

Compte-rendu de préparation de leçon de physique

Messages à faire passer dans la leçon:

- Les oscillations de grande amplitude autour du minimum d'un puits de potentiel sont non-linéaires.
- La non-linéarité enrichit le spectre des oscillations, ce qui se voit sur le portrait de phase.
- Dans les oscillateurs auto-entretenus, ce sont les non-linéarités qui fixent l'amplitude des oscillations.

Plan choisi :

1. Portrait de phase d'un oscillateur linéaire
2. Oscillations non-linéaires
3. Oscillateurs auto-entretenus

Applications traitées (sans détailler):

- oscillations non-linéaires libres: le pendule
- oscillations non-linéaires forcées: l'électron élastiquement lié (génération de seconde harmonique en optique non-linéaire)
- oscillateur auto-entretenu: oscillateur à résistance négative

Applications qui auraient pu être traitées (sans détailler):

- un oscillateur paramétrique
- un autre oscillateur auto-entretenu (pont de Wien)

Expériences présentées (sans détailler) :

- tracé numérique du portrait de phase du pendule
- tracé expérimental du portrait de phase de l'oscillateur à résistance négative

Bibliographie et remarques bibliographiques :

- BUP 744 (très complet, utile pour toute la leçon)
- BUP 804 (très bien pour introduire l'oscillateur de vdP)
- Bergé, L'ordre dans le chaos 530.5 BER (pour des généralités sur les portraits de phase, en particulier des définitions rigoureuses et "avec des mots")
- Faroux et Renault, Mécanique I 53.4 FAR (tout sur le pendule; intéressant pour vdP)
- Garing, Ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques 53.6 GAR (pour l'optique non linéaire)
- Bréal, Expériences d'électronique 621.38 DUF (pour la résistance négative)
- <http://www.physique.ens-cachan.fr/laboratoire/experiences/fichiers/PeriodePendule.pdf> (pour un calcul complet de la période du pendule par intégration de la conservation de l'énergie, pas fait dans le FR)

Remarques importantes des rapports de jury :

- faire une intégration numérique c'est bien

LP 49: Oscillateurs: portraits de phase et non-linéarités

Audrey Chatain, **Arthur Bouchut**

20 octobre 2015

Niveau : L2 ; Prérequis : OH libre et forcé, bases d'électrocinétique, modèle de l'électron élastiquement lié

Systèmes étudiés oscillateurs à un degré de liberté = systèmes décrits par un paramètre dont l'évolution est périodique (ou pseudo-périodique) au cours du temps

1 Portrait de phase d'un oscillateur linéaire

oscillations d'un système dans un puits de potentiel proche de sa position d'équilibre

1.1 Portrait de phase [2, 6]

- définitions : espace des phases, trajectoire de phase, portrait de phase (Bergé)
- sens de parcours, périodicité, réversibilité, invariance par dilatation

1.2 Oscillateur linéaire [1, 2]

- oscillateur harmonique comme DL2 d'un puits de potentiel (\rightarrow force de rappel linéaire $F = -\nabla(m\omega_0 x^2/2)$)
- établissement de l'équation du portrait de phase de l'OH ($\int dt \dot{x} \times (\ddot{x} + \omega_0^2 x) = 0$ donne une ellipse)
- grand tableau avec les portraits de phase de l'oscillateur harmonique libre, libre amorti et forcé et la comparaison de leurs propriétés de périodicité, de réversibilité et d'invariance par dilatation ; dire que la présence d'un attracteur est caractéristique des systèmes non conservatifs
- remarque : cas de l'oscillateur harmonique libre amplifié ($\xi < 0$) (spirale divergente)

2 Oscillations non-linéaires

approximation harmonique du potentiel pas valable trop loin de la position d'équilibre \rightarrow équations d'évolution non linéaires, résolution analytique exacte souvent impossible

2.1 Le pendule simple non amorti (oscillations libres) ; résolution numérique [1, 3]

- mise en évidence des différents régimes (fronde/oscillations) à partir de l'expression de l'énergie (annulation ou non de $\dot{\theta}^2$)
- tracé du potentiel et du portrait de phase au tableau
- zoom sur les oscillations proches de la séparatrice : anharmonicité (trajectoire de phase non elliptique : termes en $\omega, 3\omega, \dots$) et non-isochronisme (formule de Borda)
 \rightarrow non démontrés mais c'est fait dans [3] ; la démonstration de la formule de Borda à partir de $T = \int d\theta/\dot{\theta}$, est faite en entier dans [7]
- tracé avec Scilab de l'évolution temporelle et du portrait de phase dans différentes conditions (code en annexe)
 \rightarrow transparent avec description brève de la méthode d'intégration (écriture sous forme d'un système différentiel linéaire $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ où $\mathbf{X} = (\theta, \dot{\theta})$ puis méthode de type Euler ou Runge-Kutta)

2.2 L'électron élastiquement lié (oscillations forcées) ; résolution perturbative [4]

- ordre de grandeur des champs électriques noyau/soleil/laser (Garing 5.1)
- résolution perturbative de la génération de seconde harmonique (Garing 5.3) → enrichissement spectral (anharmonicité) lorsque le forçage violent écarte beaucoup l'électron de sa position d'équilibre
- attention ! si l'amplitude de seconde harmonique est grande c'est parce que $|E_0|^2$ est grand et pas parce que ω est proche de ω_0 ou $\omega_0/2$: à cause de l'absorption (qui n'apparaît pas dans le Garing en l'absence de terme d'amortissement) on choisit généralement $\omega \ll \omega_0$, cf Dunod ou Boyd (biblio additionnelle) qui prennent en compte un terme d'amortissement et résolvent en complexes
- application : laser vert à 532 nm à partir d'un laser Nd:YAG à 1064 nm + cristal KTP

3 Oscillateurs auto-entretenus

systèmes fournissant un signal périodique en l'absence d'excitation périodique extérieure (Krob p.119)

3.1 Un exemple : l'oscillateur à résistance négative [1, 5]

- montage de [5, p. 172] (fig 12) avec seulement la résistance négative et le convertisseur (pas besoin d'interrupteur) : visualisation du portrait de phase (q, \dot{q}) non elliptique en régime permanent + visualisation du régime transitoire en mode persistance infinie sur l'oscilloscope
→ *transparent avec le schéma du montage et les équations d'évolution*
- attention ! la courbe de la caractéristique de la résistance négative est fautive [5, p. 170]
- équations d'évolution (pas écrites dans [5], se retrouvent en suivant [1, p. 730]) :

$$\ddot{i} + \frac{r-R}{L}\dot{i} + \frac{i}{LC} = 0 \text{ si } |i| < \frac{V_{\text{sat}}}{R_0 + R} \text{ (amplification si } R > r)$$
$$\ddot{i} + \frac{r+R_0}{L}\dot{i} + \frac{i}{LC} = 0 \text{ si } |i| > \frac{V_{\text{sat}}}{R_0 + R} \text{ (amortissement)}$$

Les équations en q sont les mêmes à une constante près (rq : le portrait de phase obtenu est parcouru dans le sens antihoraire : il y a un signe – quelque part)

3.2 Modèle de van der Pol [1, 2, 3]

- équation de van der Pol (remplacement de ξ par $\xi(x)$ qui change de signe); but : rendre compte d'oscillations d'amplitude fixée
→ *la transition entre l'oscillateur libre amorti et l'oscillateur de van der Pol est faite de manière super pédagogique dans [2]*
- tracé au tableau du portrait de phase dans un cas très non-linéaire : existence d'un cycle limite indépendant des conditions initiales (non-invariance par dilatation) : les non-linéarités fixent l'amplitude des oscillations
- petit calcul de l'amplitude du cycle limite : $\sim 2x_0$ si pas trop non-linéaire (fait dans [3])
- lien entre l'oscillateur à résistance négative et l'oscillateur de van der Pol (puits carré vs puits quadratique) : voir [1]
- application : compréhension des mécanismes de la régulation du rythme cardiaque¹

Références

- [1] BUP 744, Le portrait de phase des oscillateurs
- [2] BUP 804, De l'oscillateur harmonique à van der Pol
- [3] Faroux et Renault, Mécanique I 53.4 FAR
- [4] Garing, Ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques 53.6 GAR
- [5] Bréal, Expériences d'électronique 621.38 DUF
- [6] Bergé, L'ordre dans le chaos 530.5 BER

1. pour info, voir par exemple <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437104000433>

- [7] <http://www.physique.ens-cachan.fr/laboratoire/experiences/fichiers/PeriodePendule.pdf>
- [8] (*additionnel*) Krob, Electronique expérimentale 621.39 KRO
- [9] (*additionnel*) Dunod, Les lasers 535.4 DAN (calcul de la génération de seconde harmonique)
- [10] (*additionnel*) Boyd, Nonlinear Optics (idem)
- [11] (*additionnel*) BUPs 722 et 724 (sur le chaos)

Questions

Invariance par dilatation

- qu'est-ce qui fixe la taille de l'ellipse? les conditions initiales
- toujours vrai? si c'est un système conservatif

Portrait de phase

- possible d'avoir 2 trajectoires de phase qui se coupent? non car pour de mêmes conditions initiales l'évolution temporelle ultérieure est la même
- toujours vrai? pas pour des systèmes chaotiques
- possible d'avoir du chaos avec un oscillateur à 1 degré de liberté?
- que dire de l'aire balayée dans l'espace des phases? conservée si le système est conservatif; se contracte s'il est dissipatif (voir Bergé)

Pendule simple

- pourquoi il n'y a que des harmoniques impaires? le sinus est impair (voir DL3 du sinus + méthode perturbative dans [3])
- pourquoi quand c'est anharmonique la trajectoire n'est plus une ellipse? termes supplémentaires (harmoniques) qui ne permettent pas d'exprimer $\dot{\theta}$ en fonction de θ
- peut-on voir la période sur le portrait de phase? pas directement mais on peut écrire $T = \int d\theta / \dot{\theta}$

Electron élastiquement lié

- faisable avec n'importe quel laser?
- préciser le fonctionnement du pointeur laser vert (Nd:YAG + KTP)

Résistance négative

- qui fixe l'amplitude des oscillations? la valeur de courant pour laquelle on commute entre un régime amorti et amplifié ($i_0 = V_{\text{sat}} / (R_0 + R)$)
- où est la non linéarité? dans l'AO, ce qui se voit dans la caractéristique de la résistance négative (à savoir tracer)

Commentaires

- leçon complète, tout ce qui doit être traité est traité
- possible de donner quelques informations supplémentaires sur les propriétés du plan de phase au départ (cf questions)
- quand on montre l'oscillateur à résistance négative, toujours montrer le signal temporel en plus du portrait de phase pour faire le lien
- il faut traiter plusieurs types d'exemple : en mécanique, en électronique, en optique...
- on peut aussi parler d'oscillateur paramétrique (Bergé) et de chaos (mais ne s'improvise pas)
- la résolution numérique avec Scilab c'est original mais on n'aura pas le code source à l'agreg

Annexe : codes Scilab pour le pendule simple et l'oscillateur de vdP

La fonction magique qui résout un système différentiel du premier ordre est `ode`. Il faut (1) définir le système à partir de l'équation d'évolution et les conditions initiales, (2) faire marcher cette fonction puis (3) tracer les solutions.

Pendule simple

source : <http://www.tangentex.com/Codes/PenduleScilab1.sce>

```
// Définition du système différentiel
function du = ps(t,u)
    xi = 1/20;
    du(1) = u(2);
    du(2) = - sin(u(1))-2*xi*u(2); //amortissement
endfunction

// Résolution
theta0 = 1;
vtheta0 = 0;
u0 = [theta0;vtheta0];
t = 0:.001:20;
[u] = ode(u0,0,t,ps); // u(1): angle u(2): vitesse angulaire

// Affichage de la trajectoire
clf;subplot(121);
plot(t',u(1,:)');
xgrid(2);
a=gca();
a.x_label.text = "Temps";
a.y_label.text = "Angle";

// Affichage du plan de phase
subplot(122);
plot2d(u(1,:)','u(2,:)',' style = 2);
xgrid(2);
b=gca();
b.x_label.text = "Angle";
b.y_label.text = "Vitesse angulaire";
```

Oscillateur de van der Pol

source : www.iecn.u-nancy.fr/~pincon/scilab/Doc/node81.html

```
// Définition du système différentiel
function f = vdp(t,u)
    eps = .4;//10;
    f(1) = u(2)
    f(2) = eps*(1 - u(1)^2)*u(2) - u(1)
endfunction

// Résolution
t = 0:.01:50;
u0 = [-2;4]; // CI a l'exterieur du cycle
[u] = ode(u0, 0, t, vdp);
```

```
// Affichage de la trajectoire
clf;
subplot(1,2,1);
plot(t',u(1,:)','b');
xgrid(2);
a=gca();
a.x_label.text = "t";
a.y_label.text = "x";

// Affichage du plan de phase
subplot(1,2,2);
plot(u(1,:)','u(2,:)','b');
xgrid(2);
b=gca();
b.x_label.text = "x";
b.y_label.text = "dx/dt";
```