

# M03 : Dynamique des fluides

Antoine Allard / Pascal Neveu

## Remarques des rapports de jurys :

2014 : *Comme recommandé par les précédents rapports, les candidats pensent à évaluer le nombre de Reynolds mais les conclusions qu'ils en tirent sont souvent incomplètes ou erronées. D'autres limitations des modèles (Stokes et Poiseuille en particulier) sont ignorées. Le principe des anémomètres utilisés doit être connu. Les viscosités mesurées doivent être comparées aux valeurs tabulées aux températures des expériences réalisées.*

2013 : *idem*

2012 : *idem + Rendre l'expérience de l'écoulement de Poiseuille quantitative nécessite certaines précautions.*

2011/2010 : *idem*

## Références :

[1] Dictionnaire de physique expérimentale - tome 1 -, Quaranta

[2] Hydrodynamique physique, Guyon Hulin et Petit

Rapports des années précédentes : [2013-2014](#) [2012-2013](#)

## Expériences possibles :

- Qualitatif :
  - Balle de ping-pong dans un entonnoir -> effet venturi
  - Effet coanda d'une balle de ping pong
  - Pertes de charge d'un fluide Newtonien
  
- Quantitatif :
  - Vidange de Torricelli -> tracé de  $\sqrt{\text{hauteur}} = f(\text{temps})$  (écoulement parfait)
  - Effet Venturi [1] (écoulement parfait)
  - Vérification de la loi de Poiseuille (fluide Newtonien) -> mesure de la viscosité de l'eau
  - Chute d'une bille dans le glycérol. Mesure de viscosité.

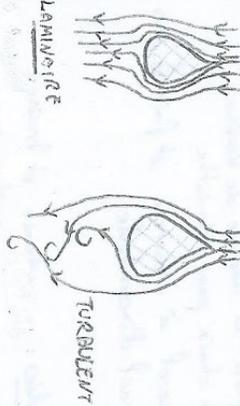
## Questions des années précédentes :

- What about Van der Waals ? [2] p52-54 : tension superficielle associée aux forces de cohésion internes qui s'exercent entre les particules de fluides, comme VdW, liaisons H, liaisons ioniques, liaisons métalliques. Les forces de VdW jouent un rôle prépondérant dans de nombreux corps moléculaires.

- Définition de la viscosité ? [2] p90-92 : définition macroscopique analogique à la proportionnalité entre le flux de chaleur et le gradient de température. Pour un écoulement de cisaillement simple (Couette plan), variation linéaire de  $v_x(y)$  et  $\frac{F_x}{S} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$  où  $\eta$  représente la viscosité dynamique. L'équilibre des forces de cisaillement sur un élément de volume fluide donne  $\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$  où  $\nu$  représente la viscosité cinématique (c'est un coefficient de diffusion pour la quantité de mouvement). Généralisation à 3D :  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nu \Delta \vec{v}$
- Comment savoir si on peut négliger la viscosité ? [2] p100-102 Comparaison entre les mécanismes de convection (flux de convection en  $\rho U^2$ ) et de diffusion (flux en  $\eta \frac{U}{L}$ ) dont le rapport des flux est le nombre de Reynolds  $Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{\text{flux convectif}}{\text{flux diffusif}} = \frac{\text{temps diffusion}}{\text{temps convection}}$
- Commentaire sur la loi de vitesse type chute libre dans le tube de Toricelli ?
- Qu'est-ce qu'un fluide Newtonien ? fluide pour lequel on a proportionnalité entre contrainte de cisaillement et taux de cisaillement (ou gradient de vitesse)
- Hypothèses de l'équation de Navier Stokes ? [2] p167-170 : Relation du PFD à un volume de fluide dans le formalisme lagrangien :  $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \vec{grad})\vec{v} = \rho \vec{f} - \vec{grad}(p) + \vec{div}([\sigma'])$  avec l'accélération d'une particule de fluide, la variation de vitesse associée à l'exploration du champ de vitesse au cours du mouvement d'une particule fluide, l'ensemble des forces en volume appliquées au fluide, les forces de pression et les forces de viscosité. Pour un fluide newtonien :  $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \vec{grad})\vec{v} = \rho \vec{f} - \vec{grad}(p) + \eta \Delta \vec{v} + (\zeta + \frac{2}{3}) \vec{grad}(\text{div}(\vec{v}))$ . Si le fluide est incompressible ( $\text{div}(\vec{v}) = 0$ ) on obtient l'équation de N-S :  $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \vec{grad})\vec{v} = \rho \vec{f} - \vec{grad}(p) + \eta \Delta \vec{v}$
- Différence fluide parfait fluide réel ? [2] p170 : Pour un fluide parfait, les effets de viscosité sont négligeables. L'équation de N-S devient l'équation d'Euler (en posant  $\eta = 0$ ) :  $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \vec{grad})\vec{v} = \rho \vec{f} - \vec{grad}(p)$

# MP03 - DYNAMIQUE DES FLUIDES

Deux régimes d'écoulement :



nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot d}{\mu}$$

Fluence et densité de masse

$$S = \text{concentration} = \frac{v}{\sqrt{Re}}$$

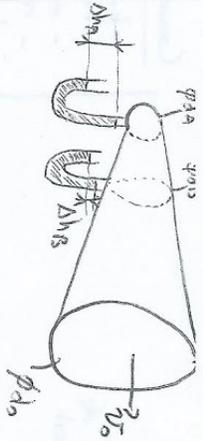
## -/ ÉCOULEMENTS PARFAITS

1) EFFET VENTURI.



Resserrement des lignes de courant => dépression.

4 minutes



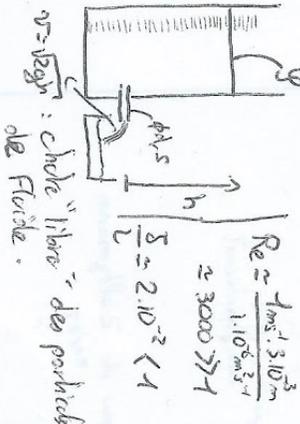
$$Re \approx \frac{3 \text{ m.s}^{-1} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{1.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{.s}^{-1}} \approx 100000 \gg 1$$

$$\frac{S}{L} = 3 \cdot 10^3 \ll 1$$

$$\Delta h_g - \Delta h_b = \frac{\rho \cdot v \cdot d^4}{2 \rho g} \left( \frac{1}{d_1^4} - \frac{1}{d_2^4} \right)$$

mesure directe = 4,5 ± 0,3 m.s<sup>-1</sup>  
 expérience = 4,0 ± 0,8 m.s<sup>-1</sup>

2) VIDANGE DE TORRELLI



$$v = \sqrt{2gh}$$

choix "libre" des particules de fluide.

$$\sqrt{h_0} = \sqrt{h_0} - \frac{v}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{g}{2}}$$

$$h \left( \frac{dh}{dt} \right) = c_1 t + \frac{1}{2} h_0(h)$$

mesure directe = 3,80 ± 0,02 mm  
 expérience = 3,38 ± 0,05 mm

→ la viscosité joue un rôle.

\* Pertes de charge :

22 minutes

II/ ÉCOULEMENTS VISQUEUX

1) EXPÉRIENCE DE POISEUILLE

$$Re \approx \frac{0,1 \text{ m.s}^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}}{1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{.s}^{-1}} \approx 200$$

$$\frac{S}{L} \approx 7 \cdot 10^2$$

$$h = \frac{128 \cdot \nu \cdot L}{d^4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot g} \cdot D_m$$

$$L = [74 \cdot 10^5] \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$d = [2,9 \cdot 10^5] \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\nu_{exp} = (8,1 \pm 0,8) \mu\text{m}^2 \text{.s}^{-1}$$

$$\nu_{TAB} = 8,92 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{.s}^{-1} \approx 25^\circ\text{C}$$

30 minutes

2) MESURE DE VISCOSITÉ : CHUTE D'UNE GOUTTE DANS LE PLYCEL.

$$Re \approx \frac{1}{5 \cdot 10^{-5}} \ll 1$$

$$\frac{S}{L} = 150 \gg 1$$

Traitement statistique :

$$\eta_{exp} = 0,87 \pm 0,06 \text{ kg.m}^{-1} \text{.s}^{-1}$$

$$\eta_{TAB} = 0,984 \text{ kg.m}^{-1} \text{.s}^{-1} \approx 25^\circ\text{C}$$

$$\eta = \frac{d^2}{8 \cdot \nu} \cdot (\rho_{liq} - \rho_{air}) \cdot g$$

40 minutes

[2] p106-108

Manip introductive pour illustrer l'écoulement rampant (écoulement stable, à petit nombre de Reynolds) et turbulent (écoulement moins stables, à grand nombre de Reynolds). Dans certains cas la géométrie du système imposent que les termes de transport par convection peuvent rester négligeables même à grand nombre de Reynolds : écoulements laminaires. C'est le cas pour des écoulements parallèles où une seule composante de la vitesse est non nulle.

A partir d'une certaine vitesse une allée de Bénard-von Karman apparait.

On ne considérera que des écoulements laminaires par la suite.

On a mis de la poudre d'aluminium et projeté directement avec un rétroprojecteur;



## I/ Écoulement parfait

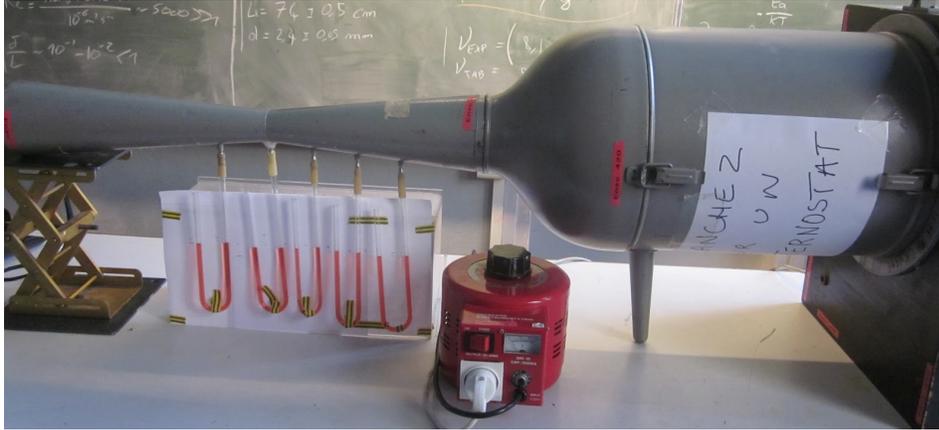
Effet Cuanda avec une balle de ping pong qui lévite.

### I.1/ Effet Venturi

[2] p272-275 : Application de l'équation de Bernoulli pour créer une dépression au niveau du rétrécissement d'un tube (aspiration du mélange air-essence dans un carburateur de voiture, aileron de formule 1,...)

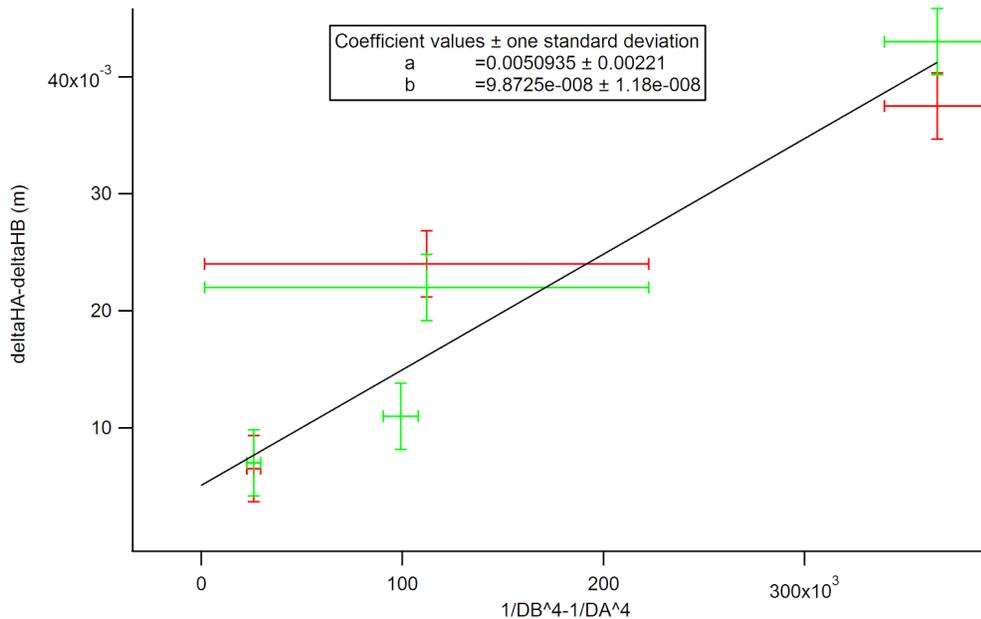
Les tubes manométriques sont suffisamment étroits pour considérer qu'ils perturbent peu l'écoulement. Si la perte d'énergie par frottement visqueux est suffisamment faible devant l'énergie cinétique du fluide, on peut applique l'équation de Bernoulli pour un fluide parfait et incompressible dans un écoulement stationnaire, le long d'une ldc horizontale.

A brancher sur l'alternostat (le rouge) pour faire varier le débit. L'expérience marche assez moyennement car dans l'un des tubes, on n'a aucune surpression, ce qui signifie qu'on est à la pression atmosphérique à ce niveau.



En traçant  $\Delta h_A - \Delta h_B = f\left(\frac{1}{d_B^4} - \frac{1}{d_A^4}\right)$  on doit obtenir une droite dont le coefficient directeur vaut  $\frac{\rho_{air} d^4 v_0^2}{2\rho_{eau} g}$  dont on peut extraire la valeur de la vitesse. A comparer avec la mesure avec un anémomètre en sortie de tube  
 En rouge, les points de préparation. En vert, les points de présentation.

On pourrait également travailler à plusieurs vitesses  $v_0$  et vérifier que  $\frac{\Delta h_A - \Delta h_B}{v_0^2} = f\left(\frac{1}{d_B^4} - \frac{1}{d_A^4}\right)$  est encore une droite. Cela permettrait d'ajouter des points supplémentaires à notre droite.



L'expérience avec de l'air comprimé injecté dans un tube Venturi en verre fonctionne bien, en mettant les manomètres dans l'eau, on voit bien les surpressions et les pertes de charge.

## I.2/ Vidange de Torricelli :

[2] p280-282 Equation de Bernoulli pour un fluide parfait et incompressible dans un écoulement quasi-stationnaire, le long d'une ligne de courant. La vitesse de sortie du jet vaut

$$v = \sqrt{2gh}$$

L'hypothèse de quasi-stationnarité se vérifie si :

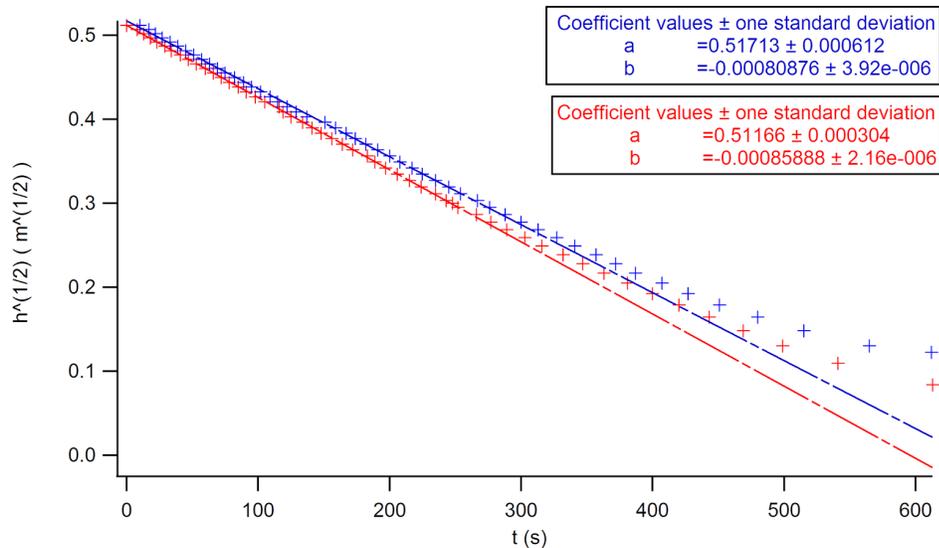
$$\frac{\| \frac{dv}{dt} \|}{\| (v, \text{grad}) v \|} \sim \frac{h}{U\tau} \ll 1$$

La conservation du débit donne :  $\frac{dh}{dt} S = U_s$  soit  $\frac{h}{U\tau} \sim \frac{S}{S} \ll 1$



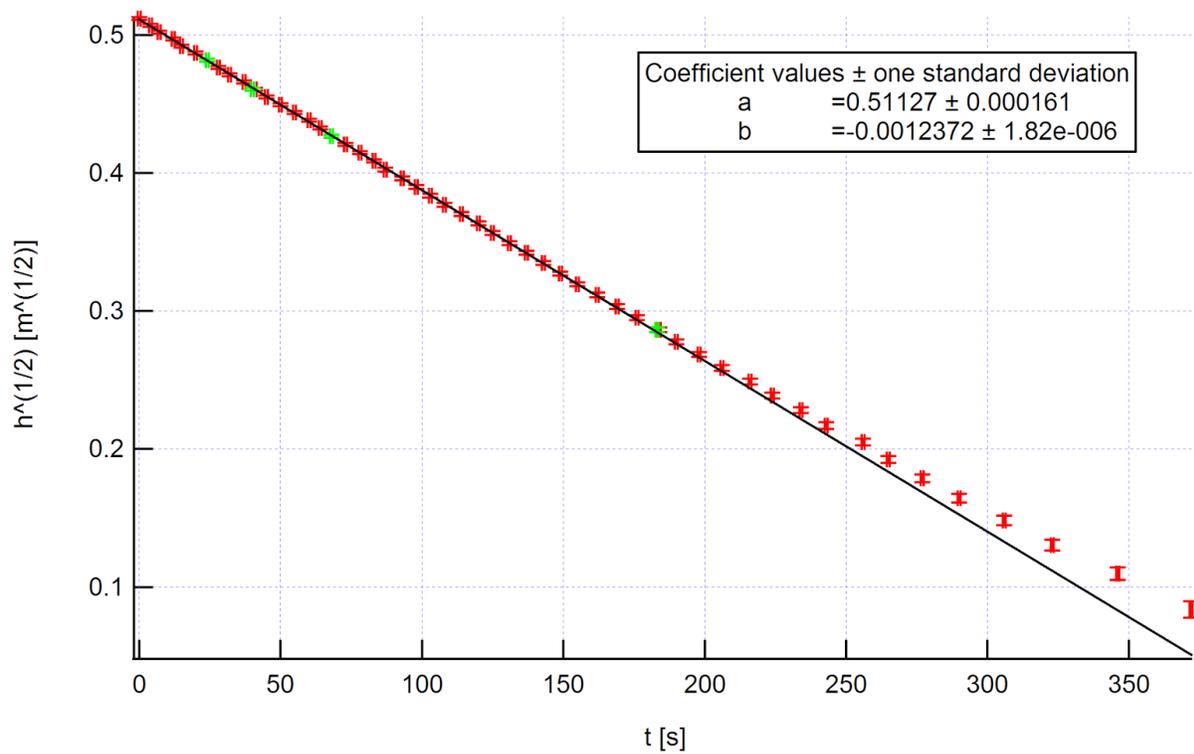
Pas de bouchon, on a ajouté un robinet afin de fermer la sortie pour le remplissage. Lors du remplissage, remplir au delà de la graduation 0 (il est difficile d'enlever le robinet et démarrer le chronomètre en même temps...). On retire ensuite le robinet pour la mesure de  $\sqrt{h}$  fonction du temps, en déclenchant un chronomètre lorsque le niveau passe sous le 0. Il vaut mieux retirer le robinet que l'ouvrir, ça fonctionne mieux (cf courbes ci dessous).

En gardant le robinet :

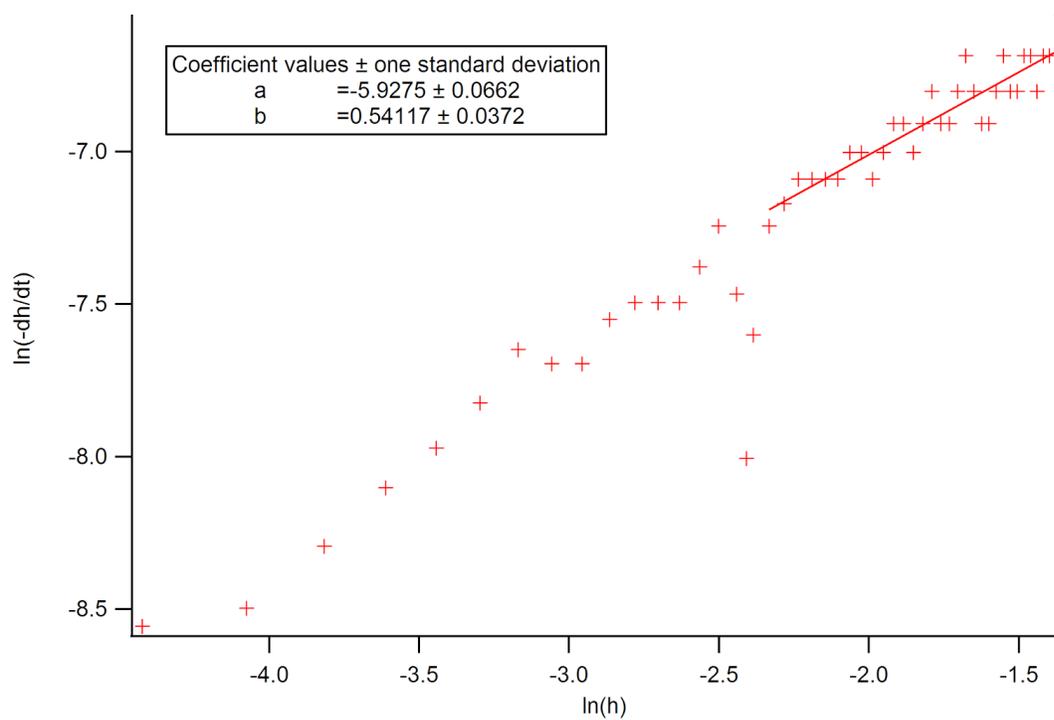


La durée de vidange est grande et le décrochage tôt.

Sans robinet :



On a bien une droite. Cependant on ne vérifie pas que la loi en  $\sqrt{t}$  est vérifiée. Pour cela on trace  $\ln(-dh/dt) = f(\ln(h))$  dont le coefficient directeur devrait être  $\frac{1}{2}$ . On vérifie que cette loi n'est vérifiée que sur les 30 premiers points (sur 50).



Donc on réalise le fit de  $\sqrt{h} = f(t)$  que sur ces 30 points. Le décrochage de la courbe à la fin s'explique la perte de charge, le changement de section du capillaire et les turbulences à l'entrée (dues à la viscosité).

La section effective que l'on détermine par cette mesure est plus faible que celle mesurée. Cela est causée par les problème de tension de surface, de viscosité. On pourrait essayer de voir ce que cela donne en raccourcissant le tube de sortie.

La loi de Torricelli représente la vitesse d'une chute libre de particule de fluide.

### I.3/ Transition vers l'écoulement visqueux

On revient sur l'expérience de l'effet Coanda cette fois en observant que la balle se met à tourner en raison des forces de traînée qui provoquent la rotation de la balle.

Écoulement d'un fluide incompressible dans un tube de section circulaire. Théorie [2] p197-202. Loi de Poiseuille :  $D_m = \frac{dm}{dt} = \frac{\pi \Delta p}{128 \nu L} d^4$  où  $\Delta p$  est la variation de pression entre les deux extrémités du tube de longueur L et de diamètre d. Pour l'établir on fait l'hypothèse d'un écoulement unidirectionnel (stationnaire) dans le cylindre avec une vitesse qui ne dépend que de r.

On vérifie ici que la différence de pression est, à débit constant, proportionnel à L.



Pour la perte de charge, ça marche bien en injectant de l'eau avec un robinet et les manomètres vers le haut. On vérifie que les hauteurs d'eau s'alignent suivant une droite. Coefficient directeur devrait être égal à  $\rho g \frac{\pi d^4}{128 \nu D_m}$  donc diminue lorsque l'on augmente le débit. L'ajout d'un fond noir peut rendre la manip plus visible.

## II/ Écoulement visqueux

### II.1/ Vase de Mariotte/Expérience de Poiseuille

On impose une variation de pression entre les deux extrémités d'un tube.

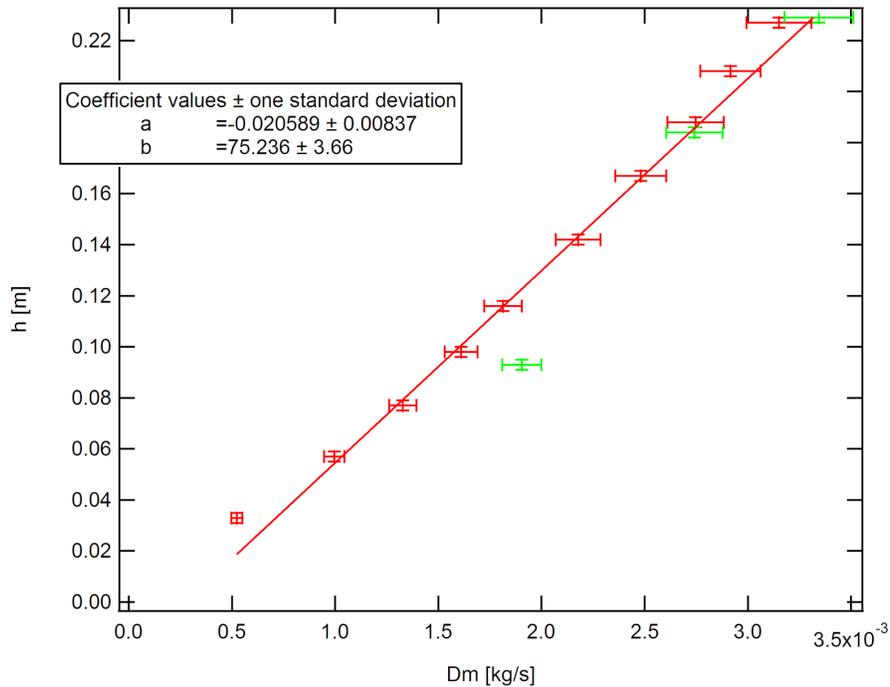


Remplissage du vase en entier, le bouchon n'a qu'un seul trou dans lequel on vient glisser un tube en verre vide. En réalisant l'écoulement, si l'herméticité est bien vérifiée en haut, on vide le tube de verre et **la position du bas du tube fixe p0**. Si  $h$  représente la distance tube horizontal-tube vertical, on aura  $\Delta p = \rho gh$ . On mesure le débit massique en sortie d'un long tube ( $L \sim 75\text{cm}$ , de diamètre petit pour être proche de la couche limite. On a utilisé un tube de  $d=2.5\text{mm}$  de diamètre) à l'aide d'un chronomètre, d'un cristalliseur et d'une balance. Il est difficile de démarrer le chrono et ouvrir le robinet en même temps, une alternative consiste à démarrer le chrono et ouvrir le robinet au bout de 5s, puis le fermer au bout de 15s. On commence par une hauteur d'eau petite, en faisant un trait au niveau du bouchon, puis on reitère en relevant le tube d'une certaine hauteur. Le résultat obtenu n'est pas mal du tout :

$$h = f(D_m)$$

Le caractère un peu quadratique de la courbe s'explique par le caractère moyennement laminaire de l'écoulement ( $Re$  proche de 200).

On a fait le choix de mettre le robinet à l'entrée du tube, mais on pourrait également seulement travailler avec un robinet en sortie ce qui permet d'atteindre (a priori) le régime permanent plus rapidement. On ne l'a pas testé.



[2] p509-512

Le fait que la vitesse dans le tube ne dépende que de  $r$  n'est pas vérifié à l'entrée du tube : une certaine distance  $x$  est nécessaire à l'entrée du tube pour l'établissement du profil parabolique (variation d'épaisseur de la couche limite)  $x \approx \frac{U(\frac{d}{2})^2}{\nu} = Re \cdot \frac{d}{2}$ . Il faut donc vérifier que  $x$  est petit devant  $L$ .

L'écoulement de Poiseuille est valable pour un écoulement laminaire : pour des nombres de  $Re$  supérieurs à 1000, l'écoulement devient instable

## II.2/ Chute d'une bille dans le glycérol : mesure de viscosité

Force exercée sur une sphère en mouvement dans un fluide [2] p 466-468.

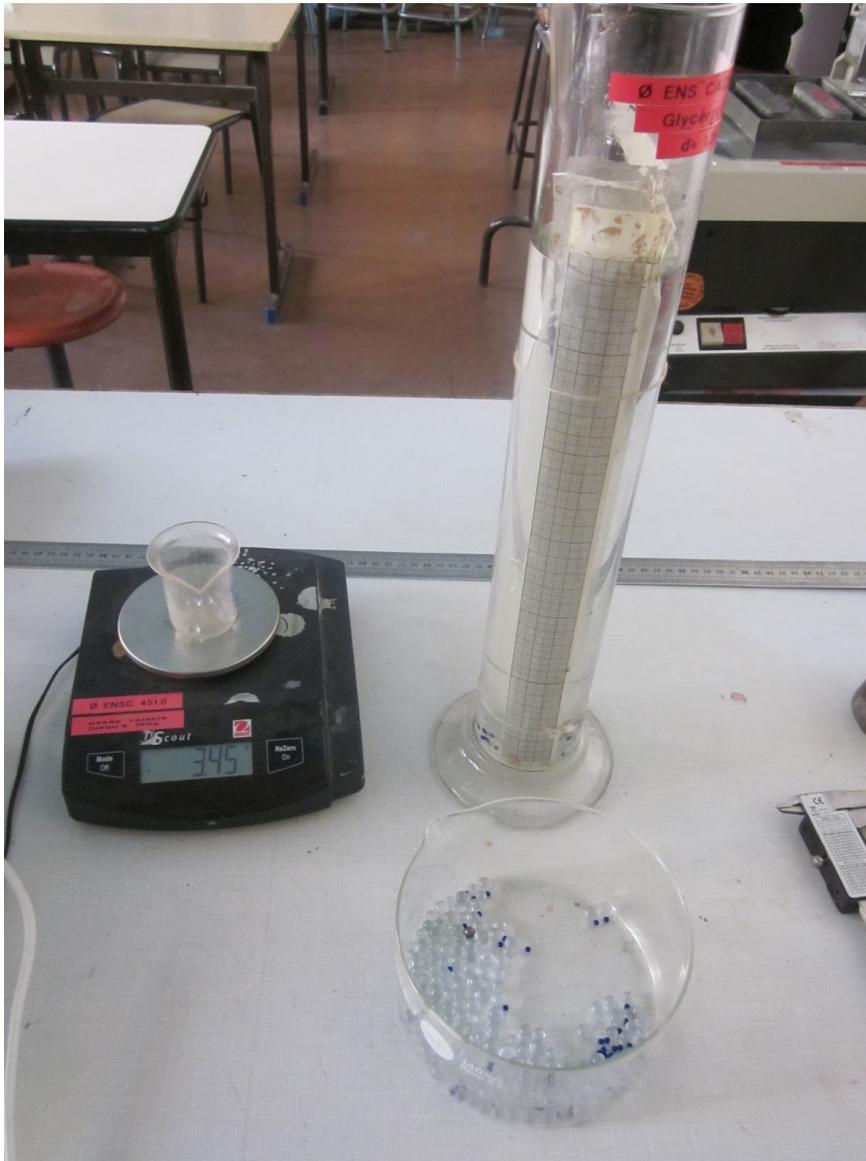
Formule de Stokes :  $\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{U}$  qui est bien vérifiée jusqu'à des nombres de  $Re$  de l'ordre de l'unité mais établie sous l'hypothèse  $Re \ll 1$ .

Lorsqu'une bille de rayon  $R$  et de densité  $\rho_s$  tombe dans un fluide s'étendant à l'infini, de densité  $\rho_f$  et de viscosité  $\eta$ , elle tombe en régime permanent avec une vitesse limite

$$v_{lim} = \frac{2(\rho_s - \rho_f)gR^2}{9\eta}. \text{ Le régime transitoire dure } \tau = \frac{2\rho_s R^2}{9\eta}.$$

La présence de parois placées parallèlement ou perpendiculairement au mouvement de la sphère augmente les effets de friction. Pour une sphère placée dans un tube de rayon 20 fois celui de la sphère, la force de trainée est augmentée de 20%. Pour le cas de l'influence d'une paroi plane perpendiculaire à la direction du mouvement d'une sphère, on montre que lorsque

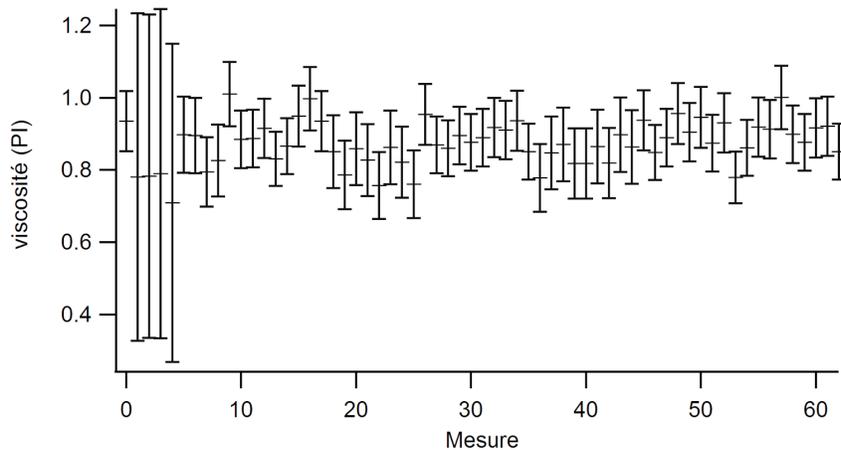
la sphère est suffisamment proche de la paroi on a  $\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{U}\frac{R}{h}$  où  $h$  est la distance minimale entre la sphère et la paroi. On raccorde les deux expressions par  $\vec{F} = -6\pi\eta R(1 + \frac{R}{h})\vec{U}$



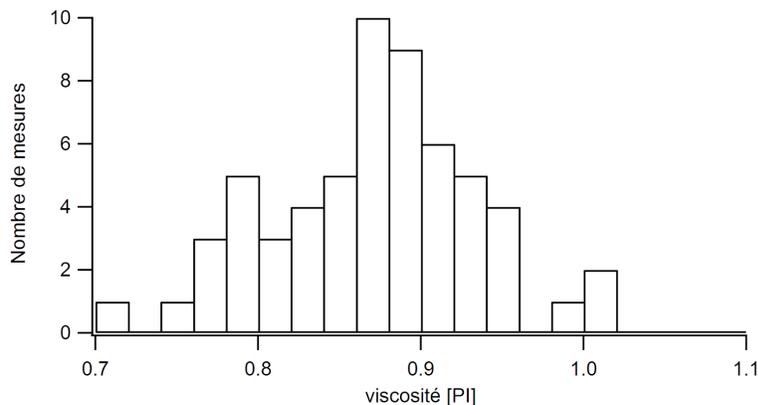
On mesure le temps que met la bille à tomber entre deux élastiques. Attention à bien lâcher la bille au centre du tube, et que les élastiques ne soit ni trop près trop haut (régime transitoire sur  $\sim m$ ) et trop près du bas (elle ralentit). Quand on vidange le tube pour récupérer les billes, attention au bulles créée lorsqu'on remet le glycérol (verser avec la colonne en biais). Elles mettent du temps à remonter et donnent des résultats assez bizarres, pour des petites billes.

On a fait un traitement statistique qui donne des résultats assez bon. En préparation on a fait environ 30 lancers, et avec les répétitions et la présentation on arrive à un total de 60 billes,

ce qui permet d'avoir une belle distribution. Voici la répartition des valeurs de viscosité que l'on déduit



Les toutes petites billes donnent des barres d'incertitude énormes, on ne les gardera pas pour la statistique.



On vérifie que les mesures se font après un temps supérieur à  $\tau \approx 20 \text{ ms}$

### **Questions :**

- Notion de couche limite  $\delta$  et du nombre de Reynolds  $Re$  : le nombre de  $Re$  détermine si l'écoulement est laminaire ou turbulent, la couche limite donne la proportion de l'écoulement que l'on peut considérer comme parfait.
- Soufflerie et effet Venturi : les 1er manomètres mesurent une surpression dynamique = tubes de Pitot
- Incertitudes : comment ont-elles été réalisées ? Il faut dire que l'on suppose les erreurs indépendantes, et que les mesures sont à répartition gaussiennes autour de leur valeur moyennes pour appliquer la formule d'incertitude de type dérivée logarithmique.
- Si l'on fait un choix de protocole, il faut le préciser : par exemple on a décidé de ne pas considérer les petites billes lors de la chute dans le glycérol.

- Erreur due à la montée d'eau dans un capillaire ? loi de Jurin, de l'ordre du mm. Utile surtout si l'on veut rendre quantitative la manip de perte de charge.
- La valeur trop basse de viscosité que l'on trouve avec le vase de Mariotte peut-elle être expliquée par la température, les jonctions ? La valeur diminue avec T. Selon quelle loi ? facteur de Boltzmann  $\eta \sim e^{-\frac{E_a}{kT}}$ .
- Quelle est la viscosité dynamique de l'eau ? D'autres fluides ?
- Exemple de fluides non newtonien ? salive, maïzena
- Ordre de grandeur du régime transitoire dans l'expérience de la chute des billes. Quel est l'effet des parois ? Correction : formule de Stokes.

### **Commentaires :**

- Bonnes manips, bon enchainement
- Bon choix pour Mariotte, la manip proposée dans le Quaranta pour visualiser les différents régimes d'écoulement est vivement déconseillée.
- Glycerol quasi incontournable et à faire avec un gros travail d'incertitude.
- Faire attention à ce que signifient Re et la couche limite
- L'expérience de Venturi est celle qui fonctionne le moins bien mais en même temps sans celle-ci on pourrait nous reprocher de ne pas avoir manipuler de fluide gazeux.

### **Autres idées de manips :**

- mesure de portance et de traînée d'une aile d'avion ( $C_x$  et  $C_z$ )
- viscosimètre par vidage dans une burette
- freinage d'un oscillateur dans un fluide
- tube de Pitot