

Compte rendu du montage MP28 : Instabilités  
et phénomènes non linéaires

Faragout Vincent et Tijani Id barkach

18 novembre 2014

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Phénomène non linéaire : le pendule.</b>	<b>3</b>
2.1	Théorie . . . . .	3
2.2	Montage . . . . .	4
2.3	Manipulation expérimentale . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Instabilités</b>	<b>5</b>
3.1	Instabilité avec seuil : le bifurcateur . . . . .	5
3.1.1	Principe . . . . .	5
3.1.2	Théorie . . . . .	6
3.1.3	Manipulation expérimentale . . . . .	7
3.2	Instabilité de Rayleigh-Plateau . . . . .	8
3.2.1	Principe . . . . .	8
3.2.2	Théorie . . . . .	9
3.2.3	Manipulation expérimentale . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Questions et commentaires de l'examineur</b>	<b>10</b>
4.1	Questions (avec proposition de réponses) . . . . .	10
4.2	Commentaires . . . . .	11
4.3	Tableau . . . . .	12

# 1 Introduction

Certains phénomènes physiques, parfois simples à priori comme on le verra par la suite ne sont pas linéaires. Mais le physicien va chercher en général à linéariser ces problèmes en faisant quelques approximations. On dit qu'un système est linéaire s'il répond au principe de superposition. Dans le cas contraire on dira que le système est non linéaire. Et une instabilité est un changement de comportement brutal lorsque l'un des paramètres change et dépasse une valeur seuil.

## 2 Phénomène non linéaire : le pendule.

### 2.1 Théorie

L'équation du pendule pesant est :  $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$  avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{J}}$ ,  $L$  étant la longueur du pendule et  $J$  son moment d'inertie. Pour de petites oscillations, on a  $\sin\theta \simeq \theta$ , on peut donc linéariser l'équation précédente et on obtient :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (1)$$

Il s'agit d'une équation linéaire en  $\theta$ , avec une période d'oscillation égale à  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgL}}$ . On veut montrer que ce n'est plus le cas pour des angles plus importants. On écrit donc la conservation de l'énergie mécanique :

$$Em = \frac{1}{2}mv^2 - mgL\cos\theta = mgL\cos\theta_0 \quad (2)$$

avec  $\theta_0$  l'angle que fait le pendule avec la verticale à  $t=0$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{L^2}{2}\dot{\theta}^2 &= gL(\cos\theta - \cos\theta_0) \implies \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{L}(\cos\theta - \cos\theta_0) \\ \dot{\theta} &= \sqrt{\frac{2g}{L}(\cos\theta - \cos\theta_0)} \implies dt = d\theta \frac{1}{\sqrt{\frac{2g}{L}(\cos\theta - \cos\theta_0)}} \end{aligned}$$

On intègre entre 0 et  $\theta_0$  :

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\theta_0} d\theta \frac{1}{\sqrt{\frac{2g}{L}(\cos\theta - \cos\theta_0)}} \quad (3)$$

Quand on résout cette intégrale (calcul non trivial) en faisant un développement au second ordre, on obtient la formule de Borda :

$$\frac{T}{T_0} = 1 + \frac{\theta_0^2}{16} \quad (4)$$

Le but de cette manipulation est de vérifier la formule de Borda.

## 2.2 Montage

Matériel :

- Module Pasco
- capteur de rotation Pasco
- pendule couplé

Le pendule utilisé est le pendule couplé que l'on découple. Pour ce montage, on utilise le module Pasco pour mesurer directement l'angle d'oscillation et la période d'oscillation. Le boîtier est relié à l'ordinateur via un port USB. Les données acquises par le capteur PASCO sont retransmises à l'ordinateur.

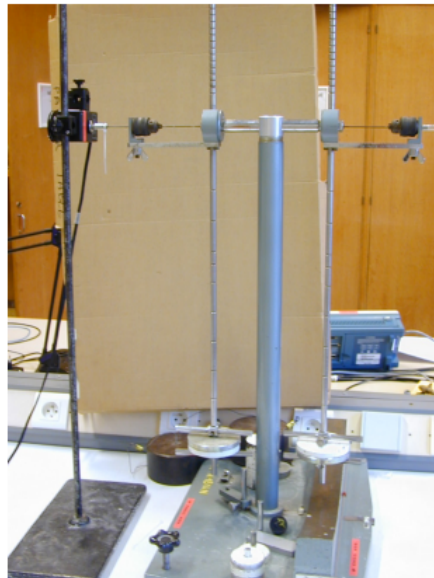


FIGURE 1 – Photographie du dispositif expérimental pour étudier la variation de la période d'un pendule en fonction de l'amplitude des oscillations. On utilise le système de pendules couplés Didalab, dans lequel on découple les deux pendules. L'angle d'oscillation, sont mesurés dans cet exemple au moyen du capteur de rotation Pasco ( situé en haut à gauche ).

La notice d'utilisation du logiciel Data Studio est bien décrite dans le montage de Vincent Cognet et Guillaume Lang ( montage MP31, 2012).

## 2.3 Manipulation expérimentale

On essaie de vérifier la formule de Borda et d'estimer son domaine de validité. On cherche donc à tracer la période d'oscillation en fonction de l'angle initial au carré. Pour cela, on place le pendule à un certain angle puis on le lâche. On

fait des acquisitions sur plusieurs secondes pour avoir une dizaine de périodes. On considère qu'il y a peu d'amortissement liés aux frottements donc on ne les prend pas en compte.

Pour estimer l'erreur sur la période, on fait un traitement statistique. Pour un angle donné, on répète 5 fois la mesure. Pour estimer l'erreur sur l'angle, on prend en compte l'amortissement. On fait la moyenne des angles de chacune des 10 périodes. L'écart type (entre la première et la dernière période) correspond à notre incertitude. Voici nos résultats expérimentaux :

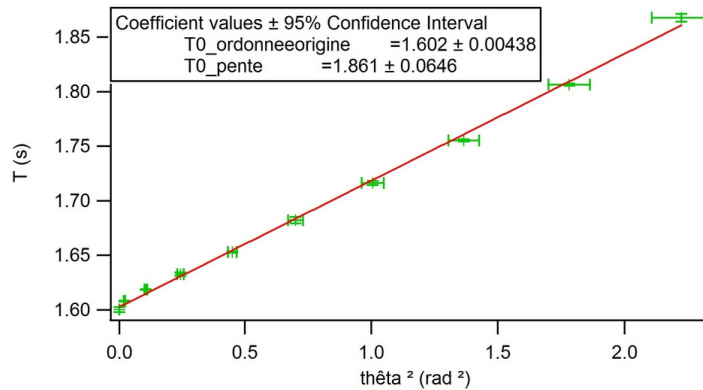


FIGURE 2 – Vérification de la loi de Borda. Tracé de la période en fonction de l'angle initial au carré.

**Remarques :**

- Au delà de certains angles, la formule de Borda ne s'applique plus car cette formule s'obtient par un un développement limité du sinus au premier ordre. Il faudrait encore rajouter des ordres dans le développement limité pour avoir une meilleure description de la réalité.
- L'oscillation du pendule pour de grands angles est un exemple de phénomène non linéaire qui n'aboutit pas à de fortes instabilités.

### 3 Instabilités

#### 3.1 Instabilité avec seuil : le bifurcateur

##### 3.1.1 Principe

Matériel :

- Alimentation stabilisée
- stroboscope
- bifurcateur

Le bifurcateur est un anneau vertical à l'intérieur duquel se trouve une rigole dans laquelle on peut mettre une bille. On met l'anneau en mouvement de rotation autour de son axe vertical à l'aide d'un moteur à courant continu relié à son alimentation stabilisée. Plus on augmente la tension, plus l'anneau tourne vite. Si on place la bille dans l'anneau et qu'on augmente la vitesse de rotation, elle reste à la position d'équilibre  $\theta = 0$ . A partir d'une certaine vitesse de rotation critique la bille prend un angle d'équilibre différent. A partir de là, à chaque vitesse de rotation différente, la bille adopte une position d'équilibre différente. On étudiera donc les positions d'équilibre de la bille en fonction de la vitesse de rotation de l'anneau.

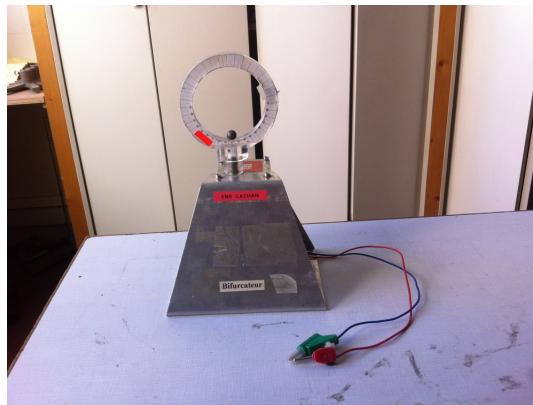


FIGURE 3 – Photographie du dispositif expérimental : le bifurcateur.

### 3.1.2 Théorie

La bille de masse  $m$  glisse sans frottement dans l'anneau de rayon  $R$  qui tourne à la vitesse angulaire  $\Omega$  autour de l'axe vertical.

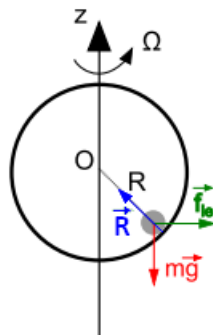


FIGURE 4 – Schéma de l'anneau du bifurcateur avec la bille

L'énergie potentielle de la bille s'écrit :

$$E_P = mgR(1 - \cos\theta) - \frac{1}{2}m\Omega^2 R^2 \sin^2\theta \quad (5)$$

Pour l'étude des positions d'équilibres on écrit :

$$\frac{dE_P}{d\theta} = 0 = mgR\sin\theta - m\Omega^2 R^2 \cos\theta \sin\theta$$

$$\sin\theta(g - \Omega^2 R \cos\theta) = 0$$

Donc soit  $\theta = 0$ , soit  $\theta = \arccos(\frac{g}{\Omega^2 R})$  si  $\Omega > \sqrt{\frac{g}{R}} = \Omega_c$ . On obtient donc deux énergies potentielles différentes suivant si  $\Omega > \Omega_c$  ou  $\Omega < \Omega_c$ .

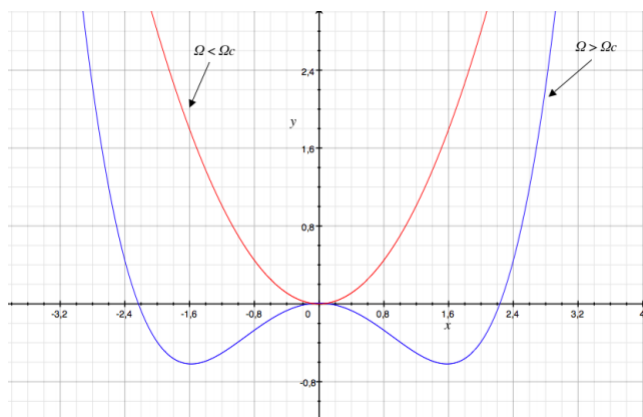


FIGURE 5 – Schémas des énergies potentielles

Pour  $\Omega < \Omega_c$  : il existe une seule position d'équilibre stable pour  $\theta = 0$ .

Pour  $\Omega > \Omega_c$  : il existe deux positions d'équilibre stable pour  $\theta = \pm \arccos(\frac{g}{\Omega^2 R}) = \pm \arccos(\frac{\Omega_c^2}{\Omega^2})$ .

### 3.1.3 Manipulation expérimentale

On souhaite tracer le diagramme de stabilité, c'est à dire la courbe décrivant l'angle de la position d'équilibre stable en fonction de la vitesse de rotation du bifurcateur. Ainsi on pourra déterminer la vitesse de rotation critique, à partir de laquelle la position d'équilibre stable change. Pour tracer cette courbe, on mesure la vitesse de rotation du bifurcateur à l'aide du stroboscope. Une fois l'anneau stabilisé avec le stroboscope, on lit la valeur de l'angle d'équilibre à l'aide des graduations indiqués sur l'anneau.

On estime l'incertitude de lecture de la position de la bille à  $2^\circ$  environ. Pour estimer l'erreur de mesure de la fréquence au stroboscope, on regarde sur quelle plage de fréquence l'anneau se déplace de part et d'autre de l'axe de rotation.

Pour déterminer  $\Omega_c$  on trace  $\cos\theta_{\acute{e}q}$  en fonction de  $\frac{1}{\Omega^2}$  pour  $\Omega > \Omega_c$ . On compare alors avec la valeur théorique  $\Omega_c = \sqrt{\frac{g}{R}}$ .

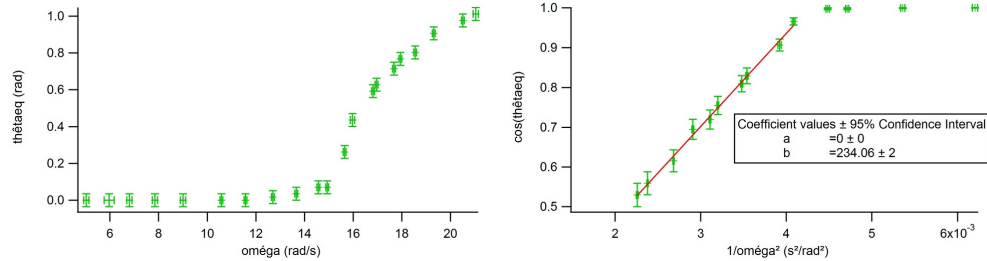


FIGURE 6 – A gauche : Diagramme de bifurcation. A droite : détermination expérimentale de  $\Omega_c$ .

### Remarques :

- Par cette expérience, on montre une réelle instabilité. A partir d’une valeur seuil d’un de ses paramètres, le système change brutalement de comportement.
- Faire attention lors de la détermination du rayon de l’anneau. La bille n’étant pas un point matériel, la position du point correspond au centre de masse de la bille. Ne pas oublier de prendre en compte le creux de l’anneau qui maintient la bille.

## 3.2 Instabilité de Rayleigh-Plateau

### 3.2.1 Principe

#### matériel utilisé :

- glycérol
  - fil de nylon d’épaisseur 1mm
  - 2 potences
  - 1 goulotte
  - un appareil photo
  - un écran sur lequel on colle du papier millimétré.

On étudie cette fois ci une instabilité en hydrodynamique. On tend un fil de nylon horizontalement entre deux potences. On accroche le papier millimétré le plus horizontalement possible sur l’écran, qu’on place derrière le fil à une distance faible. Avec une goulotte on dépose le liquide (glycérol) sur le fil de nylon ; le plus homogènement possible. Le film ondule tout en conservant son axisymétrie jusqu’à atteindre un chapelet de gouttelettes. on prend une photo rapidement après avoir déposé le film de glycérol. Voici un exemple de photo que l’on obtient :



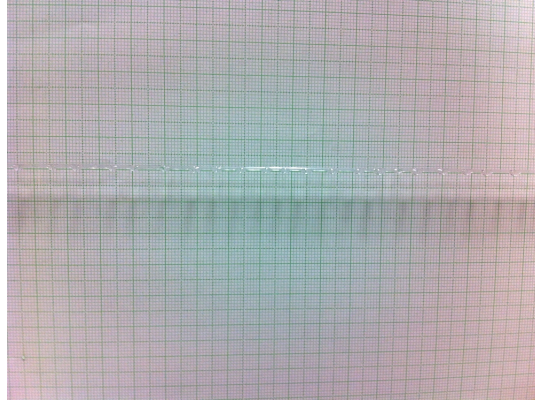


FIGURE 7 – photo prise de l'instabilité

### 3.2.2 Théorie

Quand on met du glycérol sur le fil il se forme des gouttes espacés périodiquement. Cette instabilité est due aux forces de tension superficielles qui minimisent la surface de contact liquide/air. Plateau a démontré que la longueur d'onde stable était égale à :

$$\lambda = 2\pi\sqrt{2}(b + e_0)$$

Avec  $b$  le rayon du fil et  $e_0$  la demi épaisseur du film.

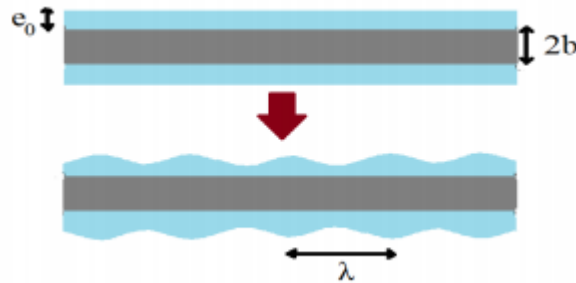


FIGURE 8 – Schéma de l'instabilité de Rayleigh-Plateau

On peut se dire qu'il est étonnant que la tension superficielle n'intervienne pas dans la formule précédente alors que c'est le paramètre qui régit l'instabilité. En fait, elle intervient dans le temps caractéristique de l'instabilité (temps nécessaire pour que l'instabilité se forme) :

$$\tau = \frac{12\eta b^4}{\gamma e_0^3}$$

Avec  $\eta$  la viscosité dynamique du liquide et  $\gamma$  sa tension superficielle avec l'air. On a :  $\eta_{glycérol}(20^\circ\text{C}) = 1.49 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ,  $\gamma_{glycérol}(20^\circ\text{C}) = 63 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ .

### 3.2.3 Manipulation expérimentale

On va donc essayer de déterminer l'épaisseur du fil de nylon à partir de la longueur d'onde de l'instabilité. On compare à la mesure directe au pied à coulisse ( faire attention car l'épaisseur du fil n'est pas homogène, il faut faire un traitement statistique).

Pour estimer l'erreur on fait un traitement statistique pour déterminer  $b$  à partir de  $\lambda$ .

#### Remarques :

- Le papier millimétré calibre l'échelle de longueur, il faut donc faire attention à la parallaxe lorsqu'on prend la photo.
  - On estime approximativement l'épaisseur du film.
  - On surestime le diamètre car la longueur d'onde que l'on observe est plus grande que la longueur d'onde stable. Le régime sinusoïdal laisse rapidement place à la formation de gouttelettes plus espacées.

## 4 Questions et commentaires de l'examineur

### 4.1 Questions (avec proposition de réponses)

#### Sur le pendule :

- 1/ Comment retrouve-t-on la formule de Borda ? (voir théorie cf 2.1 )
  - 2/ Est elle une formule exacte ou approché ?  
Il s'agit d'une formule approché. Elle s'obtient en linéarisant le sinus.
  - 3/ Quelle situation met en défaut la formule de Borda ?  
Si on place le pendule à  $\theta = \pi$ , le pendule reste immobile. Il a une période infini. Ce qui n'est pas prédit par cette formule.
  - 4/Que remarque-t-on à propos des oscillations ?  
Les oscillations diminuent du fait des frottements. On s'en sort en prenant dix périodes et en faisant la moyenne. On obtient alors un angle d'oscillation moyen avec une erreur de l'ordre de l'amortissement.

#### Sur le bifurcateur :

- 1/ Citer d'autres expériences menant à des instabilités du même type.
  - 2/ N'y a-t-il pas d'autres manières de déterminer la vitesse de rotation du bifurcateur ?  
Si. on peut utiliser une dynamo tachymétrique qui est un dispositif délivrant une tension proportionnelle à la fréquence de rotation du moteur.
  - 3/ Quel type de moteur y a t il dans l'anneau ?  
Moteur à courant continu
  - 4/ Existe-t-il une loi liant la tension délivrée par l'alimentation stabilisée et la rotation de l'anneau ?  
Oui. Une loi linéaire.

5/ Quel problème peut poser la mesure au stroboscope ?

On peut immobiliser l'anneau à une fréquence double de la fréquence réelle. On s'en sort en multipliant par deux la fréquence du stroboscope : on doit alors observer une demi période.

6/ Pourquoi n'y a-t-il qu'une seule branche dans le diagramme de bifurcation ? Dans quel sens se déplace la bille ?

Théoriquement, la bille choisit aléatoirement un position d'équilibre. Expérimentalement, on observe que la bille choisit préférentiellement un côté. On suppose que c'est du aux défauts de fabrication de l'anneau qui imposent une position d'équilibre.

7/ Y a-t-il des conséquences liées au fait que la bille n'est pas un point matériel ?

Oui. Il y a des pertes d'énergie mécanique car la bille roule. Donc dans le diagramme de bifurcation il y a un petit cycle hystérésis autour de  $\Omega_c$ , la vitesse de rotation seuil n'est pas la même quand on diminue et quand on augmente cette vitesse.

8/ Pourquoi la force de Coriolis n'intervient elle pas ?

A l'équilibre cette force est nulle.

### Sur l'expérience de Rayleigh-Plateau :

1/ Comment obtient on l'expression de la première longueur d'onde stable ?

2/ Quel est la valeur du temps caractéristique de l'instabilité ?  
de l'ordre de 1s.

3/ Mesure-t-on réellement cette longueur d'onde ?

Non, on la surestime. Pour l'estimer correctement il faudrait prendre très rapidement la photo, au bon moment. En outre, il faudrait déposer un film de liquide très fin sur le fil (de manière homogène), pour s'affranchir de l'effet de la pesanteur. Ici le poids des gouttes rend l'expérience compliquée et on observe des longueurs d'ondes plus grandes que celles décrites par la théorie.

## 4.2 Commentaires

### Sur le plan :

il faut garder le pendule et le bifurcateur. L'expérience de Rayleigh Plateau est difficile à réaliser correctement. Une manière de faire est de mesurer la longueur d'onde de l'instabilité en fonction du diamètre du fil. Ou bien remplacer cette expérience par celle avec la résistance négative.

### Sur le pendule :

Il est dommage de ne pas faire des oscillations avec des angles supérieurs à  $90^\circ$ . Il faut prendre du recul sur cette formule de Borda qui est une formule approchée au premier ordre. Ne pas hésiter à utiliser des lois "de Borda" avec des ordre plus élevé pour mieux coller à la réalité.

**Sur le bifurcateur :**

Ne pas utiliser le stroboscope pour mesurer la vitesse de rotation de l'anneau. Utiliser une dynamo tachymétrique ou un montage avec laser/photodiode. Bien connaître les conséquences liés au fait que la bille n'est pas un point matériel.

**Sur l'expérience de Rayleigh Plateau :**

Manque de connaissance théorique. Il vaut peut être mieux ne pas la faire. Faire plutôt l'expérience avec la résistance négative ou l'oscillateur de Van der Pol

**4.3 Tableau**

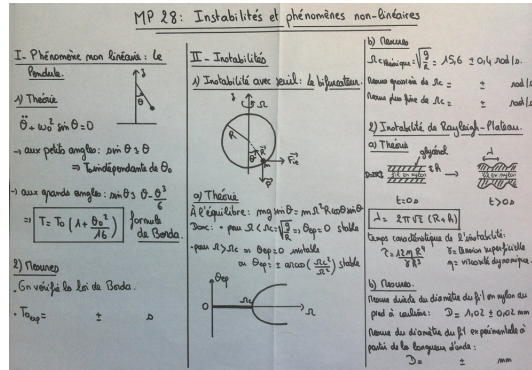


FIGURE 9 – Tableau

**Références**

- [1] Gouttes, bulles, perles et ondes. Pierre-Gilles de Gennes, François Brochart-Wyart, David Quéré : instabilité de Rayleigh-Plateau
- [2] Hydrodynamique physique. Nouvelle édition revue et argumentée. Etienne Guyon, Jean Pierre Hulin, Luc Petit : Le bifurcateur
- [3] Toute la mécanique. Lydéric Bocquet, Jean Pierre Faroux, Jacques Renault : Le pendule pesant.