemble des harmoniques sphériques forme une base  $L_2$ -orthonormée sur la sphère unité. Ce développement (aussi appelé séries de Laplace) est l'équivalent, appliqué aux fonctions angulaires, du développement en séries de Fourier pour les fonctions périodiques.

Le portrait d'amplitude s'écrit alors :

$$A_E(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{L_p} \sum_{m=-l}^l a_{l,m}^E Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (5.2)$$

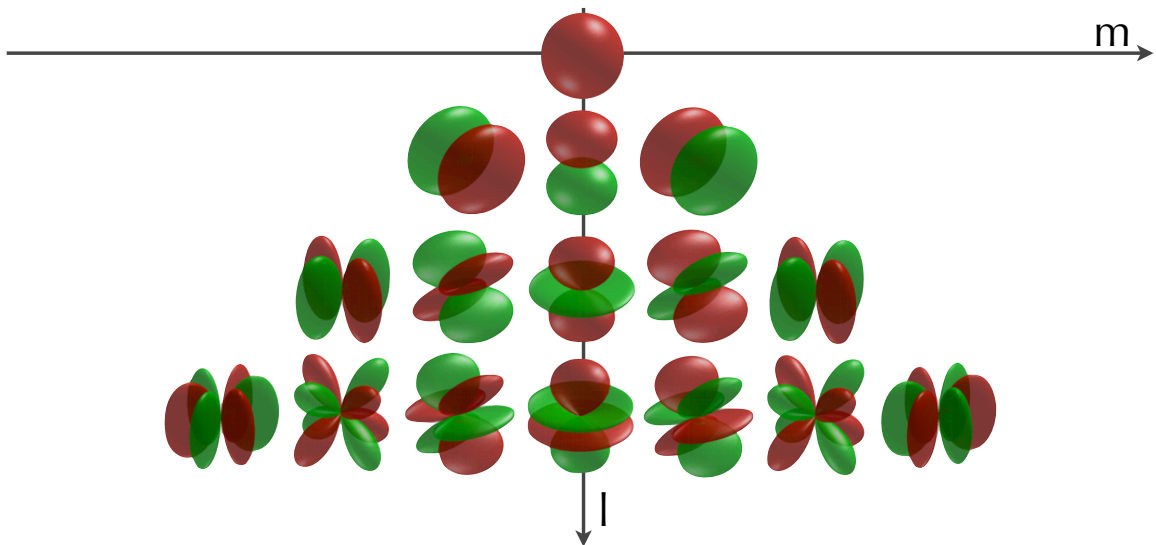
avec :

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2 \cdot (l-m)!}{(l+m)!}} \cdot P_l^m(\cos\theta) \cdot e^{im\varphi} \quad (5.3)$$

$$P_l^m(X) = \frac{(-1)^m}{2^l \cdot l!} (1-X^2)^{m/2} \frac{\partial^{m+l}(X^2-1)^l}{\partial X^{m+l}}$$

où,  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  est l'harmonique sphérique de degré  $l$  et d'ordre  $m$ , ( $m$  varie de  $-l$  à  $l$ ).  $P_l^m(X)$  est le polynôme de Legendre.

La partie réelle des harmoniques sphériques d'ordre de 0 à 3 est représentée sur la figure 5.1. Le rouge correspond aux valeurs positives, et le vert aux valeurs négatives.



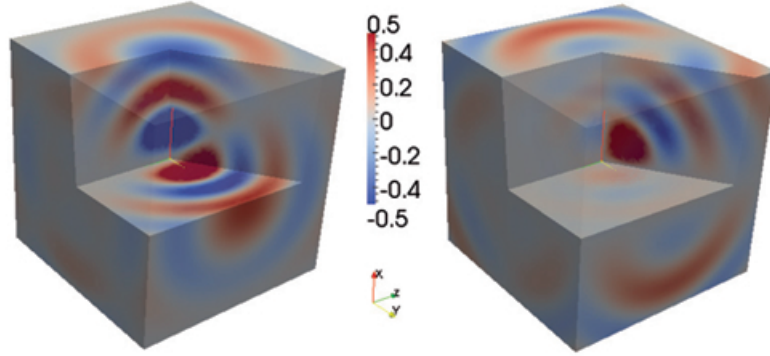
**Figure 5.1** Premières harmoniques sphériques (source : wikipedia).

On cherche la solution homogène du champ de pression sous la forme :

$$p_E^h(\underline{x}) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} A_E(\theta, \varphi) \cdot e^{ik(\theta, \varphi) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_E)} d\theta d\varphi = \sum_{l=0}^{L_E} \sum_{m=-l}^l a_{l,m}^E \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_l^m(\theta, \varphi) e^{ik(\theta, \varphi) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_E)} \sin(\varphi) d\theta d\varphi \quad (5.4)$$

où les coefficients  $a_{l,m}^E$  sont les inconnues du problème, et  $L_E$  le degré de discrétisation.

Le champ vibratoire associé aux fonctions de forme intérieures est présenté dans la figure 5.2.



**Figure 5.2** Partie réelle (gauche) et imaginaire (droite) du champ de pression associé à la fonction de forme de degré 3 et d'indice -2 définie en (5.5).

Ce type de décomposition permet d'utiliser le même formalisme que dans le cas 2D. Les fonctions de forme et le vecteur des inconnues sont définis comme :

$$\phi_{l,m}^{(E)}(\underline{x}) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_l^m(\theta, \varphi) e^{ik(\theta, \varphi) \cdot \underline{x}} \sin\varphi d\theta d\varphi \quad (5.5)$$

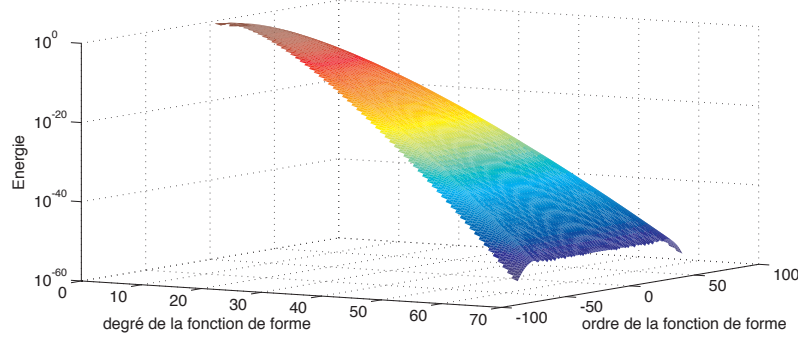
$$a_E = \left[ \phi_{0,0}^{(E)}(\underline{x}), \dots, \phi_{l,-l}^{(E)}(\underline{x}), \dots, \phi_{l,l}^{(E)}(\underline{x}), \dots, \phi_{L_E,-L_E}^{(E)}(\underline{x}), \dots, \phi_{L_E,L_E}^{(E)}(\underline{x}) \right] \quad (5.6)$$

La résolution du problème se ramène donc toujours à la résolution d'un système matriciel  $\mathbf{K}\underline{a} = \underline{f}$ .

## 5.2 Propriétés des fonctions de forme

Dans le chapitre précédent, on a observé que seules les premières fonctions de forme avaient une énergie du même ordre de grandeur, et que la valeur de l'énergie des fonctions de forme d'ordre supérieur décroissait de manière exponentielle jusqu'à la précision machine (voir figure 4.2).

Comme le montre la figure 5.3, l'évolution de l'énergie des fonctions de forme en fonction de leurs indices est similaire au cas 2D. En effet, l'énergie décroît avec l'ordre des fonctions de forme. Mais dans le cas 3D, la méthode d'intégration semi-analytique utilisée (voir partie 5.3) n'est pas limitée par la précision machine. On peut calculer des fonctions de forme ayant une énergie de l'ordre de  $10^{-50}$ . Cela peut être source de difficultés numériques pour l'inversion du système, en effet la précision de la résolution est de l'ordre de  $10^{-16}$ . Pour limiter ces problèmes, le résultat issue de l'intégration analytique doit être tronqué à la précision machine. De la même façon qu'en 2D, pour limiter les problèmes de conditionnement du



**Figure 5.3** Énergie des fonctions de forme  $\phi_{l,m}^{(E)}(\underline{x})$  en fonction de son degré  $l$  et de son ordre  $m$ .

système d'équations algébriques issu de la TVRC, les fonctions de forme utilisées pour le calcul de l'opérateur sont normalisées en énergie. Cela revient à utiliser un préconditionneur diagonal  $\mathbf{D}$  tel que :

$$\mathbf{D}_{ii} = \frac{1}{\sqrt{e_{\Omega}(\phi_i(\underline{x}))}} \quad (5.7)$$

## 5.3 Méthode d'intégration

Afin de détailler les procédures d'intégration utilisées pour calculer les termes de l'opérateur  $\mathbf{K}$ , nous allons nous attacher au calcul d'un terme de la matrice. Ce terme résulte du couplage de la fonction de forme  $\phi_{lm}^{(E)}(\underline{x})$  avec la fonction de forme virtuelle  $\delta\phi_{l'm'}^{(E)}(\underline{x})$ .

Dans le cadre de l'acoustique, le terme  $\mathbf{K}_{(lm),(l'm')}$  est de la forme :

$$\mathbf{K}_{(lm),(l'm')} = \int_{\partial\Omega_E} p(\underline{x}) \overline{v(\underline{x})} ds \quad (5.8)$$

$$= \int_{\partial\Omega_E} \phi_{l,m}^{(E)} \cdot \overline{(\nabla \delta\phi_{l',m'}^{(E)} \cdot \underline{n}_E)} ds \quad (5.9)$$

$$= \int_{\partial\Omega_E} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} -i \underline{k}_E(\theta', \varphi') \cdot \underline{n} Y_l^m(\theta, \varphi) \overline{Y_{l'}^{m'}(\theta', \varphi')} e^{i(\underline{k}_E(\theta, \varphi) - \underline{k}_E(\theta', \varphi')) \cdot \underline{x}} \sin(\varphi) \sin(\varphi') d\theta d\varphi d\theta' d\varphi' ds \quad (5.10)$$

Le calcul de chaque terme de l'opérateur nécessite donc le calcul d'une intégrale sextuple : une intégration double sur le bord, et deux intégrales doubles sur la sphère unité. La stratégie de calcul reste la même que celle développée en 2D (4.2.2).

### 5.3.1 Intégration sur la sphère unité

En mathématiques, la décomposition de Jacobi-Anger (ou identité de Jacobi-Anger) [Colton et Kress, 1992] est une décomposition d'exponentielles de fonction trigonométriques dans la base de leurs harmoniques. Elle permet notamment de convertir les ondes planes en ondes cylindriques. Cette décomposition est utilisée dans la méthode des multipôles rapides [Colino, 2004].

Soit  $\underline{s}$  un vecteur unité de l'espace,  $\underline{v}$  un vecteur de norme  $v$  et de direction  $\hat{v}$ , alors :

$$e^{i\underline{s}\cdot\underline{v}} = 4\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l i^l j_l(v) Y_l^m(\hat{v}) \overline{Y_l^m}(\underline{s}) \quad (5.11)$$

avec  $j_l(t)$  la fonction de Bessel sphérique d'ordre  $l$  définie par  $j_l(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2t}} J_{l+1/2}(t)$  où  $J_n(t)$  est la fonction de Bessel du premier type.

Si on considère l'approximation (5.4) avec comme notations :

$$\underline{k}(\theta, \varphi) = k_a \underline{u}(\theta, \varphi) \quad \underline{x} = r \underline{u}(\theta_x, \varphi_x)$$

où  $\underline{u}(\theta, \varphi)$  est le vecteur unitaire de direction  $\theta$  et  $\varphi$ , alors le champ de pression peut s'écrire :

$$p(\underline{x}) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sum_{l=-L}^L \sum_{m=-l}^l a_l^m Y_l^m(\theta, \varphi) \left[ 4\pi \sum_{l'=-\infty}^{+\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} i^{l'} j_{l'}(k_a r) Y_{l'}^{m'}(\theta_x, \varphi_x) \overline{Y_{l'}^{m'}}(\theta, \varphi) \right] \sin\varphi d\theta d\varphi \quad (5.12)$$

Soit encore :

$$p(\underline{x}) = 4\pi \sum_{l=-L}^L \sum_{m=-l}^l \sum_{l'=-\infty}^{+\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} a_l^m i^{l'} j_{l'}(k_a r) Y_{l'}^{m'}(\theta_x, \varphi_x) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_l^m(\theta, \varphi) \overline{Y_{l'}^{m'}}(\theta, \varphi) \sin\varphi d\theta d\varphi \quad (5.13)$$

En utilisant l'orthogonalité des harmoniques sphériques, cette expression peut se simplifier de la façon suivante :

$$p(\underline{x}) = 4\pi \sum_{l=-L}^L \sum_{m=-l}^l a_l^m i^l j_l(k_a r) Y_l^m(\theta_x, \varphi_x) \quad (5.14)$$

Cette technique de séparation des variables permet de calculer de manière analytique l'intégration sur la sphère unité, le champ de pression ne dépend alors plus que des variables d'espace.

D'autre part, le calcul de la vitesse ne pose aucun problème. En effet, les résultats analytiques suivants permettent de calculer le gradient en coordonnées sphériques.

$$\frac{\partial j_l(k_a r)}{\partial r} = -\frac{1}{2r} j_l(k_a r) + \frac{k_0}{2} j_{l-1}(k_a r) - \frac{k_0}{2} j_{l+1}(k_a r) \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial Y_l^m(\theta, \varphi)}{\partial \theta} = \cotan(\theta) m Y_l^m(\theta, \varphi) + e^{-i\varphi} \sqrt{(l-m)(l+m+1)} Y_l^{m+1}(\theta, \varphi) \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial Y_l^m(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} = i m Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (5.17)$$

### 5.3.2 Intégration sur la surface

L'intégration sur le bord peut se faire soit de manière analytique soit de manière numérique. En effet, comme pour le cas 2D, il existe un résultat analytique pour l'intégration sur une surface plane de forme rectangulaire. Cette approche ne permet pas d'utiliser la décomposition de Jacobi Anger, et il est nécessaire d'effectuer deux intégrales numériques sur la sphère unité.

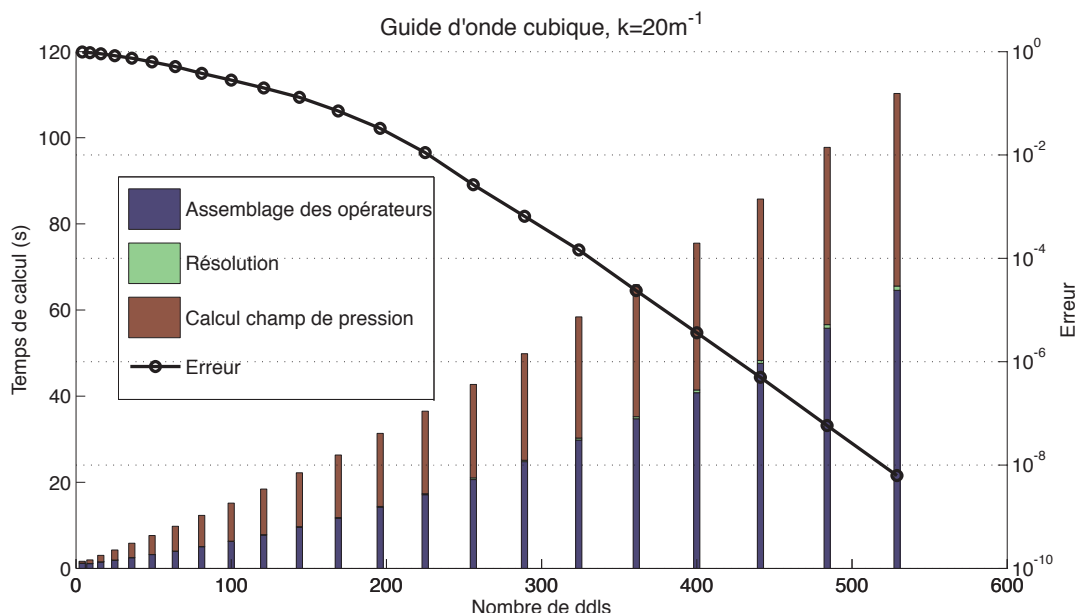
Afin d'essayer d'optimiser le temps de calcul, on privilégie une stratégie de calcul semi-analytique. Les champs de pression et de vitesse des fonctions de forme sont calculés grâce aux formules 5.14-5.15-5.16-5.17 sur des points des bords. Ces points sont associés à des grilles d'intégration, ce qui permet de calculer numériquement les termes de l'opérateur.

## 5.4 Convergence de la méthode

Pour illustrer les propriétés de convergence de la TVRC-Fourier 3D, on considère deux problèmes pour lesquels la solution exacte est connue. Dans un premier temps on s'intéresse à un guide d'onde, puis dans un second temps à la diffraction en milieu infini d'une onde plane par une sphère rigide.

### 5.4.1 Guide d'ondes cubique

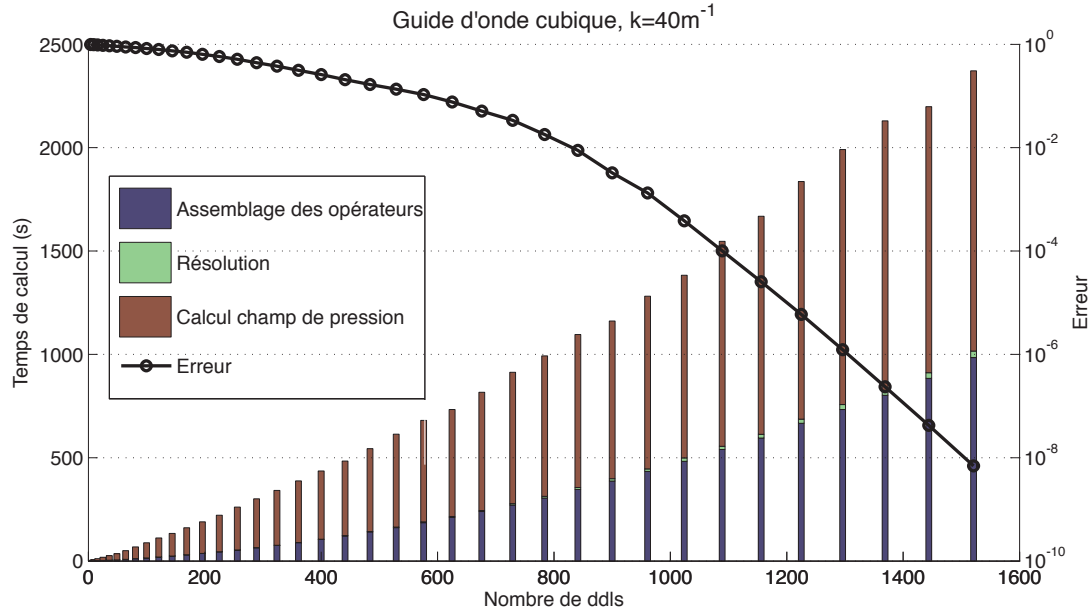
On considère une cavité cubique de  $1 \text{ m}^3$  remplie d'air ( $\rho = 1.25 \text{ kg.m}^{-3}$ , et  $c = 340 \text{ m.s}^{-1}$ ). Les conditions aux limites sont des conditions de Robin associées à une solution exacte de type onde plane de direction  $\theta = 0^\circ$  et  $\varphi = 0^\circ$ . Ce problème est résolu à différentes fréquences telle que  $k = 20$ , et  $40 \text{ m}^{-1}$ , soit  $f \approx 1050$  et  $2100 \text{ Hz}$ .



**Figure 5.4** Évolution de l'erreur et du temps de calcul en fonction du nombre de ddls, pour  $k = 20 \text{ m}^{-1}$  sur le problème défini dans le paragraphe 5.4.1.

### 5.4.1.1 Convergence du champ de pression et temps de calcul

Les figures 5.4 et 5.5 représentent d'une part l'évolution de l'erreur en fonction du nombre de degrés de liberté (ddls), et d'autre part la répartition du temps de calcul, entre la phase d'assemblage, de résolution et de reconstruction du champ de pression. Le nombre de ddls est piloté en augmentant progressivement le degré de la discrétisation  $L_p$ .



**Figure 5.5** Évolution de l'erreur et du temps de calcul en fonction du nombre de ddls, pour  $k = 40\text{m}^{-1}$  sur le problème défini dans le paragraphe 5.4.1.

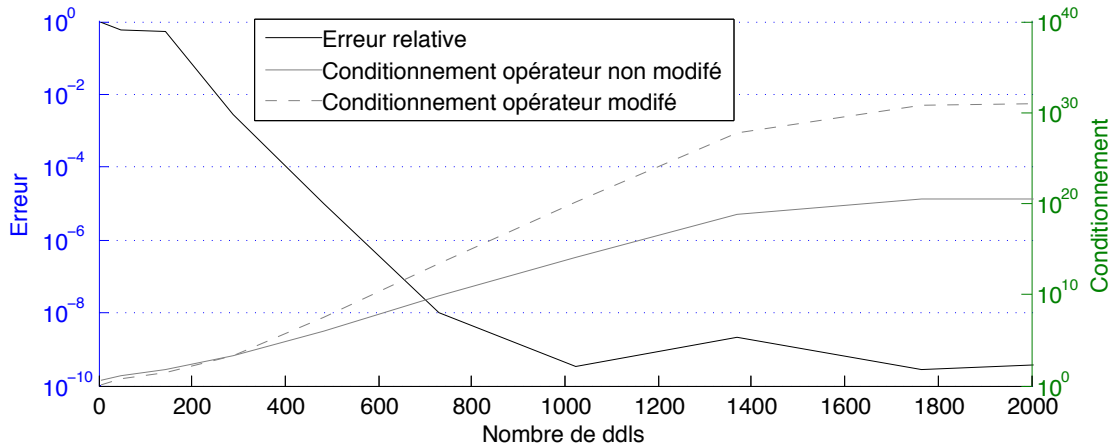
Pour la plus petite des fréquences testées, la TVRC-Fourier 3D résout le problème avec une erreur de l'ordre de 1%, en environ 1 minute et avec seulement 220 degrés de liberté pour déterminer un champ de pression. À titre de comparaison, en utilisant la règle de 10 éléments par longueur d'onde il faudrait un maillage d'environ 6000 ddls pour avoir une solution acceptable avec les éléments finis. Pour la plus haute fréquence, il faut 20 minutes et 830 ddls pour résoudre le problème contre plus de 45 000 ddls pour la méthode des éléments finis.

En terme de temps de calcul, il apparaît que la phase de résolution du système est négligeable devant l'assemblage des opérateurs et la reconstruction du champ de pression. Le temps nécessaire à la reconstruction du champ de pression dépend de la finesse du maillage sur lequel on le calcule. Ici le champ de pression est reconstruit sur un maillage avec une moyenne de 10 éléments par longueur d'onde. On peut très bien imaginer réduire ce temps, en s'intéressant au champ vibratoire uniquement sur des patches.

### 5.4.1.2 Convergence du portrait d'amplitude

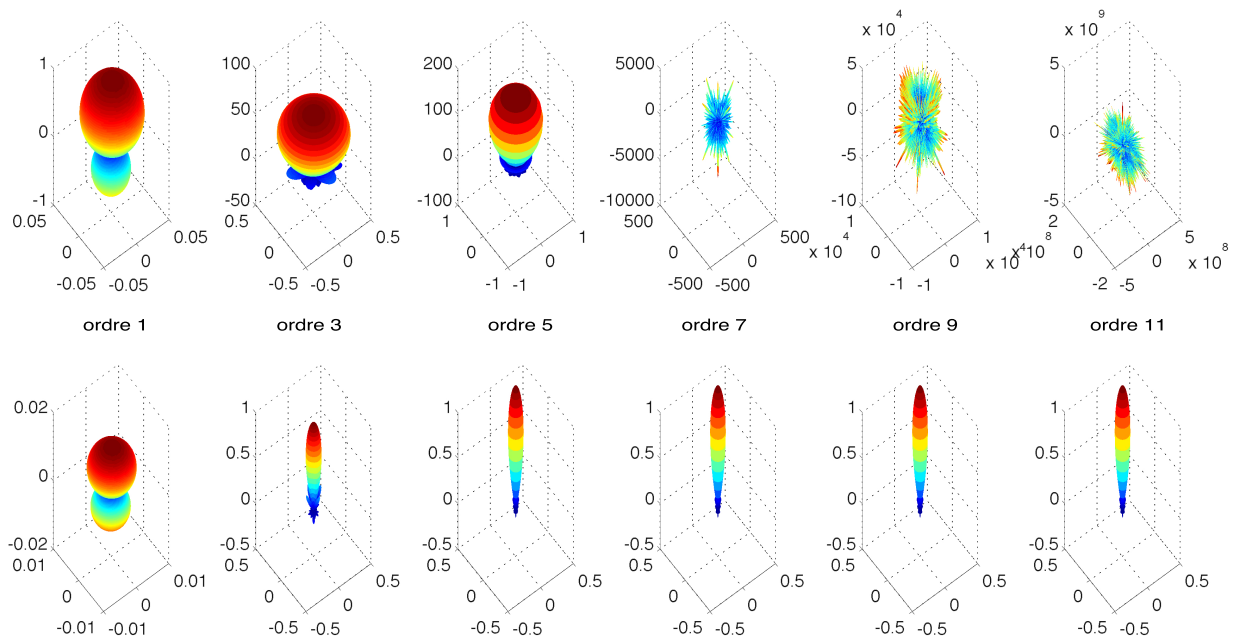
Dans la partie 4.5, on a observé la non convergence du portrait d'amplitude et donné une technique de régularisation. Dans le cas de l'acoustique tridimensionnelle, on observe également une non convergence du portrait d'amplitude induite par un conditionnement très mauvais de l'opérateur. La figure 5.6, montre l'évolution de l'erreur et du conditionnement de l'opérateur avec et sans normalisation des fonctions de forme en fonction du nombre de ddls, pour  $k = 20\text{m}^{-1}$  sur le problème défini dans le paragraphe 5.4.1.





**Figure 5.6** Evolution de l'erreur, du conditionnement de l'opérateur avec (ligne continue) et sans (ligne pointillée) normalisation des fonctions de forme (voir (5.7)) en fonction du nombre de dds, pour  $k = 20\text{m}^{-1}$  sur le problème défini dans la paragraphe 5.4.1.

La figure 5.7 représente l'évolution du portrait d'amplitude avec et sans régularisation. La technique de régularisation est identique à celle développée dans le paragraphe 4.5.2 : les coefficients du spectre sont pondérés par l'énergie de la fonction de forme associée.

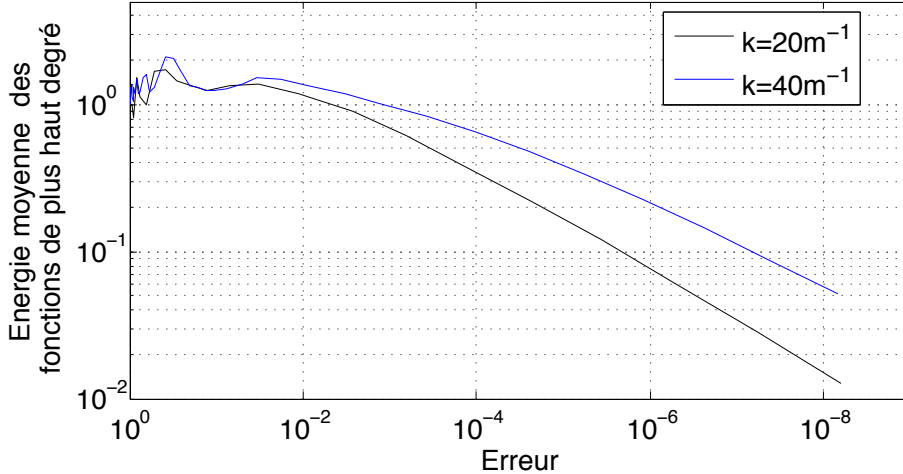


**Figure 5.7** Evolution du portrait d'amplitude avec et sans régularisation en fonction de l'ordre de discrétisation, pour  $k = 20\text{m}^{-1}$  sur le problème défini dans 5.4.1

La méthode de régularisation est très efficace : en effet le portrait d'amplitude obtenu est stable et est très proche de la solution exacte (ici, un dirac de direction  $\underline{z}$  et d'amplitude 1).

### 5.4.1.3 Critère pour choisir l'ordre de discrétisation

Dans le chapitre précédent, on a montré que la convergence de la méthode était pilotée par l'énergie des fonctions de forme de plus haut degré. La figure 5.8 donne le tracé de l'évolution de l'erreur en fonction de l'énergie moyenne des  $2L_p + 1$  fonctions de forme de plus haut degré  $L_p$ .



**Figure 5.8** Evolution de l'erreur en fonction de l'énergie moyenne des  $2L_p + 1$  fonctions de forme de plus haut degré  $L_p$ .

Sur cet exemple, l'erreur commise est comme en 2D pilotée par l'énergie des fonctions de forme de plus haut degré. Le critère heuristique basé sur l'énergie des fonctions de forme de plus haut degré semble donc aussi efficace pour l'acoustique tridimensionnelle.

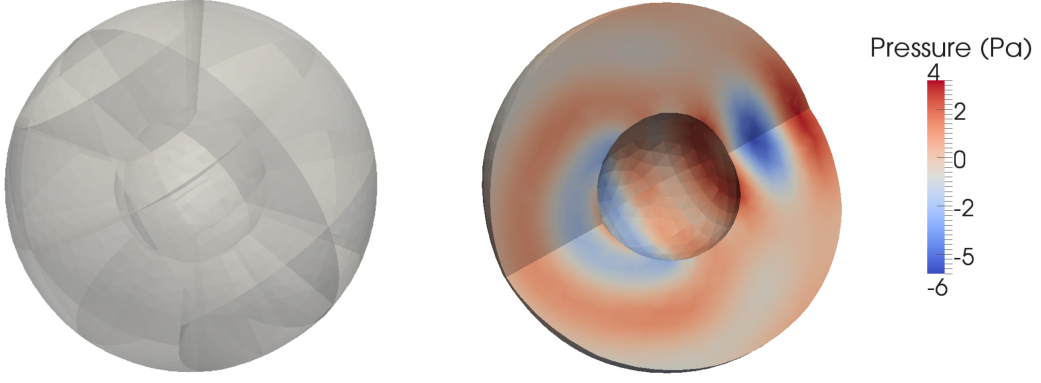
### 5.4.2 Diffraction d'une onde par une sphère en milieu infini

On s'intéresse maintenant à un problème de diffraction d'une onde plane par une sphère rigide de rayon  $R_1$  dans un milieu infini. La solution analytique de ce type de problème est donnée dans [Morse et Ingard, 1968]. L'idée est donc de comparer le résultat obtenu par la TVRC à la solution exacte. Pour traiter la condition de radiation à l'infini, on utilise l'approximation de Bayliss-Turkel au premier ordre des conditions de radiation de Sommerfeld, qui revient à introduire une frontière  $\partial_Z\Omega$  sur laquelle on applique une condition de Robin avec l'impédance normale  $Z$  égale à l'impédance caractéristique du milieu  $Z_c = \rho c$  et une sollicitation  $h_d$  nulle. On choisit  $\partial_Z\Omega$  comme une sphère de rayon  $R_2$ . Cette approximation est facile à mettre en oeuvre, mais entraîne une erreur absolue résiduelle de l'ordre de 1% ([Bayliss *et al.*, 1982]) due à la non vérification de la condition de radiation à l'infini.

La figure 5.9 représente la géométrie du problème de référence et la sous-structuration utilisée.

Le problème est alors défini comme :

$$\begin{aligned} \Delta p_E + k_a^2 p_E &= 0 & \text{dans } \Omega_E \\ \mathcal{L}_v[p_E] &= -v_{inc} & \text{sur } \partial_v \Omega_E \\ p_E - Z_c \mathcal{L}_v[p_E] &= 0 & \text{sur } \partial_Z \Omega_E \end{aligned}$$



**Figure 5.9** Sous-structuration TVRC utilisée pour résoudre le problème de diffraction d'onde par une sphère rigide, et solution à 500 Hz.

Il existe une solution exacte à ce problème, cette solution s'écrit en coordonnées sphériques comme une série de fonctions de Hankel.

$$p_{ex}(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\theta, \varphi) H_n^{(1)}(k_a r) + b_n(\theta, \varphi) H_n^{(2)}(k_a r) \quad (5.18)$$

avec  $H_n^{(1)}(x)$  et  $H_n^{(2)}(x)$  les fonctions de Hankel du premier et du deuxième type. Les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  sont déterminés en résolvant le système suivant :

$$\begin{bmatrix} H_n^{(1)'}(k_a R1) & H_n^{(2)'}(k_a R1) \\ H_n^{(1)'}(k_a R2) - ik_a H_n^{(1)'}(k_a R2) & H_n^{(2)'}(k_a R2) - ik_a H_n^{(2)'}(k_a R2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(2n+1)i^n k_a P_n(\cos\theta) j_n'(k_a R1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

avec  $j_l(t)$  la fonction de Bessel sphérique d'ordre  $l$  définie par  $j_l(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2t}} J_{l+1/2}(t)$  où  $J_n(t)$  est la fonction de Bessel du premier type.

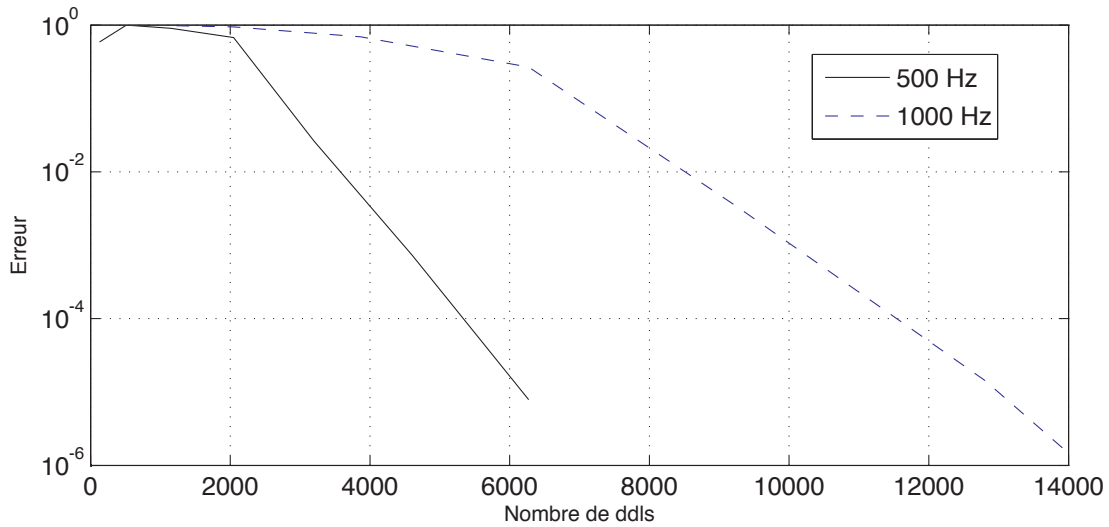
Ce problème est résolu à différentes fréquences  $f = 500$ , et  $1000$  Hz. On définit l'erreur relative comme :

$$\varepsilon = \frac{\int_{\Omega} \|p - p_{ex}\| d\Omega}{\int_{\Omega} \|p_{ex}\| d\Omega} \quad (5.20)$$

La figure 5.10 montre l'évolution de l'erreur 5.20 en fonction du nombre total de degrés de liberté utilisés. Avec suffisamment de fonctions de forme, la TVRC permet de retrouver la solution exacte avec une précision de  $10^{-5}$ . De plus la taille du système matriciel reste relativement faible : à titre de comparaison, la résolution de ce problème par la méthode des éléments finis nécessiterait à 2000Hz environ 5 millions éléments contre 12000 pour la TVRC.

## 5.5 Exemples d'application

Dans cette dernière partie, la TVRC-Fourier 3D est utilisée pour résoudre deux problèmes d'acoustique de complexité croissante. Dans un premier temps c'est un problème défini dans

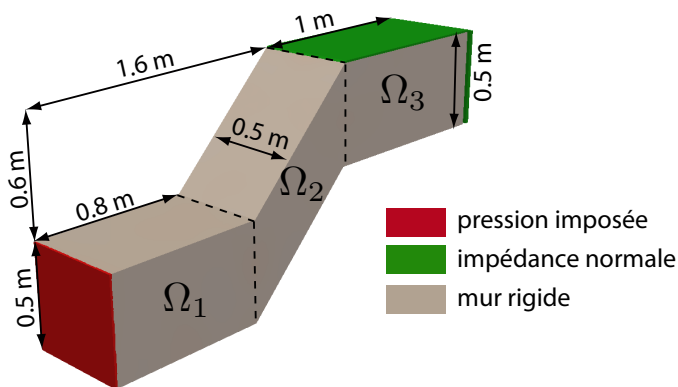


**Figure 5.10** Evolution de l'erreur en fonction du nombre total de degrés de libertés pour le problème de l'onde diffractée par une sphere rigide (partie 5.4.2).

une cavité en  $Z$  qui est résolu, puis dans une cavité de voiture.

### 5.5.1 Cas d'une cavité en $Z$

On considère une cavité en  $Z$  telle que définie dans la figure 5.11. Cette cavité est remplie d'air ( $\rho = 1.25\text{kg.m}^{-3}$ ,  $c = 340\text{m.s}^{-1}$ ) et soumise à une pression imposée à l'une de ses extrémités, à une condition d'impédance normale avec  $Z = 425\text{ Pa.s.m}^{-1}$  sur deux faces à l'autre extrémité, ainsi qu'à une condition de mur rigide sur les autres faces. Pour la résolution, la cavité est décomposée en trois sous domaines  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  et  $\Omega_3$ .

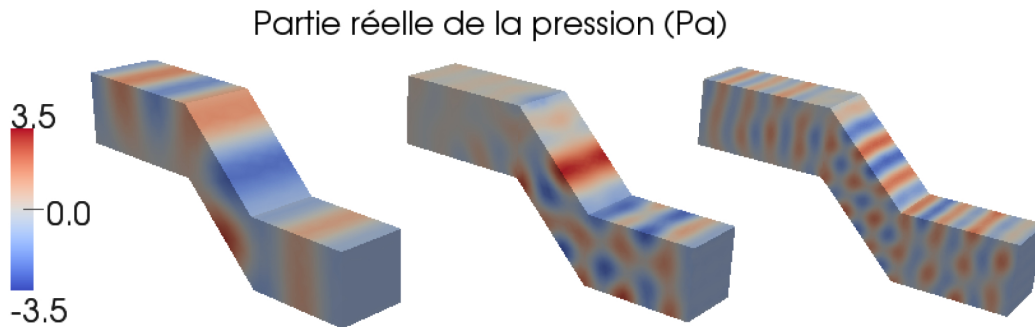


**Figure 5.11** Définition du problème dans une cavité en  $Z$ .

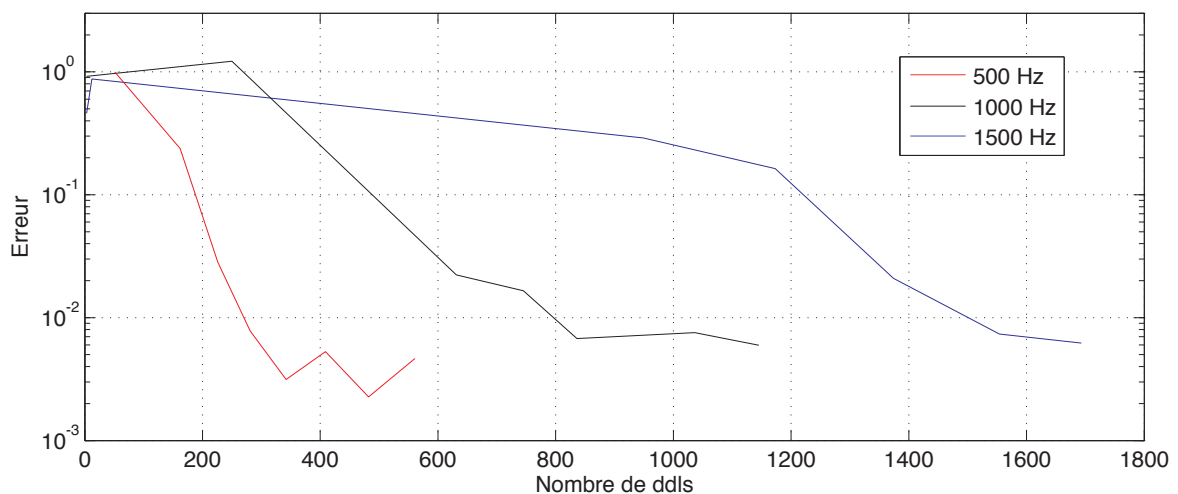
Ce problème est résolu à différentes fréquences telle que  $f = 500, 1000, \text{ et } 1500\text{ Hz}$ . On s'intéresse à l'évolution de l'erreur relative calculée par rapport à une solution éléments finis calculée avec une discrétisation très fine (environ 14 éléments par longueur d'onde) notée  $p_{FEM}$ . Pour la première fréquence, la solution élément finis est obtenue dans un temps raisonnable (moins d'une heure), pour les fréquences supérieures, le calcul exige une très grande quantité de memoire, néanmoins on assume que les solution ainsi obtenue sont proche

de la solution exacte. On peut alors définir l'erreur :

$$\varepsilon = \frac{\int_{\Omega} \|p - p_{FEM}\| d\Omega}{\int_{\Omega} \|p_{FEM}\| d\Omega} \quad (5.21)$$



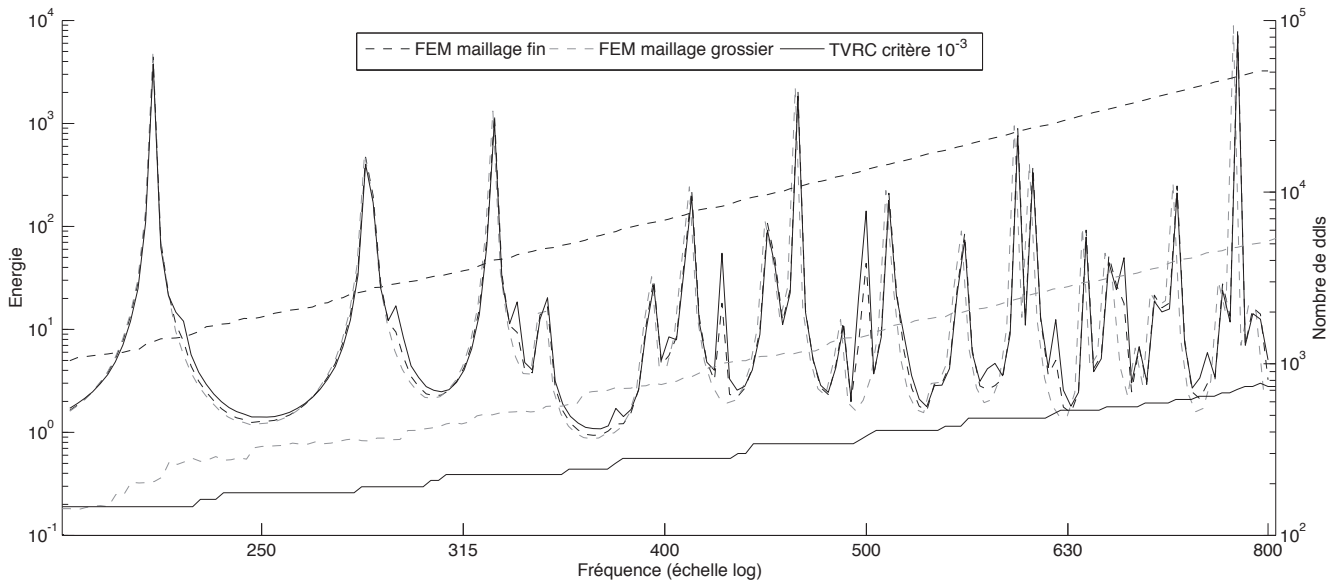
**Figure 5.12** Partie réelle du champ de pression solution du problème défini figure 5.11 à 500 Hz (gauche), 1000Hz (milieu) et 1500Hz (droite).



**Figure 5.13** Evolution de l'erreur relative en fonction du nombre de ddls pour le problème défini dans le figure 5.11.

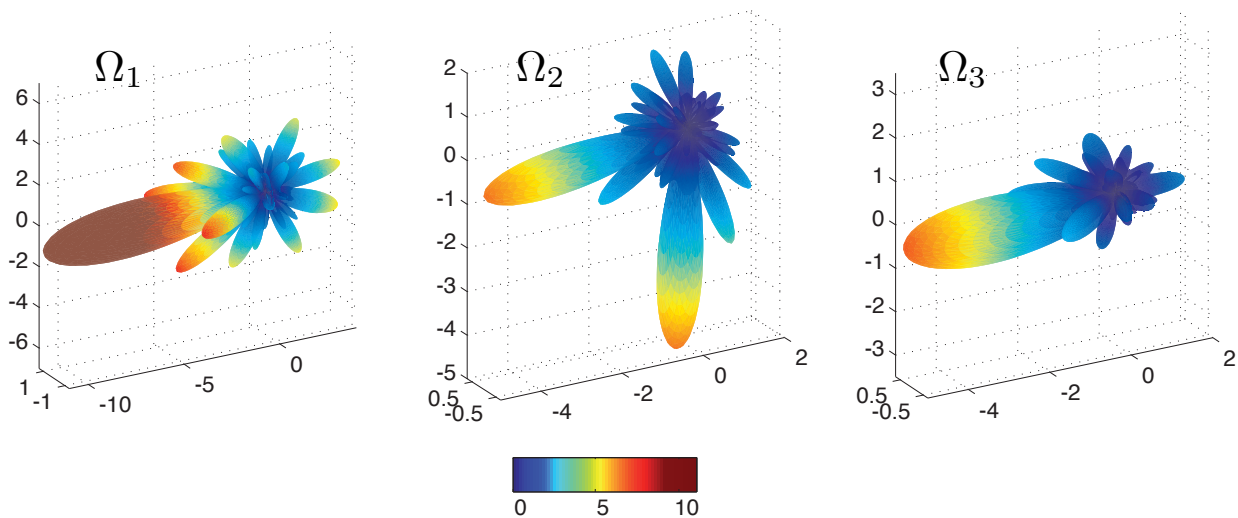
La figure 5.13 représente l'erreur en fonction du nombre de fonctions de forme. Comme on peut le constater, la TVRC-Fourier converge très rapidement.

Les solutions obtenues sont représentées sur la figure 5.12. La figure 5.14 montre la réponse en fréquence du problème défini sur la cavité en Z obtenue avec la TVRC-Fourier 3D, la méthode des éléments finis avec un maillage grossier et fin. La courbe obtenue avec la TVRC est similaire à celles obtenues avec la méthode des éléments finis. Néanmoins on observe que certains modes (comme par exemple à 420 Hz et 500 Hz) sont capturés par la TVRC et la FEM avec maillage fin, mais pas avec un maillage grossier. Enfin, la TVRC-Fourier 3D, réduit considérablement la taille du problème par rapport à la méthode des éléments finis (environ un facteur 100).



**Figure 5.14** Réponse en fréquence du problème défini dans le paragraphe 5.5.1, obtenue avec la TVRC, et la méthode des éléments finis sur un maillage grossier et fin.

La phase de reconstruction du champ de pression à partir du portrait d'amplitude correspond à environ la moitié du temps de calcul. Certes ce temps peut être réduit en calculant la solution sur un maillage grossier, mais à plus haute fréquence, même un maillage grossier nécessite beaucoup de calculs. D'où l'intérêt d'étudier directement le portrait d'amplitude. La figure 5.15 montre les trois portraits d'amplitude régularisé associé à chacun des sous-domaines.



**Figure 5.15** Portrait d'amplitude régularisé pour le problème défini dans la figure 5.11 à 1500 Hz.

Ce mode de représentation permet d'identifier très clairement les directions de propagation. Ainsi dans le premier sous domaine, les ondes se propagent principalement sur l'axe des  $x$ . Dans le deuxième sous domaine, il y a deux directions principales : une sur l'axe des  $x$  et l'autre sur l'axe des  $z$ , c'est cohérents avec la géométrie, en effet l'onde incidente de

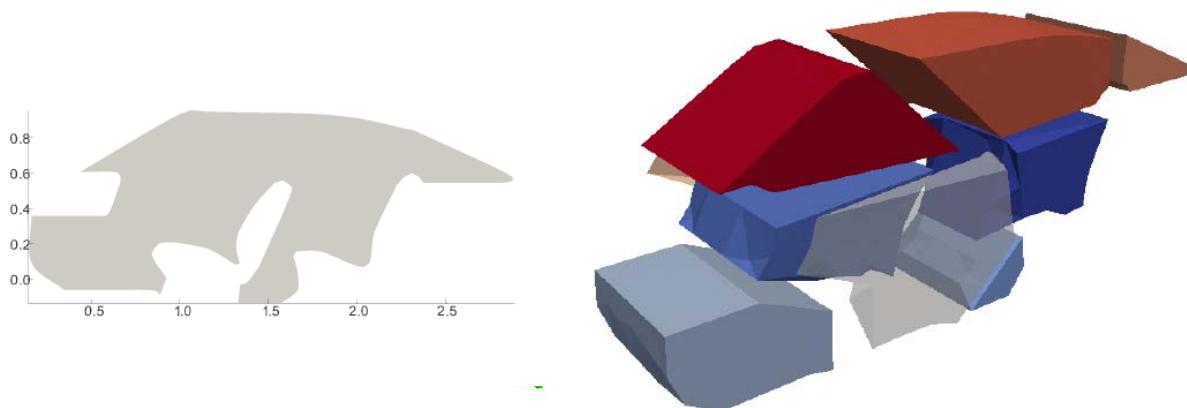
direction  $x$  se réfléchit sur la parois rigide orientée à  $45^\circ$ , et repart donc sur l'axe vertical. De la même façon, la direction principale du sous-domaine  $\Omega_3$  est l'axe des  $x$ . Si les directions de propagation sont facilement identifiables, ce n'est pas le cas des niveaux moyens de pression. Il faudrait étudier de manière plus approfondie le comportement de ce portrait d'amplitude régularisé.

## 5.5.2 Cas d'une cavité automobile

L'objectif de cette partie est de montrer la robustesse de la méthode et sa capacité à résoudre un problème de complexité industrielle telle qu'une cavité acoustique automobile. Dans un premier temps, on résout un problème défini sur une cavité 3D simplifiée générée à partir du problème plan défini dans la partie 4.6. Puis dans un deuxième temps, on appliquera la TVRC-Fourier sur un cas industriel fournit par DAIMLER [Glandier, 2011].

### 5.5.2.1 Cavité simplifiée

Dans ce paragraphe, on résout un problème d'acoustique dans une cavité simplifiée de voiture. La géométrie est générée à partir du problème défini dans la partie 4.6. La figure 5.16, montre la géométrie du problème ainsi que la décomposition en 9 sous-domaines utilisée.



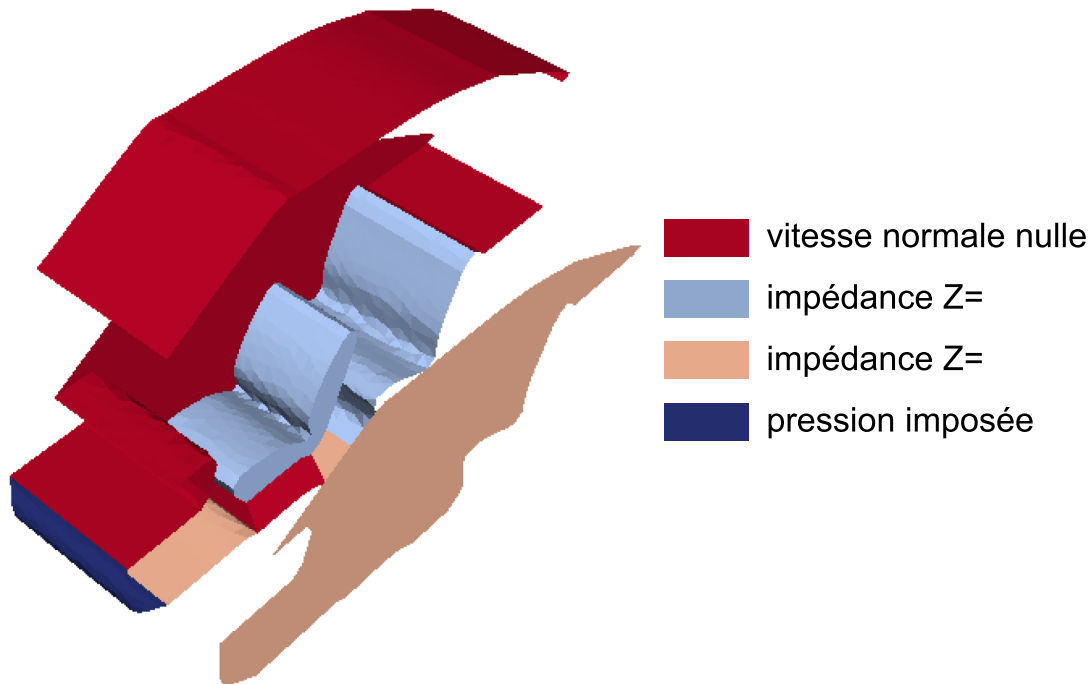
**Figure 5.16** Vue 3D et coupe de la cavité automobile défini de manière analytique.

La cavité est soumise à différentes conditions aux limites (pression imposée, impédance normale et vitesse normale nulle). L'ensemble est excité sur le bord avant par l'intermédiaire d'une pression imposée unitaire. La carte de ces conditions aux limites est représentée sur la figure 5.17.

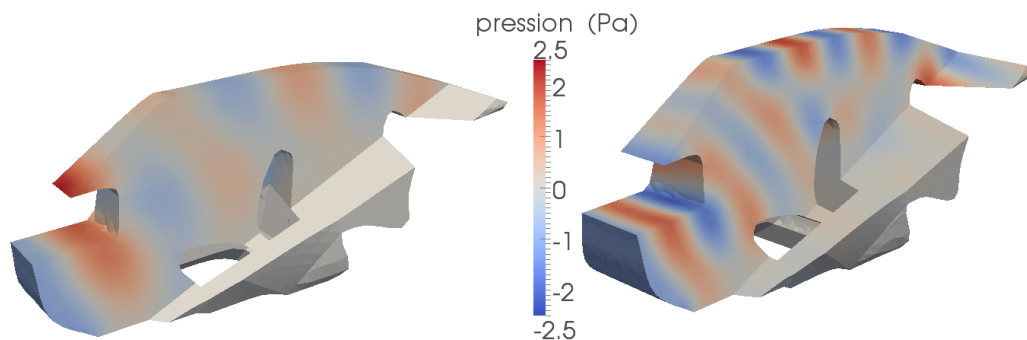
La figure 5.18 montre la partie réelle du champ de pression pour une fréquence d'excitation de 500 et 750 Hz. Ces solutions sont calculées avec respectivement 2120 et 4600 degrés de libertés. À titre indicatif, les maillages nécessaires à l'affichage des champs solution sont respectivement composés de 453 231 et 819 734 noeuds. La TVRC-Fourier semble donc capable de résoudre des problèmes d'acoustique dans des cavités acoustiques complexes.

### 5.5.2.2 Cavité industrielle

L'objectif est de déterminer la réponse vibratoire d'une cavité automobile excitée par une source ponctuelle. La géométrie de la cavité, fournie par DAIMLER dans le cadre du



**Figure 5.17** Vue 3D et coupe de la cavité automobile défini de manière analytique.

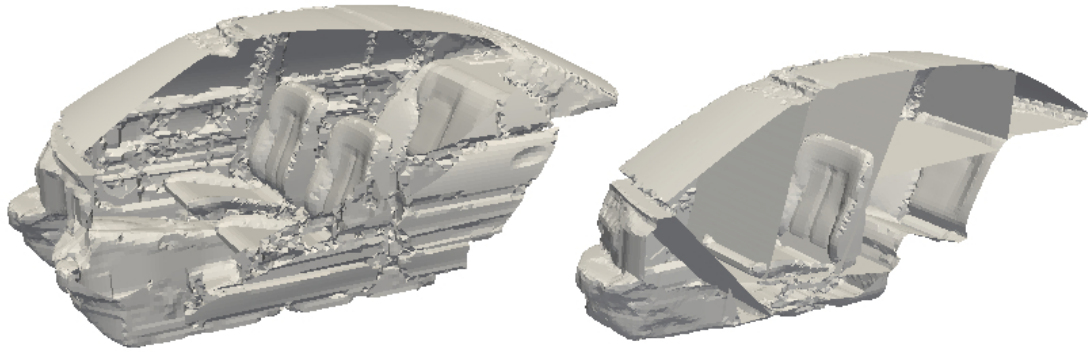


**Figure 5.18** Partie réelle du champ de pression pour une fréquence d'excitation de 500 Hz (gauche) et 750 Hz (droite).

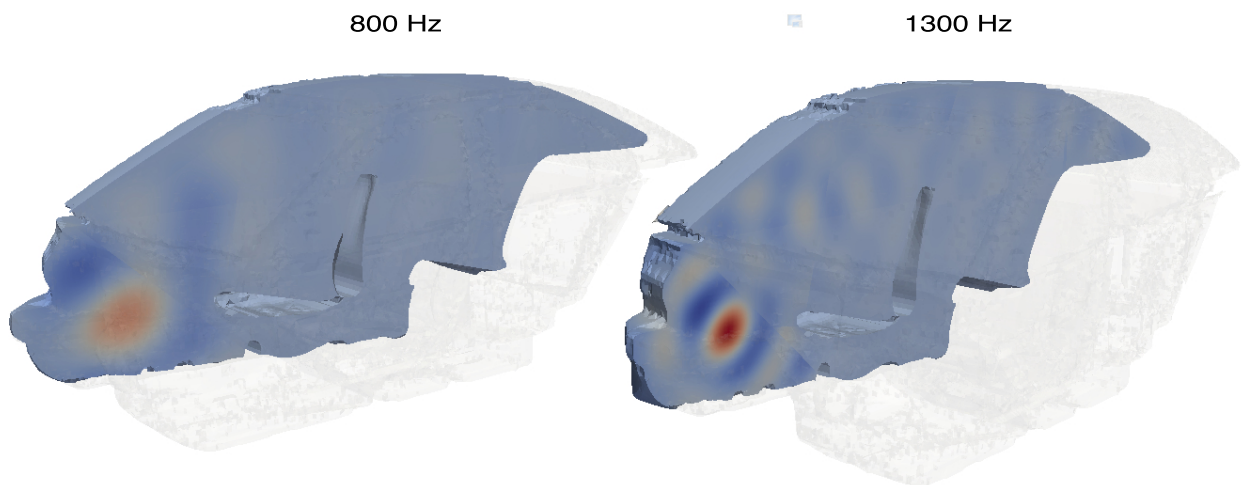
programme Européen ITN Marie Curie project GA-214909 "MID-FREQUENCY - CAE Methodologies for Mid-Frequency Analysis in Vibration and Acoustics". Ce maillage surfacique représente une cavité de Mercedes classe S. Le modèle utilisé est simplifié, en effet on suppose que l'ensemble des parois est soumis à une condition aux limites de type Robin avec une impédances normale de valeur  $Z = 1.81 - 5.55i \text{ Pa.s.m}^{-1}$ . La cavité est soumise à une source ponctuelle situé au niveau des pieds du passager avant droit.

La géométrie originale est représenté sur la gauche de la figure 5.19. Pour pouvoir traiter ce problème avec la TVRC, il faut décomposer la cavité en plusieurs sous-cavités. La cavité est décomposée en 14 sous-cavité (voir partie droite de la figure 5.19). La figure 5.20 montre la partie imaginaire du champ de pression pour les fréquences d'excitation de 800 et 1300 Hz, ces solutions sont obtenues avec respectivement 5500 et 8300 degrés de liberté. La solution semble cohérente avec les conditions aux limites imposées. En effet avec une





**Figure 5.19** Maillage de la cavité de classe S fourni par DAIMLER.



**Figure 5.20** Partie imaginaire du champ de pression solution du problème défini dans le paragraphe 5.5.2.

impédance normale si petite, on est proche d'une condition de bord mou, et dans la pratique la pression est très proche de zéros sur les bords de la cavité. Néanmoins on peut observer quelques discontinuités au niveau des interfaces. Ces discontinuités seraient dues à la qualité du maillage utilisé. Après les opérations de découpage et d'importation, le maillage sur lequel utilisé pour les différentes intégrales surfaciques n'est pas parfait, il y a environ 5% des éléments qui ont une normale extérieure dans le mauvais sens. Il semblerait que ce soit l'origine des discontinuités, en effet dans le cas où le maillage utilisé pour les intégrations surfaciques est parfaitement défini (comme au paragraphe 5.5.2.1), la TVRC donne une solution qui vérifie les conditions de continuité ainsi que les conditions aux limites. Dans le cas contraire, la TVRC permet quand même d'obtenir une solution qui vérifie quasiment les différentes conditions aux limites. La TVRC-Fourier semble donc capable de résoudre efficacement et de manière robuste des problèmes d'acoustique dans des cavités acoustiques complexes.

## 5.6 Conclusion

Ce chapitre présente l'extension de la TVCR à l'analyse de problèmes de vibrations acoustiques 3D dans le domaine des moyennes fréquences. L'utilisation des harmoniques sphériques

pour représenter le portrait d'amplitudes, permet de mettre en place une méthode d'intégration efficace à travers un schéma semi-analytique grâce à la décomposition de Jacobi Anger. La convergence exponentielle de la méthode est illustrée sur deux exemples pour lesquels la solution exacte est connue : un guide d'onde cubique et la diffraction d'une onde plane par une sphère dans un milieu infini. D'autre part la méthode de régularisation du portrait d'amplitude introduite dans le chapitre 4, est appliquée avec succès à ce type de problèmes. Le critère heuristique basé sur des considérations énergétiques permettant de déterminer l'ordre optimal de discrétisation est vérifié sur ces deux exemples. Enfin la robustesse de la méthode est prouvée, en appliquant avec succès la TVRC-Fourier à des problèmes d'acoustique tridimensionnelle définis sur des géométries complexes. Les travaux futurs peuvent être d'une part, l'extension aux problèmes de vibro-acoustique en 3 dimensions, et d'autre part, une analyse plus poussée du portrait d'amplitude régularisé.

---

# Application de la TVRC-Fourier aux problèmes de couplage vibro-acoustique

CE CHAPITRE présente la démarche mise en place pour appliquer la TVRC-Fourier à la résolution de problèmes de couplage vibro-acoustique. Dans un premier temps, l'approximation de type Fourier est appliquée aux problèmes de plaques en flexion. À la différence de l'acoustique bi-dimensionnelle, l'approximation utilise des ondes évanescentes de bord. Néanmoins, le formalisme est identique à celui développé pour l'acoustique 2D ce qui permet une mise en oeuvre rapide. La convergence est étudiée sur un exemple pour lequel il existe une solution exacte. Puis dans un deuxième temps, la TVRC-Fourier est appliquée à la résolution de problèmes de vibro-acoustique. C'est la première fois que la TVRC est utilisée sur ce type de problèmes. La prise en compte du couplage fort entre une cavité acoustique et une plaque nécessite d'une part la prise en compte d'ondes évanescentes acoustiques localisées sur le bord de la cavité commun avec la plaque, et d'autre part d'introduire des solutions particulières dues au chargement surfacique de la plaque. Même si le formalisme est identique aux problèmes précédemment étudiés, le couplage faible complexifie le calcul de l'opérateur. Cette mise en oeuvre est présentée sur un exemple de problème de couplage vibro-acoustique 3D.

## Sommaire

<b>6.1</b>	<b>La TVRC-Fourier appliquée aux plaques en flexion . . . . .</b>	<b>83</b>
6.1.1	Problèmes de référence et formulation variationnelle associée . . . . .	83
6.1.2	Approximation du champ de déplacement . . . . .	84
6.1.3	Convergence de la méthode . . . . .	85
6.1.4	Portraits d'amplitude régularisés . . . . .	87

<b>6.2</b>	<b>La TVCR-Fourier appliquée aux problèmes de vibro-acoustique tridimensionnelle</b>	<b>87</b>
6.2.1	Problèmes de référence et formulation variationnelle associée	88
6.2.2	Champ de pression acoustique	89
6.2.3	Champ de déplacements structuraux	91
6.2.4	Assemblage de l'opérateur	92
6.2.5	Solution du problème	93
<b>6.3</b>	<b>Conclusion</b>	<b>94</b>

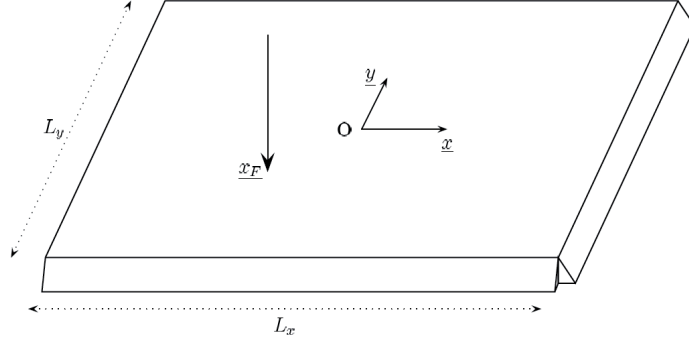
---

## 6.1 La TVRC-Fourier appliquée aux plaques en flexion

Dans cette partie l'approximation de type Fourier est appliquée aux problèmes de plaques en flexion pure. Après avoir rappelé les équations du problème de référence, sa reformulation par la TVRC et l'approximation utilisée, la convergence est étudiée sur une plaque rectangulaire simplement supportée excitée par une force ponctuelle.

### 6.1.1 Problèmes de référence et formulation variationnelle associée

On considère une structure  $\Omega$  constituée d'une plaque mince en acier ( $E = 200.10^9$  N/m<sup>2</sup>,  $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup>,  $\nu = 0.3$ ) qui a une géométrie parallélépipédique (épaisseur  $h$ , dimensions géométriques  $L_x \times L_y$ ). Ses bords sont simplement supportés par des arêtes rectilignes. Les conditions limites correspondantes se traduisent donc par un déplacement et un moment nul sur ses bords. La plaque est soumise à une force ponctuelle en  $\underline{x}_F$ , de direction perpendiculaire à sa surface moyenne. La fréquence d'excitation est  $\omega$ .



**Figure 6.1** Plaque simplement supportée.

Les équations que doivent vérifier la solution exacte sont : trouver  $w$  tel que

$$\Delta\Delta w - k_p^4 w = \frac{F}{D} \delta(x, x_F) \text{ sur } \Omega \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} w &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \mathcal{L}_M[w_E] &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned} \quad (6.2)$$

Avec  $\underline{x}_F = (0.05, -0.1)$  m,  $\omega = 2\pi \times 2000$  Hz,  $h = 3$  mm,  $L_x = .7$  m,  $L_y = 1$  m et  $\eta = 0.01$ . Dans ce cas, la longueur d'onde est de 0.12 m, et il y a environ 8 longueurs d'onde dans la structure.

Deux cas vont être considérés :

1. la plaque est décomposée en une seule sous structure ;
2. la plaque est décomposée en deux sous structures identiques de dimension  $L_x \times L_y/2$ . On note  $\Upsilon_{12}$  l'interface commune à ses deux sous-structure. Dans ce cas, il faut rajouter les conditions limites suivante :

$$\begin{aligned} w_1 - w_2 &= 0 \\ \mathcal{L}_\theta[w_1] + \mathcal{L}_\theta[w_2] &= 0 \\ \mathcal{L}_M[w_1] - \mathcal{L}_M[w_2] &= 0 \\ \mathcal{L}_T[w_1] + \mathcal{L}_T[w_2] &= 0 \end{aligned} \quad \text{sur } \Upsilon_{12} \quad (6.3)$$

La formulation variationnelle du problème utilisée pour ce type de problème est d'après l'équation (3.5) :

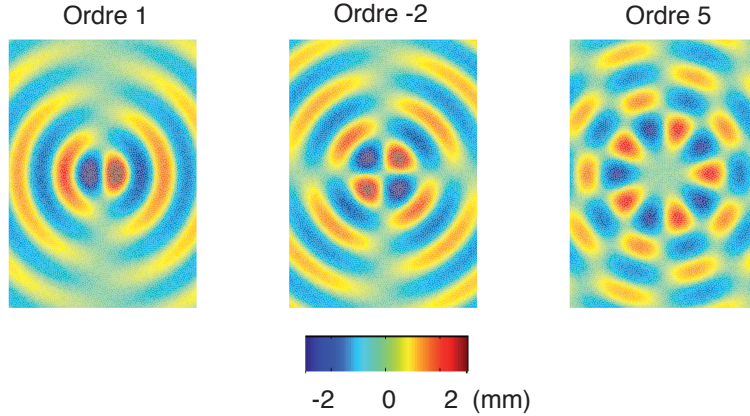
$$\Re \left\{ \sum_{\Omega_E} \int_{\partial_w \Omega} i\omega (\overline{w - w_{dE}}) \mathcal{L}_T[\delta w_E] ds + \sum_{\Omega_E} \int_{\partial_M S_E} i\omega (\mathcal{L}_M[w_E] - M_{dE}) \overline{\mathcal{L}_\theta[\delta w_E]} ds \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{12}} i\omega (\overline{w_1 - w_2}) \mathcal{L}_T[\delta w_1 - \delta w_2] + i\omega \overline{\mathcal{L}_\theta[w_1 + w_2]} \mathcal{L}_M[\delta w_1 + \delta w_2] ds \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{12}} i\omega \mathcal{L}_M[w_1 - w_2] \overline{\mathcal{L}_\theta[\delta w_1 - \delta w_2]} + i\omega \mathcal{L}_T[w_1 + w_2] (\overline{\delta w_1 + \delta w_2}) ds \right\} = 0, \\ \forall (\delta w_1, \delta w_2) \in \mathcal{S}_{ad,0}^{(1)} \times \mathcal{S}_{ad,0}^{(2)} \quad (6.4)$$

### 6.1.2 Approximation du champ de déplacement

On sait d'après (3.24) que la solution homogène du problème de vibration est cherchée comme une distribution intégrale d'ondes propagatives et d'ondes évanescentes de bord. Dans le cadre de l'approximation Fourier, les portraits d'amplitudes associés sont discrétisés à l'aide de séries de Fourier.

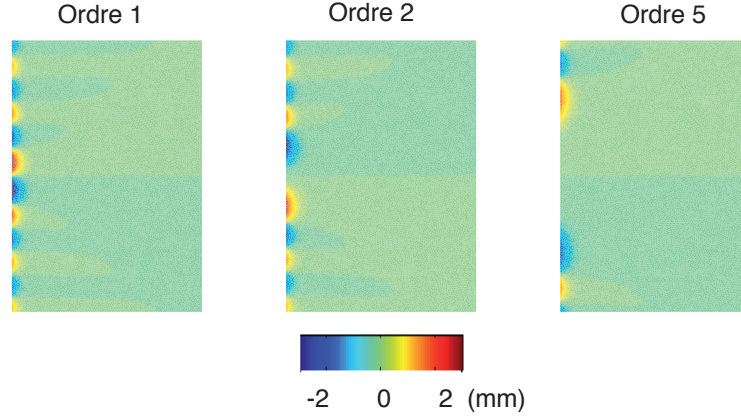
$$w_E^h(\underline{x}) = \sum_{l=-L_p}^{L_p} a_{l,p}^E \int_0^{2\pi} e^{il\theta} e^{ik_E^{s,p}(\theta) \cdot \underline{x}} d\theta + \sum_{bord} \sum_{l=-L_{e,b}}^{L_{e,b}} a_{l,b}^E \int_0^{2\pi} e^{il\theta} e^{ik_E^{s,e}(\theta) \cdot \underline{x}} d\theta \quad (6.5)$$

avec  $\underline{k}_E^{s,p} = k_s (\cos(\theta) \underline{\tau}_1 + \sin(\theta) \underline{\tau}_2)$  et  $\underline{k}_E^{s,e} = -ik_s \sqrt{1 + (\cos(\frac{\theta}{2}))^2} \underline{n} + k_s \cos(\frac{\theta}{2}) \underline{\tau}$ . Les figures 6.2 et 6.3 représentent la partie réelle du champ de déplacement associé à ces fonctions de forme.



**Figure 6.2** Partie réelle du champ de déplacement associé aux fonctions de forme intérieures d'ordre 1, 2 et 5.

Le formalisme est identique à celui utilisé pour l'acoustique bidimensionnelle, la méthode de calcul de l'opérateur se fait donc de manière identique. On utilise donc une méthode d'intégration numérique : la trace des fonctions de forme (déplacement, rotation, moment et effort tranchant) est évaluée numériquement sur un ensemble de points du bord de la plaque. Ces points sont associés à des grilles d'intégration, ce qui permet dans un deuxième temps de calculer les termes de l'opérateur associés à la formulation variationnelle.



**Figure 6.3** Partie réelle du champ de déplacement associé aux fonctions de forme de bord d'ordre 1, 2 et 5.

Dans le cas où il n'y a qu'une seule sous-structure, d'après les équations (3.16), (6.5) et (3.26), la solution est cherchée sous la forme :

$$w(\underline{x}) = \sum_{l=-L_p}^{L_p} a_{l,p} \int_0^{2\pi} e^{il\theta} e^{ik_1^{s,p}(\theta) \cdot \underline{x}} d\theta + \sum_{bord} \sum_{l=-L_{e,b}}^{L_{e,b}} a_{l,b} \int_0^{2\pi} e^{il\theta} e^{ik_1^{s,e}(\theta) \cdot \underline{x}} d\theta - \frac{i}{k^s 2D} q_d (H_0(k^s \|\underline{x} - \underline{x}_{qd}\|) - H_0(ik^s \|\underline{x} - \underline{x}_{qd}\|)) \quad (6.6)$$

Dans le cas (2), c'est à dire lorsque la plaque est décomposée en deux sous-structures, si on considère que le point de chargement se situe dans la première sous-structure, alors la solution est cherchée comme :

$$w_1(\underline{x}) = \sum_{l=-L_p}^{L_p} a_{l,p}^1 \int_0^{2\pi} e^{il\theta} e^{ik_1^{s,p}(\theta) \cdot \underline{x}} d\theta + \sum_{bord} \sum_{l=-L_{e,b}}^{L_{e,b}} a_{l,b}^1 \int_0^{2\pi} e^{il\theta} e^{ik_1^{s,e}(\theta) \cdot \underline{x}} d\theta - \frac{i}{k^s 2D} q_d (H_0(k^s \|\underline{x} - \underline{x}_{qd}\|) - H_0(ik^s \|\underline{x} - \underline{x}_{qd}\|)) \quad (6.7)$$

$$w_2(\underline{x}) = \sum_{l=-L_p}^{L_p} a_{l,p}^2 \int_0^{2\pi} e^{il\theta} e^{ik_2^{s,p}(\theta) \cdot \underline{x}} d\theta + \sum_{bord} \sum_{l=-L_{e,b}}^{L_{e,b}} a_{l,b}^2 \int_0^{2\pi} e^{il\theta} e^{ik_2^{s,e}(\theta) \cdot \underline{x}} d\theta \quad (6.8)$$

### 6.1.3 Convergence de la méthode

Pour ce type de problème, la solution exacte peut être obtenue en utilisant la base des modes propres de la plaque, notés  $\varphi_{mn}$ , qui vérifient (6.1) et (6.2) :

$$w_{ex}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \varphi_{mn}(x, y) \quad (6.9)$$

$$\varphi_{mn} = \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right)$$

Les conditions aux limites (6.2) peuvent s'écrire de façon simplifiée :

$$\begin{aligned} w &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned} \quad (6.10)$$

En injectant (6.9) dans (6.10), en multipliant par  $\varphi_{mn}$ , et en intégrant sur  $\Omega$ , on obtient, sachant que  $\int_{\Omega} \varphi_{mn} \varphi_{pq} ds = \delta_{mp} \delta_{nq} \frac{L_x L_y}{4}$ ,

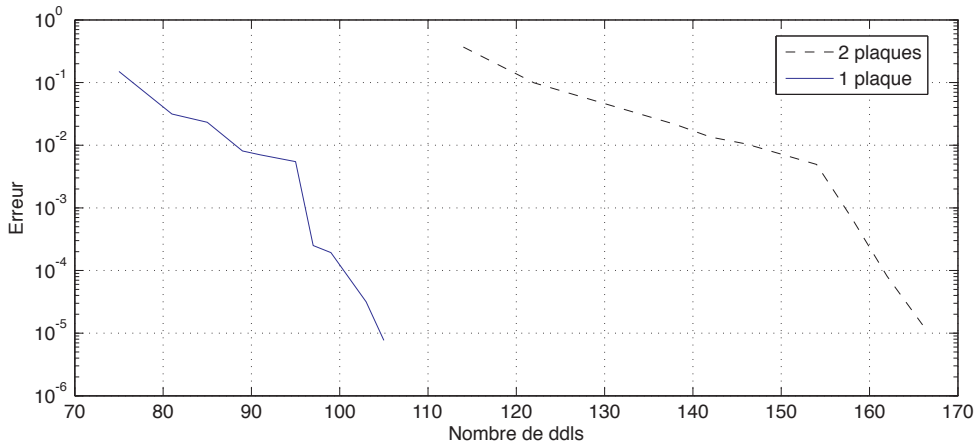
$$\begin{aligned} a_{mn} &= \frac{F \sin\left(\frac{m\pi x_F}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_F}{L_y}\right)}{\frac{L_x L_y}{4} \rho h (\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \\ \omega_{mn}^2 &= \frac{D}{\rho h} \left( \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 \right) \end{aligned}$$

Pour obtenir la solution exacte, la somme infinie de (6.9) a du être tronquée :  $w_{ex}^h(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn} \varphi_{mn}(x, y)$ . Les indices  $M$  et  $N$  ont été choisis de manière à ce que les termes omis aient une influence négligeable. En pratique, il suffit de prendre  $M \gg \frac{L_x}{\pi} \sqrt{\frac{\omega^2 \rho h}{D}}$  et  $N \gg \frac{L_y}{\pi} \sqrt{\frac{\omega^2 \rho h}{D}}$ .

Pour quantifier la convergence, on définit l'erreur suivante :

$$\varepsilon = \frac{\int_{\Omega} \|w - w_{ex}\| d\Omega}{\int_{\Omega} \|w_{ex}\| d\Omega} \quad (6.11)$$

La figure 6.6 représente l'évolution de cette erreur en fonction du nombre de dds pour le



**Figure 6.4** Évolution de l'erreur en fonction du nombre de dds pour le problème défini dans le paragraphe 6.1.1.

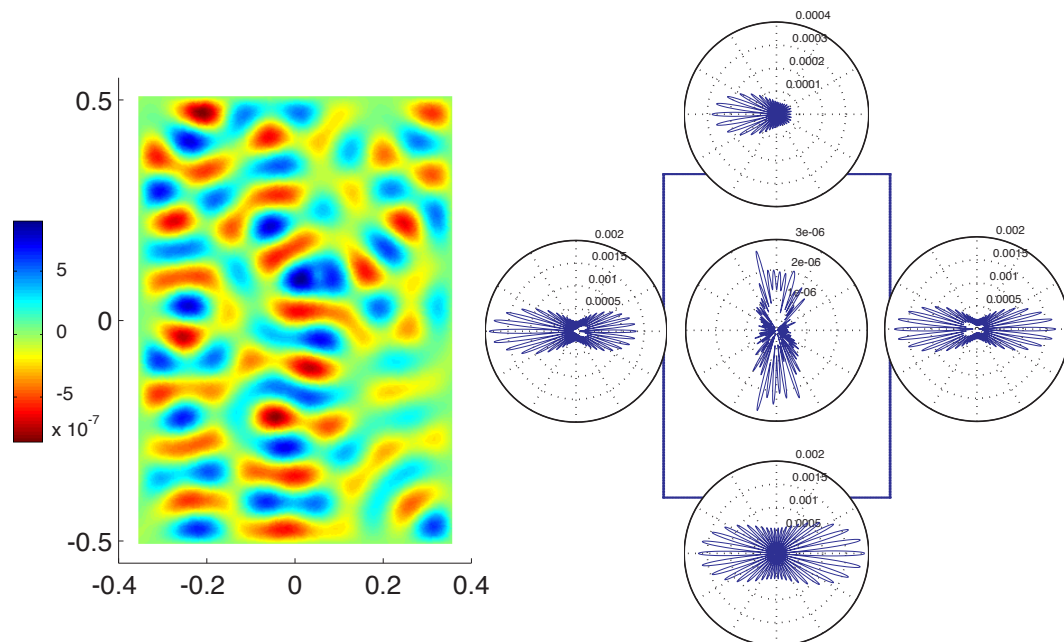
problème défini sur la figure 6.1. Les deux cas traités convergent vers la solution exacte. On retrouve les propriétés de convergence classique de la TVRC. En effet, le taux de convergence est exponentiel et la convergence est plus rapide pour le modèle avec une seule sous-structure. Comme pour le cas de l'acoustique, la TVRC appliquée aux plaques en flexion est une  $p$ -méthode.



### 6.1.4 Portraits d'amplitude régularisés

La figure 6.5 représente d'une part la partie réelle du champ de déplacement solution du problème défini dans la figure 6.1. D'autre part, l'ensemble des portraits d'amplitude régularisés associés aux ondes intérieures et aux ondes évanescente de chacun des bords.

La technique de régularisation, qui consiste à pondérer les amplitudes par l'énergie de leurs fonctions de formes, est très efficace pour le portrait d'amplitude associé aux ondes propagatives. En effet, on peut clairement identifier les directions de propagation, et son amplitude moyenne est relativement proche du déplacement moyen. Par contre, les portraits d'amplitudes régularisés associés aux ondes de bords n'apportent pas d'information pertinente. Leurs amplitudes moyennes sont largement supérieures au niveau moyen du champ de déplacement. Ces ondes étant localisées sur les bords de la structure, elles n'ont pas une grande influence sur les flux d'énergie, l'étude de leur amplitudes à moins de sens que pour les ondes intérieures.



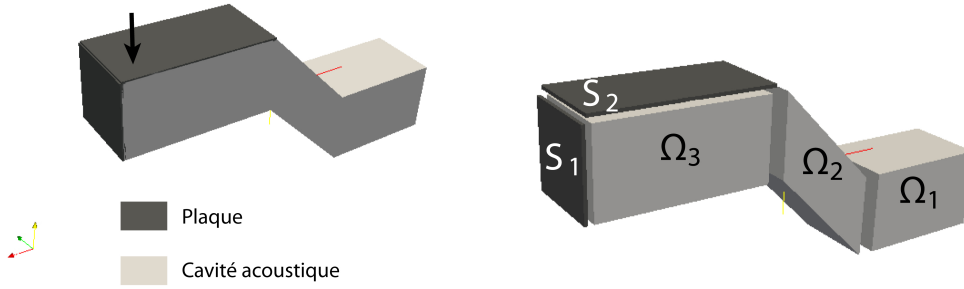
**Figure 6.5** Partie réelle du champ de déplacement solution du problème défini dans la figure 6.1 (gauche), et portraits d'amplitude régularisés associés aux ondes intérieures et aux ondes de bords (droite).

## 6.2 La TVCR-Fourier appliquée aux problèmes de vibro-acoustique tridimensionnelle

La formulation variationnelle de la TVRC a été adaptée aux problèmes de couplage vibro-acoustique dans le chapitre 3. Dans le chapitre 5, la TVRC a fait ses preuves en acoustique tridimensionnelle. On vient de montrer, que l'approximation de type Fourier donnait de bon résultat dans la résolution de problèmes de plaques minces en flexion. Dans cette partie, la démarche mise en place pour résoudre ce type de problèmes est présentée sur le problème défini dans la partie 1.1.

### 6.2.1 Problèmes de référence et formulation variationnelle associée

Le problème de couplage vibro-acoustique considéré (voir figure 6.6) est une cavité acoustique remplie d'air ( $c = 340 \text{ m.s}^{-1}$  et  $\rho = 1.25 \text{ kg.m}^{-3}$ ) en forme de Z décomposée en trois sous-cavités  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  et  $\Omega_3$  et couplée à deux plaques minces en acier  $S_1$  et  $S_2$  en acier ( $E = 200.10^9 \text{ N/m}^2$ ,  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ ,  $\nu = 0.3$ ) et d'épaisseur 3mm. Les deux plaques sont couplées à la cavité  $\Omega_3$ , et sont supposée en appuis simples sur des arêtes rectilignes. L'ensemble des bords de la cavité acoustique sont soumis à une condition d'impédance normale avec  $Z = 250 \text{ Pa.s.m}^{-1}$  La sollicitation est une force ponctuelle normale à la plaque  $S_2$ .



**Figure 6.6** Définition du problème de couplage vibro-acoustique.

Les inconnues du problèmes sont d'une part les champs de pression  $p_1$ ,  $p_2$  et  $p_3$  à l'intérieur des trois sous-cavités, et le champ de déplacement  $w_1$  et  $w_2$  à l'intérieur des deux plaques. Le problème est alors :

trouver  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ ,  $w_1$  et  $w_2$  tels que :

$$\begin{aligned}
 \Delta p_E + k_a^2 p_E &= 0 && \text{dans } \Omega_E, \quad E \in \{1, 2, 3\} \\
 \Delta \Delta w_1 - k_s^4 w_1 &= 0 && \text{dans } S_1 \\
 \Delta \Delta w_2 - k_p^4 w_2 &= \frac{F}{D} \delta(x, x_F) && \text{dans } S_2
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

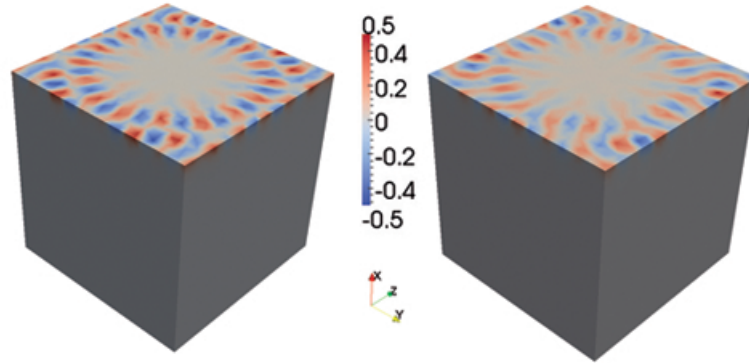
$$\begin{aligned}
 p_E - Z_E \mathcal{L}_v[p_E] &= h_{dE} && \text{sur } \partial_Z \Omega_E \\
 p_E - p_{E'} &= 0 && \text{sur } \Gamma_{EE'} \\
 \mathcal{L}_v[p_E] + \mathcal{L}_v[p_{E'}] &= 0 && \text{sur } \Gamma_{EE'} \\
 w_E &= 0 && \text{sur } \partial_w S_E \\
 \mathcal{L}_M[w_E] &= 0 && \text{sur } \partial_M S_E \\
 w_E &= 0 && \text{sur } \tilde{\Upsilon}_{12} \\
 w_{E'} &= 0 && \text{sur } \tilde{\Upsilon}_{12} \\
 \mathcal{L}_\theta[w_E] + \mathcal{L}_\theta[w_{E'}] &= 0 && \text{sur } \tilde{\Upsilon}_{12} \\
 \mathcal{L}_M[w_E] - \mathcal{L}_M[w_{E'}] &= 0 && \text{sur } \tilde{\Upsilon}_{12}
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

La formulation variationnelle du problème utilisée pour ce type de problème est d'après l'équation (3.5) :

$$\begin{aligned}
 \Re \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\Omega_E} \int_{\partial_Z \Omega_E} \left( ((1 - Z_E \mathcal{L}_v) [p_E] - h_{dE}) \overline{\mathcal{L}_v[\delta p_E]} + \left( (\mathcal{L}_v - 1/Z_E) [p_E] + h_{dE}/Z_E \right) \delta p_E \right) ds \right. \\
 + \frac{1}{2} \sum_{\Gamma_{EE'}} \int_{\Gamma_{EE'}} \left( (p_E - p_{E'}) \overline{\mathcal{L}_v[\delta p_E - \delta p_{E'}]} + \overline{\mathcal{L}_v[p_E + p_{E'}]} (\delta p_E + \delta p_{E'}) \right) ds \\
 + \sum_{E'} \int_{\partial_{S_{E'}} \Omega_3} \left( \overline{\mathcal{L}_v[p_E] - i\omega w_{E'}} \right) \delta p_E ds - \sum_{S_E} \int_{\partial_w S_E} i\omega \overline{w} \mathcal{L}_T[\delta w_E] ds \\
 + \sum_{S_E} \int_{\partial_M S_E} i\omega \mathcal{L}_M[w_E] \overline{\mathcal{L}_\theta[\delta w_E]} ds \\
 + \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Upsilon}_{12}} i\omega \mathcal{L}_M[w_1 - w_2] \overline{\mathcal{L}_\theta[\delta w_1 - \delta w_2]} ds \\
 \left. + \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Upsilon}_{12}} i\omega \overline{w_1} \mathcal{L}_T[\delta w_1] + i\omega \overline{w_2} \mathcal{L}_T[\delta w_2] + i\omega \overline{\mathcal{L}_\theta[w_1 + w_2]} \mathcal{L}_M[\delta w_1 + \delta w_2] ds \right\} = 0, \\
 \forall (\delta p_1, \dots, \delta p_3, \delta w_1, \delta w_2) \in \mathcal{A}_{ad,0}^{(1)} \times \dots \times \mathcal{A}_{ad,0}^{(3)} \times \mathcal{S}_{ad,0}^{(1)} \times \mathcal{S}_{ad,0}^{(2)} \quad (6.14)
 \end{aligned}$$

## 6.2.2 Champ de pression acoustique

Pour le traitement des problèmes de couplage vibroacoustique, il faut prendre en compte des ondes de bords localisées sur les bords communs à la cavité 3 et les deux plaques. La figure 6.7 représente le champ de pression associé à une fonction de forme d'ondes de bord.



**Figure 6.7** Partie réelle (gauche) et partie imaginaire (droite) du champ de pression associé à une fonction de forme d'ondes de bord.

La solution du champ de pression s'écrit alors :

$$p_1(\underline{x}) = \sum_{l=0}^{L_{p,1}} a_{l,m,p}^1 \sum_{m=-l}^l \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_l^m(\theta, \varphi) e^{i\mathbf{k}^{a,p}(\theta, \varphi) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0)} \sin \varphi d\theta d\varphi \quad (6.15)$$

$$p_2(\underline{x}) = \sum_{l=0}^{L_{p,2}} a_{l,m,p}^2 \sum_{m=-l}^l \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_l^m(\theta, \varphi) e^{i\mathbf{k}^{a,p}(\theta, \varphi) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0)} \sin \varphi d\theta d\varphi \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned}
 p_3(\underline{x}) = & \sum_{l=0}^{L_{p,3}} a_{l,m,p}^3 \sum_{m=-l}^l \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_l^m(\theta, \varphi) e^{i\underline{k}^{a,p}(\theta, \varphi) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0)} \sin\varphi d\theta d\varphi \\
 & + \sum_{b=S_1, S_2} \sum_{l=0}^{L_{e,b}} \sum_{m=-l}^l a_{l,m,e}^{3,b} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_l^m(\theta, \varphi) e^{i\underline{k}^{a,e}(\theta, \varphi) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_b)} \sin\varphi d\theta d\varphi \quad (6.17)
 \end{aligned}$$

avec  $\underline{k}^{a,e}$  et  $\underline{k}^{a,p}$  les vecteurs d'ondes acoustiques évanescentes et propagatives. Ils sont définis par :

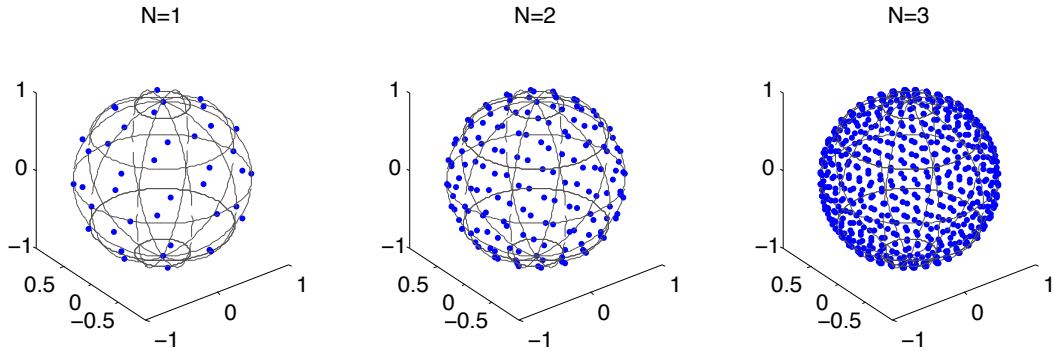
$$\underline{k}_E^{a,p} = k_a (\sin(\theta) \cos(\varphi) \underline{e}_x + \sin(\theta) \sin(\varphi) \underline{e}_y + \cos(\theta) \underline{e}_z) \quad (6.18)$$

$$\underline{k}^{a,e} = -ik_a \sqrt{1 + \left( \frac{k'}{k_a} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^2} \underline{n} + k' \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\varphi) \underline{\mathcal{I}}_1 + k' \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\varphi) \underline{\mathcal{I}}_2 \quad (6.19)$$

avec  $k'$  le nombre d'onde maximum atteint par les ondes de bord, on choisit ici  $k' = k_p$ .

Contrairement au cas des ondes propagatives, il n'existe a priori pas de résultat d'intégration analytique sur la sphère unité. La méthode envisagée pour cette intégration est l'extension de la méthode des trapèzes développée sur le cercle unité dans le chapitre 4. On peut utiliser :

- soit une grille régulière basée sur la subdivision successive de l'icosaèdre unité (voir figure 6.8) aussi appelé triangulation géodésique de la sphère [Teauby, 2006] ;

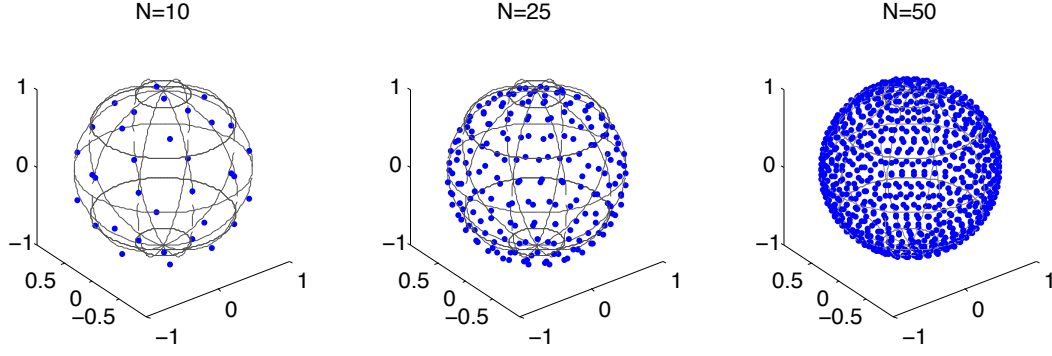


**Figure 6.8** décomposition géodésique successive de la sphère en fonction du paramètre  $N$ .

- soit une grille obtenue par une décomposition de la sphère en  $N$  cercles de colatitude  $\varphi$  équirepartis sur le domaine  $[0 \pi]$ , puis de chacun de ces cercles est discrétisé en environ  $N \sin\varphi$  points.

Il existe aussi l'équivalent de la méthode d'intégration unidimensionnel de Gauss Legendre : la quadrature de Lebedev [Lebedev et Laikov, 1999]. Le nombre et la position des points, ainsi que leurs poids sont déterminés de telle sorte que les intégrations sur la sphère unité des harmoniques sphériques d'ordre inférieur ou égal à  $n$  soient exactes. En pratique, les grilles d'intégrations sont connues de manière explicite jusqu'à l'ordre 131. Au vue des performances de ce type de schéma d'intégration (voir 4.2.3) dans le cadre des problèmes bidimensionnels, cette méthode n'est pas retenue ici.

L'inconvénient de la triangulation géodésique est qu'elle ne permet d'obtenir des grilles avec un nombre de points de la forme  $N = 2 + (10 * (4^k))$ . La figure 6.8, montre en effet les



**Figure 6.9** décomposition pseudo régulière de la sphère en fonction du paramètre  $N$ .

grilles obtenues pour  $N = 1, 2$  et  $3$ . La méthode de décomposition quasi régulière de la sphère n'a pas cette limitation. La figure 6.9 montre que pour couvrir la même plage de densité, le paramètre  $N$  varie de 1 à 50 pour cette méthode contre 1 à 3 pour la décomposition géodésique. De plus, la décomposition pseudo régulière a l'avantage d'être très facile à mettre en oeuvre, c'est donc elle qui est mise en oeuvre dans CoFouRays.

### 6.2.3 Champ de déplacements structuraux

Dans le cas d'un problème de couplage vibro-acoustique, il faut prendre en compte un chargement surfacique exercé par la sous-cavité adjacente.

Pour déterminer la solution particulière due au chargement surfacique associé à une fonction de forme acoustique d'ordre  $n$  et de degré  $m$ ,  $\phi_{l,m}^{(E)}(\underline{x})$  définie dans (5.5), on utilise la solution particulière associée à une onde plane explicitée dans (3.27) :

$$w^{p,n,m}(\underline{x}) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_l^m(\theta, \varphi) \frac{e^{i\mathbf{k}_E^a \cdot \underline{x}}}{D[(\mathbf{k}_E^a \cdot \boldsymbol{\tau}_1)^4 + 2(\mathbf{k}_E^a \cdot \boldsymbol{\tau}_1)^2(\mathbf{k}_E^a \cdot \boldsymbol{\tau}_2)^2 + (\mathbf{k}_E^a \cdot \boldsymbol{\tau}_2)^4] - k^s} \sin\varphi d\theta d\varphi \quad (6.20)$$

Dans l'exemple traité, les champs de déplacement s'écrivent comme :

$$w_1(\underline{x}) = \sum_{l=-L_p}^{L_p} a_{l,p}^1 \int_0^{2\pi} e^{i\mathbf{k}_1^{s,p}(\theta) \cdot \underline{x}} d\theta + \sum_{bord} \sum_{l=-L_{e,b}}^{L_{e,b}} a_{l,b}^1 \int_0^{2\pi} e^{i\mathbf{k}_1^{s,e}(\theta) \cdot \underline{x}} d\theta + \sum_{l=0}^{L_{p,3}} a_{l,m,p}^3 \sum_{m=-l}^l w^{p,n,m} + \sum_{b=S_1, S_2} \sum_{l=0}^{L_{e,b}} \sum_{m=-l}^l a_{l,m,e}^{3,b} w^{p,n,m} \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned}
 w_2(\underline{x}) = & \sum_{l=-L_p}^{L_p} a_{l,p}^2 \int_0^{2\pi} e^{il\theta} e^{ik_2^{s,p}(\theta)\cdot\underline{x}} d\theta + \sum_{bord} \sum_{l=-L_{e,b}}^{L_{e,b}} a_{l,b}^2 \int_0^{2\pi} e^{il\theta} e^{ik_2^{s,e}(\theta)\cdot\underline{x}} d\theta \\
 & + \sum_{l=0}^{L_{p,3}} a_{l,m,p}^3 \sum_{m=-l}^l w^{p,n,m} + \sum_{b=S_1,S_2} \sum_{l=0}^{L_{e,b}} \sum_{m=-l}^l a_{l,m,e}^{3,b} w^{p,n,m} \\
 & - \frac{i}{k^s 2D} q_d (H_0(k^s \|\underline{x} - \underline{x}_{qd}\|) - H_0(ik^s \|\underline{x} - \underline{x}_{qd}\|)) \quad (6.22)
 \end{aligned}$$

### 6.2.4 Assemblage de l'opérateur

En injectant les expressions (6.15)-(6.16)-(6.17)-(6.21)-(6.22) dans la formulation variationnelle (6.14), on aboutit à la résolution d'un système linéaire de la forme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1,1}^a & \mathbf{K}_{1,2}^a & \mathbf{K}_{1,3}^a & \mathbf{K}_{1,1}^{as} & \mathbf{K}_{1,2}^{as} \\ \mathbf{K}_{2,1}^a & \mathbf{K}_{2,2}^a & \mathbf{K}_{2,3}^a & \mathbf{K}_{2,1}^{as} & \mathbf{K}_{2,2}^{as} \\ \mathbf{K}_{3,1}^a & \mathbf{K}_{1,2}^a & \mathbf{K}_{1,3}^a & \mathbf{K}_{3,1}^{as} & \mathbf{K}_{3,2}^{as} \\ \mathbf{K}_{1,1}^{sa} & \mathbf{K}_{1,2}^{sa} & \mathbf{K}_{1,3}^{sa} & \mathbf{K}_{1,1}^s & \mathbf{K}_{1,2}^s \\ \mathbf{K}_{2,1}^{sa} & \mathbf{K}_{2,2}^{sa} & \mathbf{K}_{2,3}^{sa} & \mathbf{K}_{2,1}^s & \mathbf{K}_{2,2}^s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1,a} \\ \mathbf{a}_{2,a} \\ \mathbf{a}_{3,a} \\ \mathbf{a}_{1,s} \\ \mathbf{a}_{2,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{1,a} \\ \mathbf{f}_{2,a} \\ \mathbf{f}_{3,a} \\ \mathbf{f}_{1,s} \\ \mathbf{f}_{2,s} \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

avec  $\mathbf{a}_{E,a}$  le vecteur composé des coefficients associés aux fonctions de forme acoustique du sous domaine  $E$ , et  $\mathbf{a}_{E,s}$  le vecteur composé des coefficients associés aux fonctions de forme structurale de la plaque  $E$ .

Les plaques étant couplées à la sous-cavité 3, les sous-matrices  $\mathbf{K}_{1,3}^a$ ,  $\mathbf{K}_{3,1}^a$ ,  $\mathbf{K}_{2,1}^{as}$ ,  $\mathbf{K}_{1,2}^{as}$ ,  $\mathbf{K}_{2,2}^{as}$ ,  $\mathbf{K}_{1,1}^{as}$ ,  $\mathbf{K}_{1,2}^{as}$ ,  $\mathbf{K}_{2,1}^{as}$  et  $\mathbf{K}_{2,2}^{as}$  sont nulles. La sollicitation étant appliquée à la plaque  $S_2$ , on pourrait imaginer que la seule partie du vecteur de chargement non nulle soit celle associée à la plaque  $S_2$ . Mais avec la prise en compte des différents termes de couplage, uniquement les vecteurs  $\mathbf{f}_{1,a}$  et  $\mathbf{f}_{2,a}$  sont nuls. Le système à résoudre est donc de la forme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1,1}^a & \mathbf{K}_{1,2}^a & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{2,1}^a & \mathbf{K}_{2,2}^a & \mathbf{K}_{2,3}^a & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{1,2}^a & \mathbf{K}_{1,3}^a & \mathbf{K}_{3,1}^{as} & \mathbf{K}_{3,2}^{as} \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{1,3}^{sa} & \mathbf{K}_{1,1}^s & \mathbf{K}_{1,2}^s \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{2,3}^{sa} & \mathbf{K}_{2,1}^s & \mathbf{K}_{2,2}^s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1,a} \\ \mathbf{a}_{2,a} \\ \mathbf{a}_{3,a} \\ \mathbf{a}_{1,s} \\ \mathbf{a}_{2,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{f}_{3,a} \\ \mathbf{f}_{1,s} \\ \mathbf{f}_{2,s} \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

On s'intéresse maintenant au calcul de l'opérateur élémentaire associé à l'interface  $\check{\Upsilon}_{12}$  commune aux plaques  $S_1$  et  $S_2$ . D'après (3.5), le terme à calculer est de la forme :

$$\int_{\check{\Upsilon}_{12}} \overline{w_1} \mathcal{L}_T[\delta w_1] + \overline{w_2} \mathcal{L}_T[\delta w_2] + \overline{\mathcal{L}_\theta[w_1 + w_2]} \mathcal{L}_M[\delta w_1 + \delta w_2] ds \quad (6.25)$$

On peut décomposer cette intégrale en trois morceaux :

1.  $\int_{\check{\Upsilon}_{12}} \overline{w_1} \mathcal{L}_T[\delta w_1] + \overline{\mathcal{L}_\theta[w_1]} \mathcal{L}_M[\delta w_1] ds$  : en injectant la forme du champ de déplacements  $w_1$  (6.21), on constate, que la partie homogène du champ de déplacement apporte une contribution au bloc  $\mathbf{K}_{1,1}^s$  de l'opérateur et que les solutions particulières dues à la présence de la cavité acoustique contribuent au bloc  $\mathbf{K}_{3,1}^{as}$  ;
2.  $\int_{\check{\Upsilon}_{12}} \overline{w_2} \mathcal{L}_T[\delta w_2] + \overline{\mathcal{L}_\theta[w_2]} \mathcal{L}_M[\delta w_2] ds$  : comme dans le cas précédent, en injectant la forme du champ de déplacements  $w_2$  (6.22), la partie homogène de ce champ de déplacements

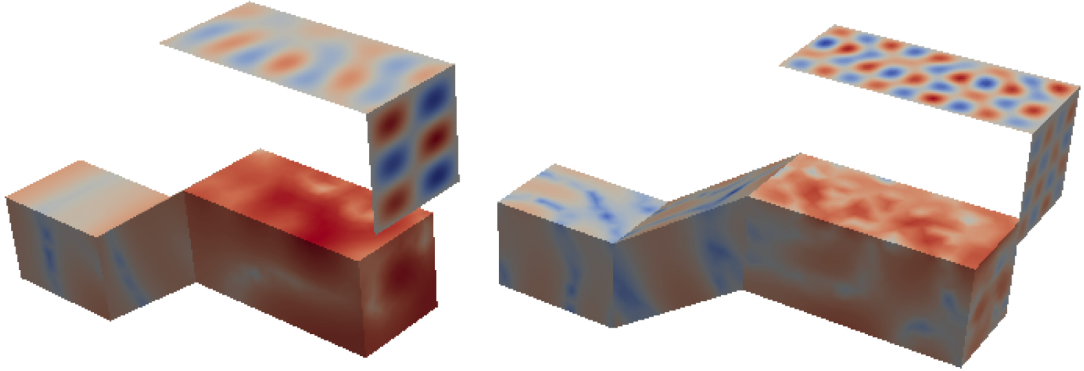
contribue au bloc  $\mathbf{K}_{1,1}^s$  de l'opérateur et les solutions particulières dues à la présence de la cavité acoustique au bloc  $\mathbf{K}_{3,2}^{as}$ . Il faut également prendre en compte la solution particulière due au chargement ponctuel. Cette dernière contribue au second membre  $\mathbf{f}_{2,s}$  ;

3.  $\int_{\tilde{\Upsilon}_{12}} \overline{\mathcal{L}_\theta[w_1]} \mathcal{L}_M[\delta w_2] + \overline{\mathcal{L}_\theta[w_2]} \mathcal{L}_M[\delta w_1] ds$  : en explicitant la forme des champs de déplacements  $w_1$  (6.21) et  $w_2$  (6.22), on observe d'une part que le produit des parties homogènes introduit une contribution dans les blocs  $\mathbf{K}_{2,1}^s$  et  $\mathbf{K}_{1,2}^s$  ; et d'autre part, le produit de la partie homogène de  $w_1$  avec les solutions particulières dues au couplage de  $w_2$  apporte une contribution dans les blocs  $\mathbf{K}_{1,3}^{sa}$  et  $\mathbf{K}_{3,1}^{as}$ . De la même façon le produit de la partie homogène de  $w_2$  avec les solutions particulières dues au couplage de  $w_1$  modifie les blocs  $\mathbf{K}_{2,3}^{sa}$  et  $\mathbf{K}_{3,2}^{as}$ . Enfin le produit de la solution particulière de  $w_2$  due au chargement avec  $w_1$  contribue aux blocs  $\mathbf{f}_{1,s}$  et  $\mathbf{f}_{3,a}$  du second membre.

La contribution à l'opérateur du terme (6.25) est une matrice dont les blocs  $\mathbf{K}_{1,3}^{s,a}$ ,  $\mathbf{K}_{3,1}^{a,s}$ ,  $\mathbf{K}_{2,3}^{s,a}$ ,  $\mathbf{K}_{3,2}^{a,s}$ ,  $\mathbf{K}_{3,3}^a$ ,  $\mathbf{K}_{1,1}^s$ ,  $\mathbf{K}_{1,2}^s$ ,  $\mathbf{K}_{2,1}^s$ , et  $\mathbf{K}_{2,2}^s$  sont non nuls. Ce terme de la formulation variationnelle modifie également le second membre du système matriciel au niveau des blocs  $\mathbf{f}_{1,s}$ ,  $\mathbf{f}_{2,s}$  et  $\mathbf{f}_{3,a}$ .

### 6.2.5 Solution du problème

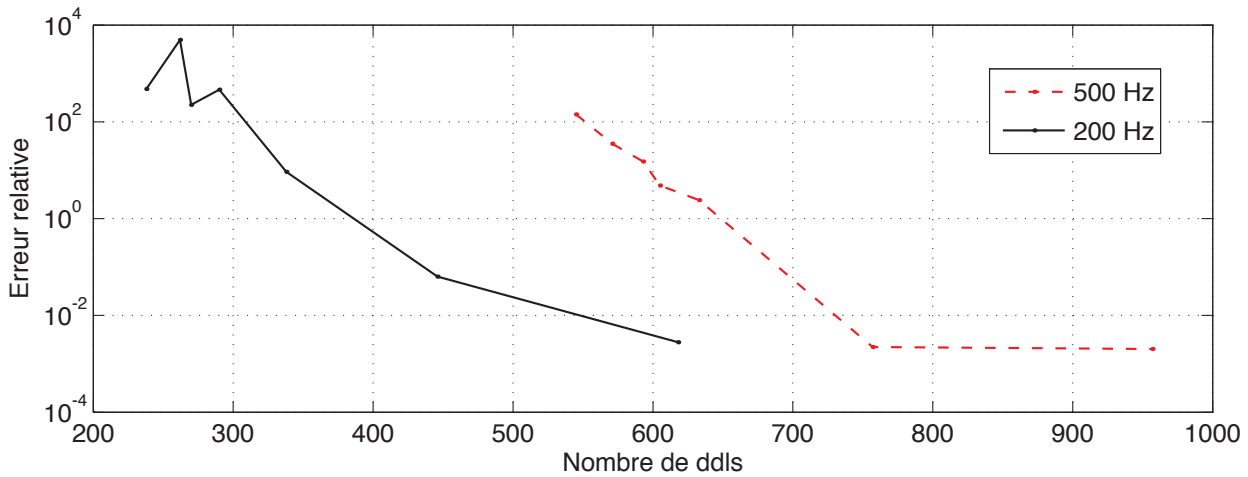
La figure 6.10 montre le résultat du problème défini dans la figure 6.6 à 200 Hz et 500 Hz. Dans les cavités c'est le niveau de pression en décibel qui est représenté. On observe bien des phénomènes vibratoire avec une longueur d'onde plus petite sur les bords communs aux plaques. Sur les plaques, c'est la partie imaginaire du champ de déplacement qui est représentée.



**Figure 6.10** Solution du problème défini dans la figure 6.6 à 200 et 500 Hz. Niveau de pression en décibel dans les cavités et partie imaginaire du champ de déplacement dans les plaques

Une solution éléments finis de ce problème demande énormément de ressources, malgré 32go de mémoire, nous n'avons pas réussi à obtenir une solution convergée. Sur la figure 6.11, on trace la convergence relative à la solution obtenue avec la TVRC et une discrétisation très fine des portrait d'amplitude (critère énergétique de  $10^{-8}$ ).

Le traitement du couplage vibro-acoustique est plus couteux que les problèmes de plaques et d'acoustique pris séparément. En effet sur cet exemple, dans la cavité il y a autant d'ondes



**Figure 6.11** Convergence de la méthode sur le problème défini dans la figure 6.6 à 200 et 500 Hz

intérieures que d'ondes de bords. Les ondes de bords étant évalué de manière totalement numérique, le temps de calcul est fortement dégradé.

### 6.3 Conclusion

Dans ce chapitre, la TVRC-Fourier est appliquée aux problèmes de plaques minces en flexion, puis aux problèmes de couplage vibro-acoustique. L'application aux problèmes de plaques en flexion, pour ce type de problème, l'approximation du champ de pression et celle du champ de déplacement utilisent des ondes propagatives et des ondes de bord évanescentes. Pour les ondes évanescentes de bord, il faut mettre en place une technique d'intégration spécifique. En effet le schéma d'intégration semi-analytique défini pour les ondes propagatives ne peut pas s'appliquer aux ondes évanescentes. L'extension de la TVRC aux problèmes de vibro-acoustique ne pose pas de problème d'un point de vue théorique, néanmoins la mise en oeuvre s'avère assez complexe, en effet le couplage fort se fait via des solutions particulières ce qui complexifie l'assemblage de l'opérateur. Les premiers résultats semblent prometteurs et permettent d'envisager le traitement de problèmes de complexité industrielle, et l'extension au problème de couplage vibro-acoustique avec des coques.



---

# Conclusion

La technique des éléments finis est la méthode la plus couramment utilisée pour résoudre les problèmes de vibrations. Cependant, la nature même de l'approximation utilisée par cette approche limite son utilisation au domaine des basses fréquences. Au delà de cette gamme de fréquences, les phénomènes de dispersion et de pollution font que la méthode nécessite un très grand nombre de degrés de liberté. La maîtrise du comportement vibratoire des systèmes mécaniques étant un enjeu majeur du monde industriel, que ce soit dans la conception ou dans l'optimisation des performances des structures, il est capital de développer d'autres méthodes de calcul efficaces et fiables pour déterminer la réponse de la structure au delà de cette limite.

Ce travail de thèse a été mené sur la Théorie Variationnelle des Rayons Complexes. C'est une méthode prédictive de calcul des vibrations dans le domaine MF. Elle se base sur les points suivants :

- elle utilise une nouvelle formulation du problème à résoudre. Cette formulation permet de construire des approximations dans chaque sous structure, indépendamment les unes des autres. Les conditions de continuité entre les sous structures et les conditions limites sur leurs frontières sont directement incorporées à cette formulation variationnelle
- elle utilise des fonctions de forme à deux échelles, à fort contenu mécanique. La solution est recherchée sous une combinaison linéaire d'ondes propagatives et évanescentes (rayons de vibration). Ces ondes vérifient, sous structures par sous structures, les équations d'équilibre intérieur et les relations de comportement. Toutes les directions des ondes sont prises en compte par une description intégrale de leur amplitude. Seules ces amplitudes, à variation lente en espace, sont discrétisées. L'échelle rapide, liée à la vibration des ondes, est calculée analytiquement.

Depuis son introduction dans [Ladevèze, 1996], l'activité de recherche sur cette approche a porté sur de nombreux aspects. Tout d'abord, la TVRC a montré son efficacité dans le traitement des vibrations des plaques élancées [Ladevèze *et al.*, 2000], ainsi que des assemblages complexes de structures planes [Rouch et Ladevèze, 2003] et de type coques [Riou *et al.*, 2003]. Une stratégie d'analyse large bande a également été proposée dans [Ladevèze et Riou, 2005]. Une méthode pour la prise en compte des hétérogénéités structurales comme les trous dans les plaques a été proposée dans [Ladevèze *et al.*, 2003a]. Puis, des travaux ont porté sur l'utilisation de la méthode dans le cadre d'une approche fréquentielle pour la résolution de problèmes de dynamique transitoire incluant le domaine des MF [Ladevèze et Chevreuril, 2005] et étendue pour l'identification du choc à la source dans le cadre de chocs pyrotechniques sur des assemblages complexes de coques [Bézier *et al.*, 2008]. Des travaux ont été également effectués sur l'identification et le recalage de modèles de liaisons complexes [Dorival *et al.*, 2008], ainsi que sur le traitement des problèmes de membrane [Sourcis, 2005]. Plus récemment, la TVRC est étendue au traitement des vibrations acoustiques [Riou *et al.*,

2006, Riou *et al.*, 2008] et une procédure de calcul adaptatif est mise en place [Riou *et al.*, 2011]. Tous ces travaux montrent l'efficacité et la robustesse de la méthode dans la résolution des problèmes de vibrations dans le domaine des MF.

L'originalité de ce travail de thèse est l'utilisation d'une nouvelle approximation basée sur les séries de Fourier. L'utilisation de ces séries est une nouveauté dans le cadre des approches ondulatoires. Le chapitre 4 présente l'étude de cette approximation dans le cadre de l'acoustique bi-dimensionnelle. L'étude des fonctions de forme engendrées permet de définir un critère pour déterminer le degré de discrétisation optimal pour une erreur donnée, et de mettre en place une technique de régularisation du portrait d'amplitude. Les performances obtenues avec cette approximation montrent un potentiel permettant d'étendre le champ d'applications de la TVRC-Fourier aux problèmes d'acoustique tridimensionnelle (chapitre 5). C'est la première fois que la TVRC est utilisée pour résoudre des problèmes 3D. Cette extension est possible grâce à l'utilisation des séries de Laplace (équivalent 3D des séries de Fourier). De plus, l'utilisation de la décomposition de Jacobi Anger permet de mettre en place une technique d'intégration semi-analytique efficace. La TVRC-Fourier est alors capable de résoudre des problèmes avec des géométries complexes sur de grandes plages de fréquences. Enfin, cette méthode est utilisée pour traiter des problèmes de vibrations de plaques et de couplage vibro-acoustique tridimensionnelle (chapitre 6).

Parallèlement aux développements théoriques, un logiciel a été créé : CoFouRays (COMplex FOUrier RAYs). Ce logiciel a été programmé sous l'environnement MATLAB au cours de la thèse. Toutes les extensions (acoustique 2 et 3D, vibration de plaques en flexion, couplage vibro-acoustique) y ont été introduites. Toutes les illustrations issues de ce rapport, montrant une solution TVRC, sont tirées de ce logiciel.

Ces travaux permettent d'envisager plusieurs développements futurs. La technique de régularisation présentée dans cette thèse permet d'observer la partie stable du portrait d'amplitude. Il serait intéressant de l'étudier afin de déterminer par exemple l'énergie dans la sous-structure, les niveaux moyens de pression ou encore les flux d'énergie à travers la structure complète sans opération de post processing coûteuse. Une deuxième piste peut être l'extension du domaine de validité fréquentielle vers les hautes fréquences. Dans ce domaine fréquentiel, la solution locale n'a que peu d'intérêt. Il est plus intéressant de travailler avec des grandeurs globales. Le portrait d'amplitude régularisé pourrait fournir ces informations globales. De plus, la technique d'intégration basée sur la phase stationnaire semble prometteuse pour ce type de calcul. Néanmoins pour résoudre des problèmes dans cette plage de fréquences, il faut être capable de modéliser la variabilité des structures et du chargement avec par exemple la prise en compte d'effort type *rain on the roof* ou couche limite turbulente. Enfin, il serait intéressant d'essayer d'appliquer cette théorie à d'autres classes de problèmes, telles que l'advection-diffusion, ou l'électromagnétisme.

---

# Bibliographie

- [Allen et Berkley, 1979] ALLEN, J. et BERKLEY, D. (1979). Image method for efficiently simulating small-room acoustics. *Journal of the Acoustical Society of America*, 65:943–950.
- [Arnaud, 2000] ARNAUD, L. (2000). *Modélisation et simulation des vibrations moyennes fréquences par la théorie variationnelle des rayons complexes*. Thèse, Ecole Normale Supérieure de Cachan, France.
- [B. Nayroles, 1992] B. NAYROLES, G. Touzot, P. (1992). Generalizing the finiti element method : diffuse approximation and diffuse element. *Computational Mechanics*, 10:307–318.
- [Babuška *et al.*, 1995] BABUŠKA, I., IHLENBURG, F., PAIK, E. et SAUTER, S. (1995). A Generalized Finite Element Method for solving the Helmholtz equation in two dimensions with minimal pollution. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 128:325–359.
- [Babuška et Sauter, 1997] BABUŠKA, I. et SAUTER, S. (1997). Is the pollution effect of the FEM avoidable for the Helmholtz equation considering high wave numbers? *SIAM Review*, 42(3):451–484.
- [Banerjee et Butterfield, 1981] BANERJEE, P. et BUTTERFIELD, R. (1981). *Boundary Element Method in Engineering Science*. McGraw-Hill, London.
- [Barbone *et al.*, 1998] BARBONE, P., MONTGOMERY, J., MICHAEL, O. et HARARI, I. (1998). Scattering by a hybrid asymptotic/finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 164:141–156.
- [Bayliss *et al.*, 1982] BAYLISS, A., GUNZBURGER, M. et TURKEL, E. (1982). Boundary conditions for the numerical solution of elliptic equation in exterior regions. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 42:430–451.
- [Belov et Ryback, 1975] BELOV, V. et RYBACK, S. (1975). Applicability of the transport equation in the one dimensional wave propagation problem. *Journal of the Soviet Physics Acoustics*, 21(2):173–180.
- [Belov *et al.*, 1977] BELOV, V., RYBACK, S. et TARTAKOVSKI, B. (1977). Propagation of vibrational energy in absorbing structures. *Journal of the Soviet Physics Acoustics*, 23(2):115–119.
- [Belytschko *et al.*, 1994] BELYTSCHKO, T., LU, Y. et GU, L. (1994). Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:229–256.
- [Bérenger, 1994] BÉRENGER, J.-P. (1994). A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 114:185–200.

- [Bettess et Chadwick, 1995] BETTESS, P. et CHADWICK, E. (1995). Wave envelope examples for progressive waves. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28: 2487–2508.
- [Bézier *et al.*, 2008] BÉZIER, G., LADEVÈZE, P., RIOU, H. et LECLERC, H. (2008). On the propagation of pyrotechnical shocks into complex structures, taking mid-frequencies into account. In *Proceedings of the 6th International Conference on Computation of Shell and Spatial Structures IASS-IACM*, Cornell University, Ithaca, NY, USA.
- [Bonnet, 1995] BONNET, M. (1995). Regularized direct and indirect symmetric variational BIE formulations for the three-dimensional elasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 15:93–102.
- [Bonnet *et al.*, 2008] BONNET, M., CHAILLAT, S. et SEMBLAT, J.-F. (2008). A multi-level fast multipole BEM for 3-D elastodynamics in the frequency domain. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(49-50):4233–4249.
- [Bouillard et Ihlenburg, 1999] BOUILLARD, P. et IHLENBURG, F. (1999). Error estimation and adaptativity for the finite element method in acoustics : 2D and 3D applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176(1-4):147–163.
- [Bouillard et Suleau, 1998] BOUILLARD, P. et SULEAU, S. (1998). Element-free Galerkin solutions for Helmholtz problems : formulation and numerical assessment of the pollution effect. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 162(1-4):317–335.
- [Brebbia, 1978] BREBBIA, C. (1978). *The Boundary Element Method for Engineers*. Pentech Press, London.
- [Brezzi et Fortin, 1991] BREZZI, F. et FORTIN, M. (1991). *Mixed and Hybrid finite element methods*. Springer Verlag, New-York.
- [Brezzi *et al.*, 1997] BREZZI, F., FRANCA, L., HUGHES, T. et RUSSO, A. (1997).  $b = \int g$ . *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 145:329–339.
- [Carcattera et Adamo, 1999] CARCATERA, A. et ADAMO, L. (1999). Thermal analogy in wave transfert energy : theoretical and experimental analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 226(2):253–284.
- [Carcattera et Sestieri, 1997] CARCATERA, A. et SESTIERI, A. (1997). Complex envelop displacement analysis a quasi-static approach to vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 201(2):205–233.
- [Cessenat, 1996] CESSENAT, O. (1996). *Application d'une nouvelle formulation variationnelle aux équations d'ondes harmoniques. Problèmes de Helmholtz 2D et de Maxwell 3D*. Thèse, Université Paris IX Dauphine, France.
- [Cessenat et Despres, 1998] CESSENAT, O. et DESPRES, B. (1998). Application of an ultra weak variational formulation of elliptic PDEs to the two-dimensional Helmholtz problem. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 35:255–299.
- [Chadwick et Bettess, 1997] CHADWICK, E. et BETTESS, P. (1997). Modelling of short waves using wave envelopes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14: 3229–3246.
- [Chae et Ih, 2001] CHAE, S. et IH, J. (2001). Prediction of vibrational energy distribution in the thin plate at high-frequency by using the ray tracing method. *Journal of Sound and Vibration*, 240(2):263–292.
- [Chang et Liu, 2004] CHANG, J. et LIU, R. (2004). An asymmetric indirect Trefftz method for solving free vibration problems. *Journal of Sound and Vibration*, 275:991–1008.

- [Cheung *et al.*, 1989] CHEUNG, Y., JIN, W. et ZIENKIEWICZ, O. (1989). Direct solution procedure for solution of harmonic problems using complete, non-singular, Trefftz function. *Communication in Applied Numerical Methods*, 5:159–169.
- [Cheung *et al.*, 1991] CHEUNG, Y., JIN, W. et ZIENKIEWICZ, O. (1991). Solution of Helmholtz equation by the Trefftz method. *Communication in Applied Numerical Methods*, 32:63–78.
- [Cipolla, 1999] CIPOLLA, J. (1999). Subgrid modeling in a Galerkin method for the Helmholtz equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177(1-2):35–49.
- [Collino, 2004] COLLINO, Q. C. F. (2004). Error estimates in the fast multipole method for scattering problems error estimates in the fast multipole method for scattering problems. part1 : Truncation of the jacobi-anger series. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 38(2):371–394.
- [Colton et Kress, 1992] COLTON, D. et KRESS, R. (1992). *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Springer-Verlag.
- [Cotoni *et al.*, 2005] COTONI, V., LANGLEY, R. S. et KIDNER, M. (2005). Numerical and experimental validation of variance prediction in the statistical energy analysis of built-up systems. *Journal of Sound and Vibration*, 288:701–728.
- [Cotoni *et al.*, 2001] COTONI, V., LE BOT, A. et JÉZÉQUEL, L. (2001). High frequency radiation of l-shaped plate by a local energy approach. *Journal of Sound and Vibration*, 250(3):431–444.
- [de La Bourdonnaye, 1994] de LA BOURDONNAYE, A. (1994). Convergence of the approximation of wave functions by oscillatory functions in the high frequency limit. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 318(1):385–388.
- [de Langre, 1991] de LANGRE, E. (1991). Fonctions de transfert de plaques par équations intégrales. Test de validation et de performance. *Rapport CEA*, DMT/90/395.
- [Deraemaeker *et al.*, 1999] DERAEMAEKER, A., BABUŠKA, I. et BOUILLARD, P. (1999). Dispersion and pollution of the FEM solution for the Helmholtz equation in one, two and three dimensions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46:471–499.
- [Desmet, 1998] DESMET, W. (1998). *A wave based prediction technique for coupled vibro-acoustic analysis*. Thèse, Katholieke Universiteit Leuven, Belgique.
- [Desmet *et al.*, 2001] DESMET, W., SAS, P. et VANDEPITTE, D. (2001). An indirect Trefftz method for the steady-state dynamic analysis of coupled vibro-acoustics systems. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, 8:271–288.
- [Desmet *et al.*, 2002] DESMET, W., van HAL, B. et VANDEPITTE, D. (2002). A computationally efficient prediction technique for the steady-state dynamic analysis of coupled vibro-acoustic systems. *Advances in Engineering Software*, 33:527–540.
- [Desmet *et al.*, 2004] DESMET, W., van HAL, B. et VANDEPITTE, D. (2004). Hybrid finite element–wave-based method for steady-state interior structural-acoustics problems. *Computers and Structures*, 83:167–180.
- [Dey *et al.*, 2006] DEY, S., DATTA, D., SHIRON, J. et SHEPPARD, M. (2006). p-Version FEM for structural acoustics with a posteriori error estimation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(17-18):1946–1957.

- [Dorival *et al.*, 2008] DORIVAL, O., ALLIX, O. et ROUCH, P. (2008). A substructured Trefftz method for updating joint models in the medium-frequency range. *Computational Mechanics*, 42:381–394.
- [Farhat *et al.*, 2001] FARHAT, C., HARARI, I. et FRANCA, L. (2001). The Discontinuous Enrichment Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190: 6455–6479.
- [Farhat *et al.*, 2003] FARHAT, C., HARARI, I. et HETMANIUK, U. (2003). The discontinuous enrichment method for multiscale analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:3195–3209.
- [Farhat et Tezaur, 2005] FARHAT, C. et TEZAU, R. (2005). Three-dimensional discontinuous Galerkin element with plane waves and Lagrange multipliers for the solution of mid-frequency Helmholtz problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, *In Press*.
- [Farhat *et al.*, 2004a] FARHAT, C., WIEDEMANN-GOIRAN, P. et R. (2004a). A discontinuous galerkin method with plane waves lagrange multipliers for the solution of short wave exterior helmholtz problems on unstructured meshes. *Wave Motion*, 39(4):307–317.
- [Farhat *et al.*, 2004b] FARHAT, C., WIEDEMANN-GOIRAN, P. et TEZAU, R. (2004b). Higher-Order extensions of a discontinuous Galerkin Method for Mid-Frequency Helmholtz Problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61(11):1938–1956.
- [Finnveden, 1995] FINNVEDEN, S. (1995). Ensemble averaged vibration energy flows in a three-element structure. *Journal of Sound and Vibration*, 187(3):495–529.
- [Franca *et al.*, 1997] FRANCA, L., FARHAT, C., MACEDO, A. et LESOINNE, M. (1997). Residual-free bubbles for the Helmholtz equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40:4003–4009.
- [Gabard, 2007] GABARD, G. (2007). Discontinuous Galerkin method with plane waves for time-harmonic problems. *Journal of Computational Physics*, 225:1961–1984.
- [Genechten *et al.*, 2010] GENECHTEN, B. V., BERGEN, B., VANDEPITTE, D. et DESMET, W. (2010). A trefftz-based numerical modeling framework for helmholtz problems with complex multiple-scatterer configurations. *Journal of Computational Physics*, 229:6623–6643.
- [Gerdes, 2000] GERDES, K. (2000). A review of infinite element methods for exterior Helmholtz problems. *Journal of Computational Acoustics*, 225:1961–1984.
- [Gibert, 1984] GIBERT, P. (1984). Contribution to the linear dynamic analysis of slender bodies in low and medium frequency ranges. *Journal of Sound and Vibration*, 97(3):499–511.
- [Gittelsohn *et al.*, 2007] GITTELSON, C., HIPTMAIR, R. et PERUGIA, I. (2007). Plane wave discontinuous Galerkin methods. *Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Preprint*.
- [Glandier, 2011] GLANDIER, C. (2011). D12 definition of representative industrial validation cases. Rapport technique, ITN Marie Curie project GA-214909 "MID-FREQUENCY - CAE Methodologies for Mid-Frequency Analysis in Vibration and Acoustics".
- [GPUmat, 2010] GPUMAT (2010).
- [Greengard et Rokhlin, 1987] GREENGARD, L. et ROKHLIN, V. (1987). A fast algorithm for particle simulations. *Journal of Computational Physics*, 73:325–348.

- [Grosh et Pinsky, 1998] GROSH, K. et PINSKY, P. (1998). Galerkin generalized least square finite element method for time harmonic structural acoustics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 154(3-4):299–318.
- [Grosu et Harari, 2008] GROSU, E. et HARARI, I. (2008). Studies of the discontinuous enrichment method for two-dimensional acoustics. *Finite Elements in Analysis and Design*, 44(5):272–287.
- [Guddati et Yue, 2004] GUDDATI, M. et YUE, B. (2004). Modified integration rules for reducing dispersion error in finite element methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193:275–287.
- [Guyader *et al.*, 1988] GUYADER, J.-L., BOISSON, C. et LESUEUR, C. (1988). Méthode des coefficients d’influence énergétique. In LESUEUR, C., éditeur : *Rayonnement acoustique des structures*, pages 317–348. Eyrolles.
- [Harari, 1997] HARARI, I. (1997). Reducing spurious dispersion, anisotropy and reflection in finite element analysis for time-harmonic acoustics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 140(1-2):39–58.
- [Harari et Haham, 1998] HARARI, I. et HAHAM, S. (1998). Improved finite element methods for elastic waves. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 166:143–164.
- [Harari et Hugues, 1992a] HARARI, I. et HUGUES, T. (1992a). A cost comparison of boundary element and finite element methods for problems of time-harmonic acoustics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 97(1):77–102.
- [Harari et Hugues, 1992b] HARARI, I. et HUGUES, T. (1992b). Galerkin/least-squares finite element methods for the reduced wave equation with non-reflecting boundary conditions in unbounded domains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 98(3):411–454.
- [Herrera, 1984] HERRERA, I. (1984). *Boundary methods. An algebraic theory*. Pitman, Boston.
- [Herrin *et al.*, 2006] HERRIN, D., MARTINUS, F., WU, T. et SEYBERT, A. (2006). An assessment of the high frequency boundary element and Rayleigh integral approximations. *Applied Acoustics*, 67:819–833.
- [Hobson, 1955] HOBSON, E. (1955). *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*. Chelsea Pub. Co.
- [Hugues, 1995] HUGUES, T. (1995). Multiscale phenomena : Green’s function, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origin of the stabilized methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127(1-4):387–401.
- [Huttunen *et al.*, 2006] HUTTUNEN, T., GAMALLO, P. et ASTLEY, R. (2006). *Comparison of two wave element methods for the Helmholtz problem*. ISVR technical report 307, University of Southampton.
- [Ichchou et Jézéquel, 1996] ICHCHOU, M. et JÉZÉQUEL, L. (1996). Comments on simple models of the energy flow in vibrating membranes and transversely vibrating plates. *Journal of Sound and Vibration*, 203(4):679–685.
- [Ichchou et Jézéquel, 2001] ICHCHOU, M. et JÉZÉQUEL, L. (2001). Equation énergétique locale pour la prévision des niveaux vibratoires et acoustiques instationnaires. *Compte Rendus de l’Académie des Sciences de Paris, Série IIB*, 329(9):663–670.
- [Ichchou *et al.*, 1997] ICHCHOU, M., LE BOT, A. et JÉZÉQUEL, L. (1997). Energy model of one-dimensional propagative system. *Journal of Sound and Vibration*, 201(5):535–554.

- [Ichchou *et al.*, 2001] ICHCHOU, M., LE BOT, A. et JÉZÉQUEL, L. (2001). A transient local energy approach as an alternative to transient sea : wave and telegraph equation. *Journal of Sound and Vibration*, 246(5):829–840.
- [Ihlenburg et Babuška, 1995] IHLENBURG, F. et BABUŠKA, I. (1995). Dispersion analysis and error estimation of galerkin finite element methods for the Helmholtz equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38:3745–3774.
- [Irimie et Bouillard, 2001] IRIMIE, S. et BOUILLARD, P. (2001). A residual a posteriori error estimation for the finite element solution of the Helmholtz equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(31):315–358.
- [Jin *et al.*, 1993] JIN, W., CHEUNG, Y. et ZIENKIEWICZ, O. (1993). Trefftz method for Kirchhoff plate bending problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36:765–781.
- [Jirousek et Wroblewski, 1996] JIROUSEK, J. et WROBLEWSKI, A. (1996). T-elements : state-of-the-art and future trends. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 3:323–434.
- [Kita et Kamiya, 1995] KITA, E. et KAMIYA, N. (1995). Trefftz method : an overview. *Advances in Engineering Software*, 24:3–12.
- [Kompella et Bernhard, 1993] KOMPELLA, M. et BERNHARD, R. (1993). Measurement of the statistical variation of structural-acoustic characteristics of automotive vehicles. In *Proceedings of the SAE Noise and Vibration conference, Society of automotive Engineers*, Warrendale, USA.
- [Krokstadt, 1968] KROKSTADT, U. (1968). Calculating the acoustical room response by the use of a ray tracing technique. *Journal of Sound and Vibration*, 8:118–125.
- [Lacroix *et al.*, 2003] LACROIX, V., BOUILLARD, P. et VILLON, P. (2003). An iterative defect- correction type meshless method for acoustics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57:2131–2146.
- [Ladevèze, 1996] LADEVÈZE, P. (1996). A new computational approach for structures vibrations in the medium frequency range. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 322(II b):849–856.
- [Ladevèze, 2008] LADEVÈZE, P. (2008). Une nouvelle théorie pour le calcul en hautes et moyennes fréquences en vibration et acoustique.
- [Ladevèze *et al.*, 2000] LADEVÈZE, P., ARNAUD, L., ROUCH, P. et BLANZÉ, C. (2000). La Théorie Variationnelle des Rayons Complexes pour le calcul des vibrations moyennes fréquences. *Revue européenne des éléments finis*, 9(1-2-3):67–88.
- [Ladevèze *et al.*, 2003a] LADEVÈZE, P., BLANC, L., ROUCH, P. et BLANZÉ, C. (2003a). A multiscale computational method for medium frequency vibrations of assemblies of heterogeneous plates. *Computer and Structures*, 81(12):1267–1276.
- [Ladevèze et Chevreuril, 2005] LADEVÈZE, P. et CHEVREUIL, M. (2005). A new computational method for transient dynamics including the low and the medium frequency ranges. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64(4):503–527.
- [Ladevèze et Pelle, 1983] LADEVÈZE, P. et PELLE, J.-P. (1983). Méthode de calcul par encadrement des fréquences propres des structures élastiques. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 296(II b):1757–1760.



- [Ladevèze et Pelle, 1989] LADEVÈZE, P. et PELLE, J.-P. (1989). Accuracy in finite element computation for eigenfrequencies. *Journal of Numerical Methods in Engineering*, 29:1929–1949.
- [Ladevèze et Riou, 2005] LADEVÈZE, P. et RIOU, H. (2005). Calculation of medium-frequency vibrations over a wide frequency range. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:3167–3191.
- [Ladevèze *et al.*, 2003b] LADEVÈZE, P., ROUCH, P., RIOU, H. et BONIHEUST, X. (2003b). Analysis of medium-frequency vibrations in a frequency range. *Journal of Computational Acoustics*, 11(2):255–284.
- [Laghrouche et Bettess, 2000] LAGHROUCHE, O. et BETTESS, P. (2000). Short wave modelling using special finite elements. *Journal of Computational Acoustics*, 8(1):189–210.
- [Laghrouche *et al.*, 2005] LAGHROUCHE, O., BETTESS, P., PERREY-DEBAIN, E. et TREVELLYAN, J. (2005). Wave interpolation finite elements for Helmholtz problems with jumps in the wave speed. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:367–381.
- [Lancaster et Salkaushaus, 1981] LANCASTER, P. et SALKKAUSHAUS, K. (1981). Surfaces generated by moving least square methods. *Mathematics and Computation*, 37:141–158.
- [Langley, 1989] LANGLEY, R. (1989). A general derivation of the statistical energy analysis equations for coupled dynamic systems. *Journal of Sound and Vibration*, 135(3):499–508.
- [Langley, 1990] LANGLEY, R. (1990). A derivation of the coupling loss factors used in statistical energy analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 141(2):207–219.
- [Langley, 1992] LANGLEY, R. (1992). A wave intensity technique for the analysis of high frequency vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 159(3):483–502.
- [Langley, 1995] LANGLEY, R. (1995). On the vibrational conductivity approach to high frequency dynamics for two-dimensional components. *Journal of Sound and Vibration*, 182(4):637–657.
- [Langley et Bremner, 1999] LANGLEY, R. et BREMNER, P. (1999). A hybrid method for the vibration analysis of complex structural-acoustics systems. *Journal of the Acoustical Society of America*, 105(3):1657–1671.
- [Langley *et al.*, 1997] LANGLEY, R., SMITH, J. et FAHY, F. (1997). Statistical energy analysis of periodically damped plate structures. *Journal of Sound and Vibration*, 208(3):407–426.
- [Langley et Brown, 2004] LANGLEY, R. S. et BROWN, A. (2004). The ensemble statistics of the energy of a random system subjected to harmonic excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 275:823–846.
- [Lase *et al.*, 1996] LASE, Y., ICHCHOU, M. et JÉZÉQUEL, L. (1996). Energy flow analysis of bars and beams : Theoretical formulations. *Journal of Sound and Vibration*, 192(1):281–305.
- [Le Bot, 1998a] LE BOT, A. (1998a). Geometric diffusion of vibrational energy and comparison with the vibrational conductivity approach. *Journal of Sound and Vibration*, 212(4):637–647.
- [Le Bot, 1998b] LE BOT, A. (1998b). A vibroacoustic model for high frequency analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 211(4):537–554.
- [Le Bot, 2002] LE BOT, A. (2002). Energy transfert for high frequencies in built-up structures. *Journal of Sound and Vibration*, 250(2):247–275.
- [Lebedev et Laikov, 1999] LEBEDEV, V. et LAIKOV, D. (1999). A quadrature formula for the sphere of the 131st algebraic order of accuracy. *Doklady Mathematics*, 59 (3):477–481.

- [Leissa, 1993] LEISSA, A. (1993). *Vibrations of plates*. Acoustical Society of America, Woodbury.
- [Lucy, 1977] LUCY, L. (1977). A numerical approach to testing the fission hypothesis. *The Astronomical Journal*, 82(12):1013–1024.
- [Lyon et Dejong, 1995] LYON, R. et DEJONG, R. (1995). *Theory and applications of Statistical Energy Analysis*. Butterworth-Heinemann, Newton, MA.
- [Lyon et Maidanik, 1962] LYON, R. et MAIDANIK, G. (1962). Power flow between linearly coupled oscillators. *Journal of the Acoustical Society of America*, 34:623–639.
- [Mace, 1994] MACE, B. (1994). On the statistical energy analysis hypothesis of coupling power proportionality and some applications of its failure. *Journal of Sound and Vibration*, 178(1):95–112.
- [Mace, 1996] MACE, B. (1996). The vibration of plates on two-dimensionally periodic point supports. *Journal of Sound and Vibration*, 192(2):629–643.
- [Mace, 2003] MACE, B. (2003). Statistical energy analysis, energy distribution models and system modes. *Journal of Sound and Vibration*, 264(2):391–409.
- [Mace, 2005] MACE, B. (2005). Statistical energy analysis : coupling loss factor, indirect coupling and system modes. *Journal of Sound and Vibration*, 279(1-2):141–170.
- [Makarov et Ochmann, 1998] MAKAROV, S. et OCHMANN, M. (1998). An iterative solver of the helmholtz integral equation for high-frequency acoustic scattering. *Journal of the Acoustical Society of America*, 103(2):742–750.
- [Marburg, 2002] MARBURG, S. (2002). Six boundary elements per wavelength : is that enough? *Journal of Computational Acoustics*, 10:25–51.
- [Maxit et Guyader, 2001a] MAXIT, L. et GUYADER, J.-L. (2001a). Estimation of SEA coupling loss factors using a dual formulation and FEM modal information. Part I : theory. *Journal of Sound and Vibration*, 239(5):907–930.
- [Maxit et Guyader, 2001b] MAXIT, L. et GUYADER, J.-L. (2001b). Estimation of SEA coupling loss factors using a dual formulation and FEM modal information. Part II : numerical applications. *Journal of Sound and Vibration*, 239(5):931–948.
- [Melenk, 1995] MELENK, J. (1995). *On generalized finite element method*. Thèse, University of Maryland.
- [Melenk et Babuška, 1996] MELENK, J. et BABUŠKA, I. (1996). The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:289–314.
- [Melenk et Babuška, 1997] MELENK, J. et BABUŠKA, I. (1997). Approximation with harmonic polynomials in the partition of unity method. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, 4:607–632.
- [Monk et Wang, 1999] MONK, P. et WANG, D. (1999). A least-squares method for the Helmholtz equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 175:121–136.
- [Morse et Ingard, 1968] MORSE, P. et INGARD, K. (1968). *Theoretical Acoustics*. McGraw-Hill, New-York.
- [Oden *et al.*, 1998] ODEN, J., DUARTE, C. et ZIENKIEWICZ, O. (1998). A new cloud-based *hp* finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 153:117–126.

- [Ohayon, 1989] OHAYON, R. (1989). Local and global effects in the vibration of structures. A review synthesis. In *ESA Workshop proceedings on modal Representation of Flexible Structure by Continuum Methods*, pages 29–54, Noordwijk, Pays-Bas. ESTEC.
- [Ohayon et Soize, 1998] OHAYON, R. et SOIZE, C. (1998). *Structural Acoustics and Vibrations*. Academic Press.
- [Ortiz et Sanchez, 2001] ORTIZ, P. et SANCHEZ, E. (2001). An improved partition of unity finite element method for diffraction problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50:2727–2740.
- [P. Bouillard, 2004] P. BOUILLARD, V. Lacroix, E. D. B. (2004). A wave-oriented meshless formulation for acoustical and vibro-acoustical applications. *Wave Motion*.
- [Perrey-Debain *et al.*, 2003] PERREY-DEBAIN, E., TREVELYAN, J. et BETTESS, P. (2003). Plane wave interpolation in direct collocation boundary element method for radiation and wave scattering : numerical aspects and applications. *Journal of Sound and Vibration*, 261(5):839–858.
- [Perrey-Debain *et al.*, 2004] PERREY-DEBAIN, E., TREVELYAN, J. et BETTESS, P. (2004). Wave boundary elements : a theoretical overview presenting applications in scattering of short waves. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28:131–141.
- [Pierce et Wu, 1983] PIERCE, A. et WU, X. (1983). Variational method for prediction of acoustic radiation from vibrating bodies. *Journal of the Acoustical Society of America*, 139(1):111–132.
- [Pluymers, 2006] PLUYMERS, B. (2006). *Wave based modelling methods for steady-state vibro-acoustics*. Thèse, Katholieke Universiteit Leuven, Belgique.
- [Pluymers *et al.*, 2007] PLUYMERS, B., HAL, B. V., VANDEPITTE, D. et DESMET, W. (2007). Trefftz-based methods for time-harmonic acoustics. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 14(4):343–381.
- [Remington et Manning, 1975] REMINGTON, P. et MANNING, J. (1975). Comparison of statistical energy analysis power flow prediction with an exact calculation. *Journal of the Acoustical Society of America*, 57(2):374–379.
- [Riou, 2004] RIOU, H. (2004). *Sur le calcul des vibrations moyennes et hautes fréquences par la théorie variationnelle des rayons complexes*. Thèse, Ecole Normale Supérieure de Cachan, France.
- [Riou *et al.*, 2003] RIOU, H., LADEVÈZE, P. et ROUCH, P. (2003). Extension of the variational theory of complex rays to shells for medium-frequency vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 272:341–360.
- [Riou *et al.*, 2006] RIOU, H., LADEVÈZE, P. et SOURCIS, B. (2006). A new multiscale computational approach for structural and acoustical mid-frequency vibrations. In *Proceedings of the 13th International Congress on Sound and Vibration, Vienne, Autriche*.
- [Riou *et al.*, 2008] RIOU, H., LADEVÈZE, P. et SOURCIS, B. (2008). The multiscale VTCR approach applied to acoustics problems. *Journal of Computational Acoustics*, 16(4):487–505.
- [Riou *et al.*, 2011] RIOU, H., LADEVÈZE, P., SOURCIS, B., B.FAVERJON et KOVALEVSKY, L. (2011). An adaptative numerical strategy for the medium frequency analysis of helmholtz problems. *submitted*.

- [Rouch et Ladevèze, 2003] ROUCH, P. et LADEVÈZE, P. (2003). The variational theory of complex rays : a predictive tool for medium-frequency vibrations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:3301–3315.
- [Ryzhik, 2000] RYZHIK, I. G. I. (2000). *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, 6th édition.
- [Sestieri et Carcaterra, 2001] SESTIERI, A. et CARCATERRA, A. (2001). On the spurious solution in complex envelope displacement analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 240(2):293–302.
- [Sourcis, 2005] SOURCIS, B. (2005). *La TVRC et l'intégration des effets de membrane dans les plaques*. Rapport de Master 2, Ecole Normale Supérieure de Cachan, France.
- [Sourcis, 2009] SOURCIS, B. (2009). *Vers une stratégie adaptative de calcul pour la Théorie Variationnelle des Rayons Complexes : Application à l'acoustique linéaire*. Thèse, Ecole Normale Supérieure de Cachan, France.
- [Stewart et Hughes, 1996] STEWART, J. et HUGHES, T. (1996). Explicit residual-based a posteriori error estimation for finite element discretizations of the Helmholtz equation : Computation of the constant and new measures of error estimator quality. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 131:335–363.
- [Stewart et Hughes, 1997] STEWART, J. et HUGHES, T. (1997). An a posteriori error estimator and *hp*-adaptative strategy for finite element discretizations of the Helmholtz equation in exterior domains. *Finite Elements in Analysis Design*, 25:1–26.
- [Stojek, 1998] STOJEK, M. (1998). Least-squares Trefftz-type elements for the Helmholtz equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 41:831–849.
- [Strouboulis *et al.*, 2006a] STROUBOULIS, T., et HIDAJAT, R. (2006a). The partition of unity method for Helmholtz equation : *q*-convergence for plane-wave and wave-band local bases. *Applications of Mathematics*, 51(2):181–204.
- [Strouboulis *et al.*, 2006b] STROUBOULIS, T., BABUŠKA, I. et HIDAJAT, R. (2006b). The generalized finite element method for Helmholtz equation : Theory, computation, and open problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:4711–4731.
- [Strouboulis *et al.*, 2000] STROUBOULIS, T., COPPS, K. et BABUŠKA, I. (2000). The generalized finite element method : an example of its implementation and illustration of its performance. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47:1401–1417.
- [Suleau *et al.*, 2000] SULEAU, S., DERAEMAERKER, A. et BOUILLARD, P. (2000). Dispersion and pollution of meshless solutions for the Helmholtz equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(5-7):639–657.
- [Taylor *et al.*, 1998] TAYLOR, R., ZIENKIEWICZ, O. et OÑATE, E. (1998). A hierarchical finite element method based on the partition of unity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 152:73–84.
- [Teanby, 2006] TEANBY, N. A. (2006). An icosahedron-based method for even binning of globally distributed remote sensing data. *Computers and geosciences*, 32 (9):1442–1450.
- [Terrasse et Abboud, 2007] TERRASSE, I. et ABBOUD, T. (2007). *Modélisation des phénomènes de propagation d'ondes*. Cours MAP 558.
- [Teixeira de Freitas, 1999] TEXEIRA DE FREITAS, J. (1999). Hybrid finite element method formulations for elastodynamic analysis in the frequency domain. *International Journal of Solids and Structures*, 36:1883–1923.

- [Tezaur *et al.*, 2008] TEZAU, R., ZHANG, L. et FARHAT, C. (2008). A Discontinuous Enrichment Method for Capturing Evanescent Waves in Multi-scale Fluid and Fluid/Solid Problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(19-20):1680–1698.
- [Thivant *et al.*, 2010] THIVANT, M., CLOIX, A., CLERC, C., BLAIRON, N. et BRAGUY, C. (2010). Boundary element energy method : an efficient toll for acoustic computation. In *10ème congrès français d’acoustique*.
- [Thompson et Pinsky, 1994] THOMPSON, L. et PINSKY, P. (1994). Complex wave number Fourier analysis of the  $p$ -version finite element method. *Computational Mechanics*, 13(4): 255–275.
- [Totaro *et al.*, 2009] TOTARO, N., DODARD, C. et GUYADER, J. L. (2009). Sea coupling loss factors of complex vibro-acoustic systems. *journal of Vibration and Acoustics - transactions of the ASME*, 131(4).
- [Trefftz, 1926] TREFFTZ, E. (1926). In *Proceedings of the 2nd International Congress on Applied Mechanics, Zurich, Suisse*.
- [Trochet, 1995] TROCLET, B. (1995). Prediction of structure-borne noise in launch vehicles and aircrafts. In *EURO-NOISE 95, Lyon*.
- [Van Hal *et al.*, 2005] VAN HAL, B., DESMET, W. et VANDEPITTE, D. (2005). Hybrid finite element - wave based method for steady-state interior structural-acoustic problems. *Computers and Structures*, 83:167–180.
- [Vanmaele *et al.*, 2007] VANMAELE, C., VANDEPITTE, D. et DESMET, W. (2007). An efficient wave based prediction technique for plate bending vibrations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(33-34):3178–3189.
- [Von Erstoff, 2000] VON ERSTOFF, O. (2000). *Boundary Element in Acoustics : Advances and Applications*. WITpress.
- [Wu et Ginsberg, 1998] WU, K. et GINSBERG, J. (1998). Mid-frequency range acoustic radiation from slender elastic bodies using the surface variational principle. *Journal of Vibration and Acoustics*, 120(2):392–400.
- [Yasuda et Sakuma, 2002] YASUDA, Y. et SAKUMA, T. (2002). Fast multipole boundary element method for large-scale steady-state sound field analysis. Part I : examination of numerical items. *Acta Acustica*, 89:28–38.
- [Yasuda et Sakuma, 2005] YASUDA, Y. et SAKUMA, T. (2005). An effective setting of hierarchical cell structure for the fast multipole boundary element method. *Journal of Computational Acoustics*, 13:47–70.
- [Yeih *et al.*, 2006] YEIH, W., LIU, R., CHANG, J. et KUO, S. (2006). Numerical instability of the direct Trefftz method for Laplace problems in a 2D finite domain. *International Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2(1):41–66.
- [Yue et Guddati, 2005] YUE, B. et GUDDATI, M. (2005). Dispersion-reducing finite elements for transient acoustics. *Journal of the Acoustical Society of America*, 118:2132–2141.
- [Zieliński et Herrera, 1987] ZIELIŃSKI, A. et HERRERA, I. (1987). Trefftz method : fitting boundary conditions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24: 871–891.
- [Zienkiewicz, 1977] ZIENKIEWICZ, O. (1977). *The Finite Element Method*. McGraw-Hill, London.

- [Zienkiewicz, 1997] ZIENKIEWICZ, O. (1997). Trefftz type approximation and the generalized finite element method - history and development. *Computer Assisted in Engineering Sciences*, 4:305–316.
- [Zienkiewicz et Taylor, 2000] ZIENKIEWICZ, O. et TAYLOR, R. (2000). *The Finite Element Method. Volume 1 : The basis*. Butterworth-Heinemann, Boston.