

M28 Instabilités et phénomènes non-linéaires

I-Oscillateur de Duffing

Matériel:

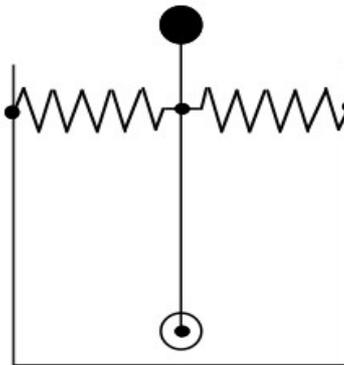
- Oscillateur de Duffing
- Oscilloscope

L'oscillateur de Duffing est un circuit électronique permettant de simuler un système physique « réel ».

L'équation simulée est la suivante:

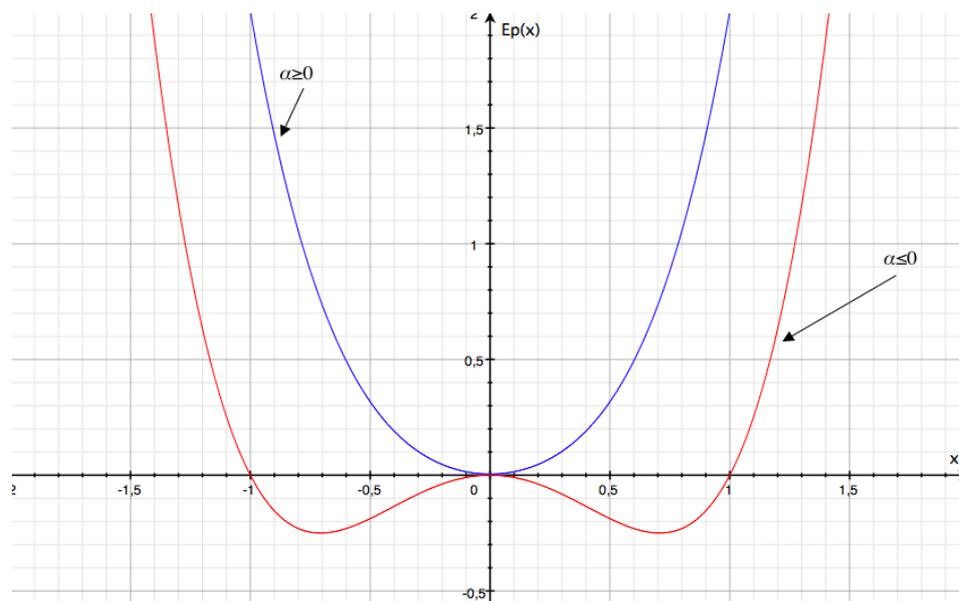
$$\ddot{x} + r \dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = V_0 \cos(\omega t)$$

Un exemple d'application est le pendule inversé dans le champ de pesanteur, avec $x = \theta$.



Le potentiel correspondant à cette équation est: $V(x) = \frac{1}{2} \alpha x^2 + \frac{1}{4} \beta x^4$.

En fonction du signe de α , le potentiel possède deux allures différentes:



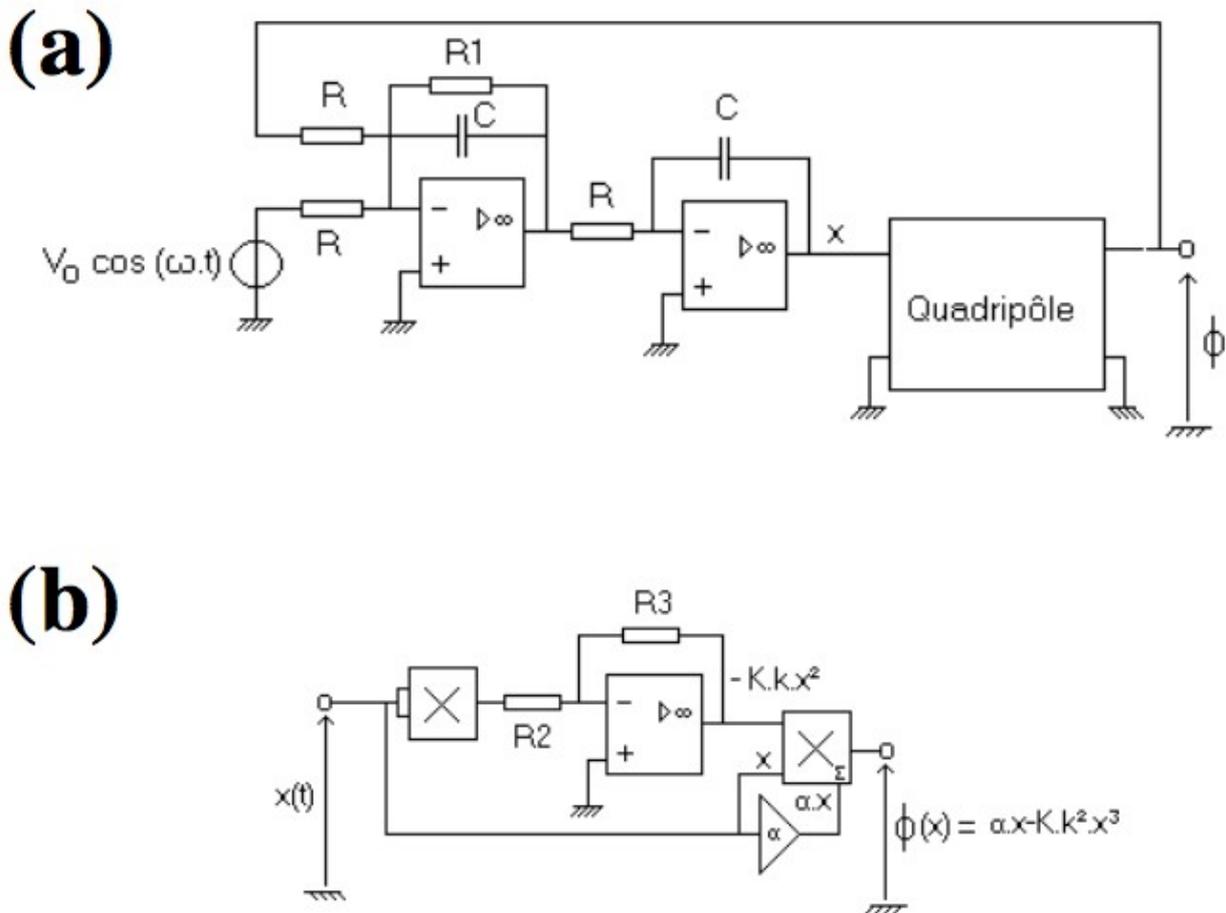
On observe deux cas bien différents.

Dans le cas $\alpha > 0$, on observe un unique puits de potentiel, alors que dans le cas $\alpha < C$, il y a formation de double puits de potentiel.

Les deux boîtes constituant l'oscillateur de Duffing sont les suivantes:



Les circuits sont détaillés ici, où b) est le quadripôle vu en a):

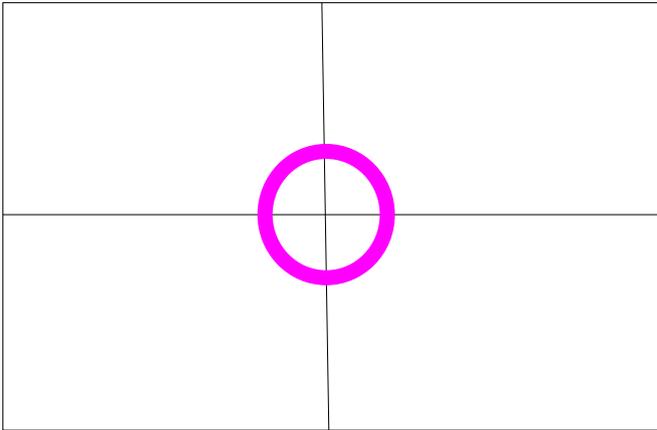


Le circuit électronique est fait de telle sorte que l'on puisse mesurer x et \dot{x} , et analyser le portrait de phase en mode XY à l'oscilloscope.

Grâce à ce montage, nous pouvons faire varier la valeur de α , grâce à un bouton rotatif potentiomètre. Nous observons le comportement du système au fur et à mesure que l'on diminue α , qui part initialement d'une valeur positive.

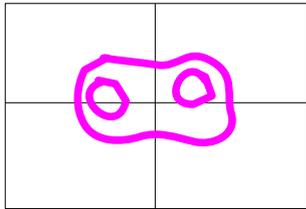
On se place à une valeur d'excitation $V_0 = 300 \text{ mV}_{pp}$.

On observe tout d'abord, en mode XY ($X = x$, $Y = \dot{x}$):



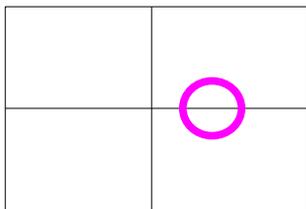
Le système oscille dans le simple puits de potentiel.

En diminuant α , on finit par arriver au stade à partir duquel le double-uits de potentiel commencent à se former (pour α proche de 0):

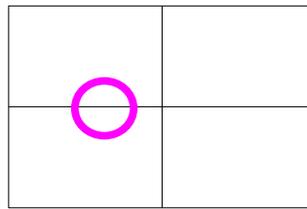


Le système est alors fort étrange, signe de début de chaos.

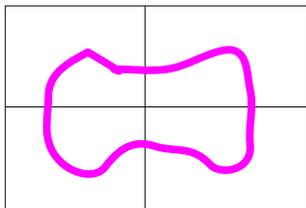
Si on diminue encore la valeur de α , les puits de potentiel deviennent trop profonds pour que l'excitation V_0 soit suffisante pour franchir la barrière de potentiel entre les deux puits. On obtient alors des oscillations à l'intérieur d'un des deux puits:



ou



Si on augmente alors la valeur de l'excitation V_0 , on peut parvenir à franchir la barrière de potentiel, et le système va alors osciller entre les deux puits de potentiel:



Normalement c'est symétrique, mais je suis un peu nul pour le dessin au pad :)
On voit bien la symétrie qui correspond à la symétrie du potentiel.

II- Le pendule simple

Matériel:

- Pendule
- Chronomètre

Des phénomènes physiques, le pendule simple est à coup sur l'un des plus connus, de part sa simplicité de résolution, et de la praticité de l'expérience.

L'équation régissant le mouvement du pendule est la suivante:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0$$

Moyennant l'hypothèse des petits angles, la linéarisation de cette équation conduit à un oscillateur

harmonique simple, de période constante $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

Cependant, sans faire l'approximation des petits angles, la période dépend de l'angle d'origine θ_0 .
Le raisonnement est le suivant:

La tension du fil ne travaillant pas, l'énergie mécanique s'écrit:

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + \vec{P} \cdot \vec{dl} \quad \text{et} \quad \vec{P} \cdot \vec{dl} = -m g l \cos(\theta)$$

La conservation de cette énergie mécanique (système isolé) conduit à :

$$\frac{1}{2} m v^2 - m g l \cos(\theta) = -m g l \cos(\theta_0)$$

$$\frac{l^2 \dot{\theta}^2}{2} = g l (\cos(\theta) - \cos(\theta_0))$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l} (\cos(\theta) - \cos(\theta_0))$$

$$dt = \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{1}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}} d\theta$$

En intégrant de 0 à θ_0 , on obtient $\frac{1}{4} T$, et avec de la trigo, on arrive à:

$$T = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} d\theta$$

La résolution de cette intégrale nous mène à un développement, qui au deuxième ordre, nous donne:

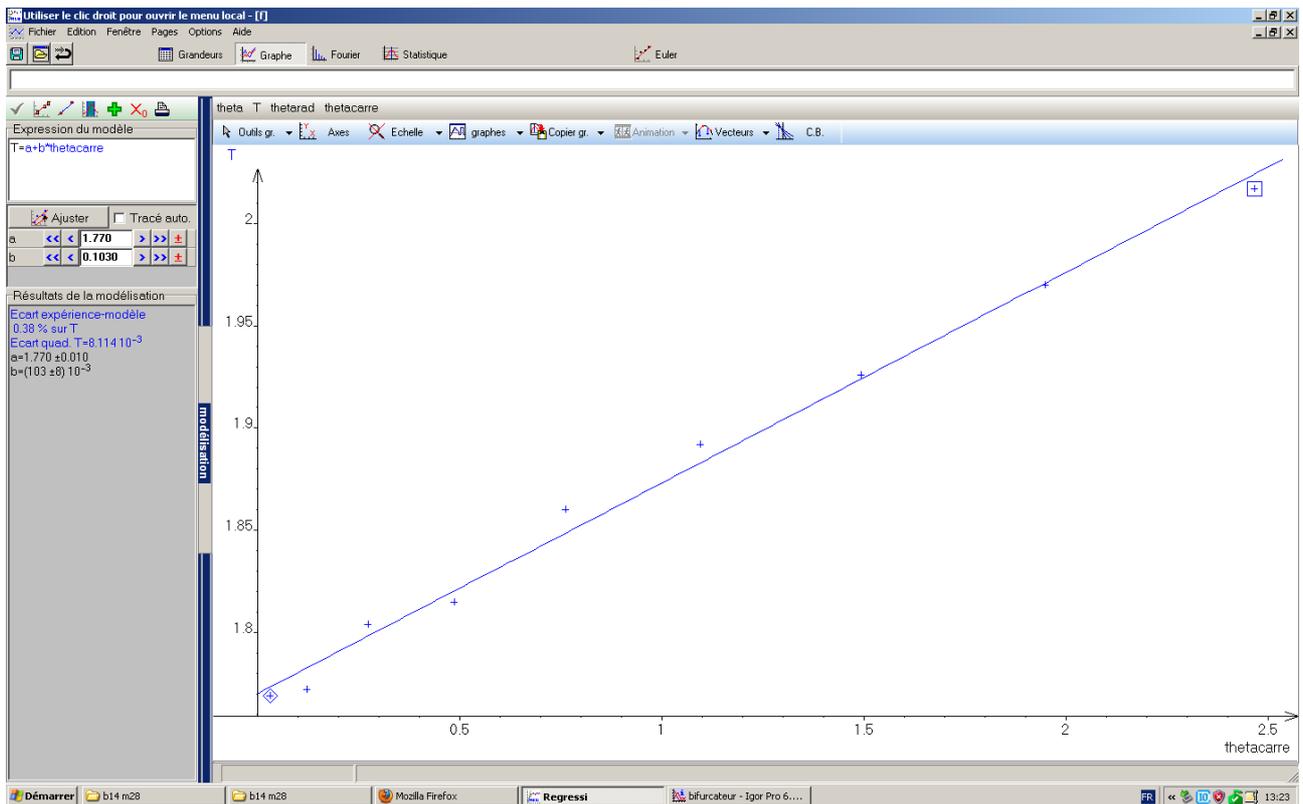
$$\frac{T}{T_0} = 1 + \frac{\theta_0^2}{16}$$

Cette formule est la formule de Borda, et nous nous proposons de la vérifier.

Pour ce faire, on réalise la mesure de la période des oscillations pour différents angles initiaux.

On obtient alors $T = f(\theta_0)$.

On peut également, et c'est ce que nous avons fait, tracer $T = f(\theta_0^2)$.



(on ne voit pas trop les points sur l'image, mais l'ajustement par une droite est totalement justifié)

On obtient alors une droite d'origine T_0 . (remarque, on peut vérifier que la valeur obtenue est bien environ égale à la valeur de T obtenue à petits angles)

Et le coefficient directeur de la droite est donc $\frac{T_0}{16}$.

Afin de confronter nos résultats, on peut comparer la valeur obtenue pour T_0 et celle mesurée (en mesurant la longueur l du fil du pendule).

III-Le bifurcateur

Matériel:

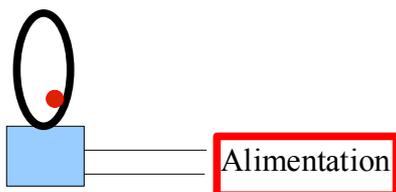
- Bifurcateur
- Alimentation stabilisée
- Stroboscope

Notre troisième expérience est le bifurcateur.

Le principe est le suivant:

On dispose d'un cerceau dans lequel peut rouler une bille.

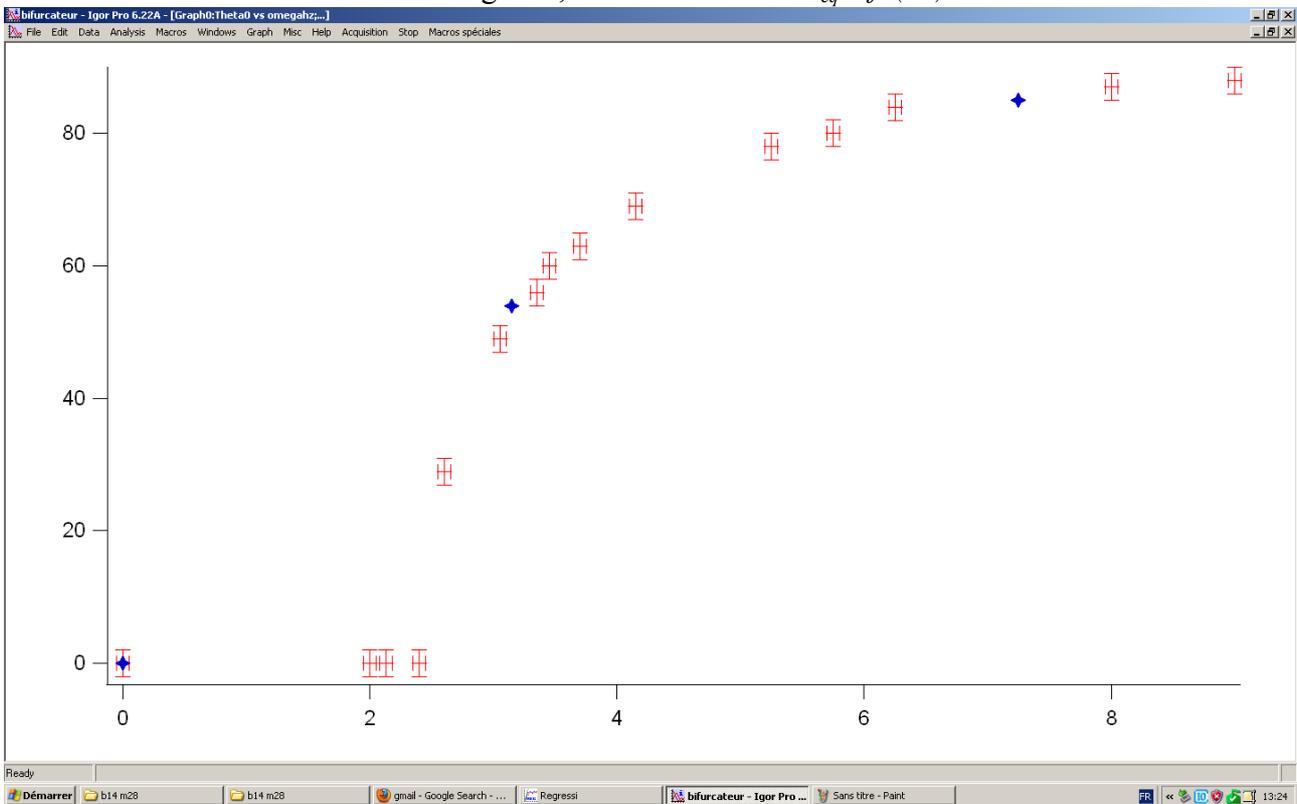
Ce cerceau est mis en rotation autour de l'axe vertical via une alimentation stabilisée:



Le but est ici d'observer les différentes positions d'équilibre de la bille en fonction de la vitesse de rotation du cerceau.

Pour ce faire, on se place dans le noir complet, et l'on fait tourner le cerceau.
 A l'aide d'un stroboscope, on peut alors, en essayant d'« immobiliser » le cerceau visuellement, connaître la vitesse de rotation du cerceau, qui correspond à la fréquence du stroboscope. On peut également lire la valeur de l'angle d'équilibre sur le repère angulaire gradué situé sur le cerceau.

On observe deux différents régimes, lors du tracé de $\theta_{eq} = f(\Omega)$:



Un premier régime où la bille reste dans la position $\theta=0$, pour $\Omega < \Omega_c$, où Ω_c est une valeur critique de Ω .

Puis un autre régime où la bille se place à une valeur de $\theta_{eq} \neq 0$, à partir de $\Omega > \Omega_c$.

Explication:

En traitant le mouvement de la bille dans le référentiel tournant, on obtient une énergie potentielle, somme du poids et de la force d'inertie de Coriolis:

$$E_p = m g R (1 - \cos(\theta)) - \frac{1}{2} m \Omega^2 R^2 \sin^2(\theta)$$

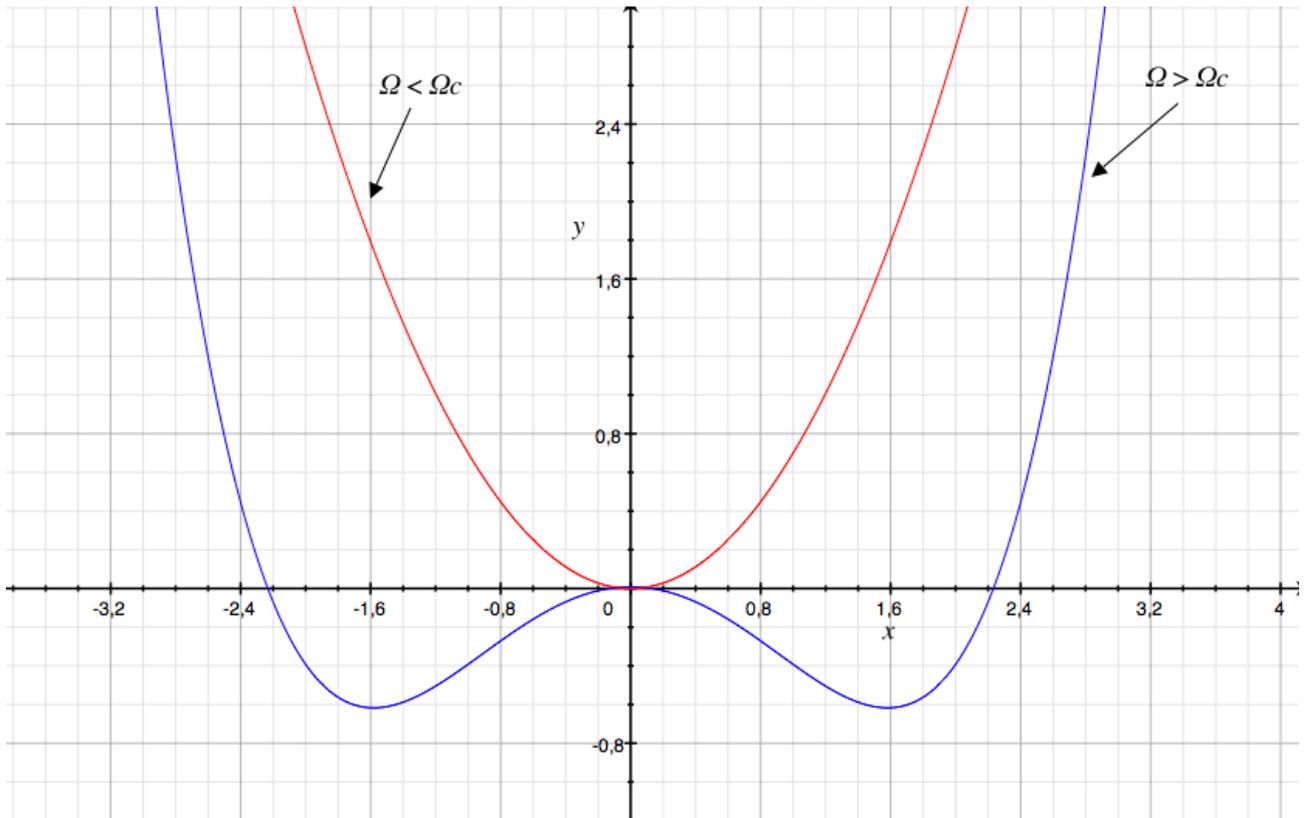
Afin d'étudier les positions d'équilibre:

$$\frac{dE_p}{d\theta} = 0 = m g R \sin(\theta) - m \Omega^2 R^2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

$$0 = \sin(\theta) (g - \Omega^2 R \cos(\theta))$$

On obtient alors deux situations, $\theta=0$ ou $\theta = \arccos\left(\frac{g}{\Omega^2 R}\right)$ si $\Omega > \sqrt{\frac{g}{R}} = \Omega_c$.

Le potentiel correspondant est alors le suivant, en fonction de la valeur de Ω :

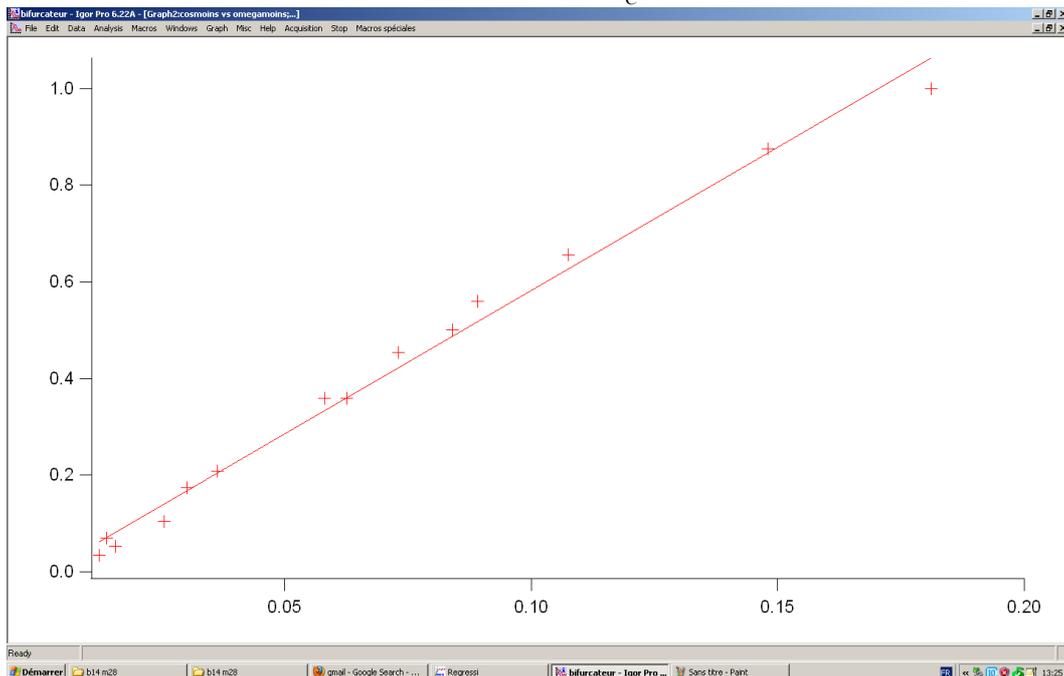


On reconnaît bien dans un cas le puits simple où seule la position $\theta=0$ est position d'équilibre, stable qui plus est.

Dans le deuxième cas, on reconnaît un double-puits de potentiel dans lequel 3 positions d'équilibres existent, l'une instable, $\theta=0$, et deux autres stables, $\theta = \pm \arccos\left(\frac{\Omega_c^2}{\Omega^2}\right)$.

Sur le graphe tracé plus tôt, on reconnaît bien les deux régimes.

Afin de déterminer la valeur de Ω_c , on va tracer la courbe $\cos(\theta) = f\left(\frac{1}{\Omega^2}\right)$, on doit alors trouver une fonction linéaire de coefficient directeur Ω_c^2 :



On obtient effectivement une droite.

On peut par exemple, à partir de cette valeur de Ω_c , vérifier que la valeur de R le rayon du cerceau est bien celui attendu.

En effet, $R = \frac{g}{\Omega_c^2}$. On peut comparer avec la valeur mesurée.

Cette mesure n'a pas d'intérêt, dans la mesure où connaître le rayon du cerceau à partir de cette expérience est totalement futile.

Cependant, confronter les deux valeurs de R permet de valider le modèle physique, et confirmer la présence de cette valeur critique de vitesse de rotation.

IV- Commentaires et questions:

Questions:

Duffing:

- Période des oscillations dans le puits simple?
- Période des oscillations pour un système ressort?

- Si $E_p = \frac{1}{2} k x^2$, $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$, et de manière générale, $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\left(\frac{d^2 E_p}{dx^2}\right)_0}}$

Pendule:

- Limite de T quand $\theta \rightarrow \pi$

Commentaires:

Duffing:

Attention, pour comprendre ces commentaires, je ne détaille pas avec des schémas, il faut avoir lu l'explication plus haut.

Autre manière de faire (mieux):

Prendre α tel qu'on ait le double-puits de potentiel, et jouer non plus sur cette valeur, mais sur la valeur de l'entrée V_0 que l'on fait débiter de 0 et que l'on augmente petit à petit.

On aura donc, en mode XY, au début un unique point, où le système est bloqué dans un des puits de potentiel. Puis on augmente V_0 , et on voit donc les oscillations apparaître, sous forme d'un cercle décalé par rapport à l'axe $x=0$, dont l'aire grandit quand on augmente V_0 . Et plus on augmente cette valeur, plus on se rapproche du franchissement de la barrière de potentiel. Lors de ce franchissement, on observe alors un doublement de période.

Biblio sur cette expérience, donnée par le correcteur: « Ordre dans le chaos »

Pendule:

Plutôt utiliser un module PASCO, que de faire les mesures « à l'oeil ». On a ainsi toutes les

informations, traitables beaucoup plus facilement. Faire bien attention aux incertitudes.
Plutôt que de ne traiter que la loi de Borda, tracer toute la courbe $T = f(\theta_0)$ pour $\theta \in [0 : \pi]$, afin d'avoir tout le "spectre" angulaire.

Ne pas utiliser un pendule à fil, mais un des deux pendules couplés.

Bifurcateur:

Pas finir sur la mesure de R, c'est pas très important. Bien insister que le fait que la valeur de R concorde donne de la crédibilité à l'existence d'un seuil.

Commentaires sur l'organisation générale:

Ne pas commencer par Duffing!!! Mais finir par ça.
Commencer par le pendule, qui amène la non-linéarité petit à petit. Puis le bifurcateur, et finir par Duffing, qui est si compliqué qu'il n'en est pas prédictible.

Autres expériences possibles:

Pont de Wien, ou résistance négative.

Binôme: B14 Thomas et Félix