

LP 48 : Oscillateur ; Portrait de phase et non linéarité

Pre requis :

- Mécanique du point
- Electrocinétique
- Électromagnétisme dans les milieux

I) Oscillateur et portraits de phases

1) Pendule simple :

Traitement rapide de pendule simple pour arriver a l'équation différentielle.

Linéarisation et conséquence : Isochronisme, fréquence propre du système

2) Portrait de phases :

Plan de phase : Pour un oscillateur a 1 degré de liberté, c'est le plan θ / θ' .

Portrait de phase : ensemble des trajectoire possible dans le plan de phase. (paramétré par t)

En réalité on met θ'/ω_0 pour obtenir des cercles pour les oscillateur harmonique.

Remarques :

- Le sens de parcours est toujours le même (sens horaire)
- 2 condition initial nous donne une évolution unique du système, c'est le déterminisme mécanique qui se traduit sur le portrait de phase par le fait que deux courbe ne se croisent jamais.

Cas dispersif :

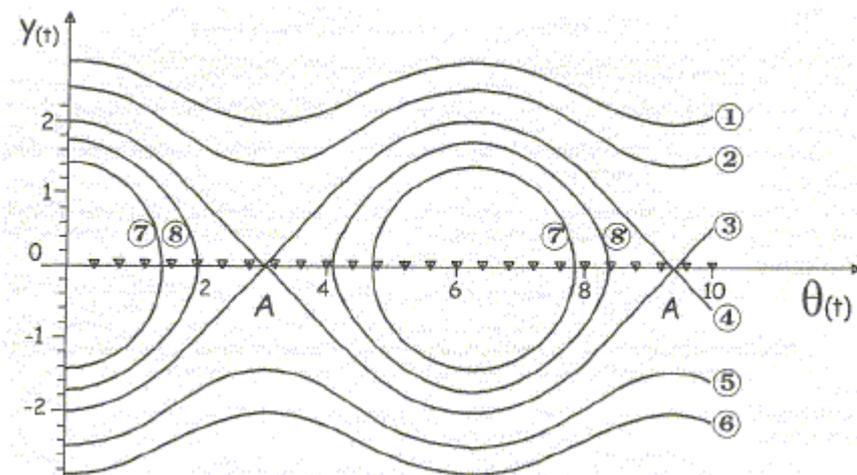
Expérience : Circuit RLC avec oscillo en mode XY

Ici le système perd de l'énergie, on a donc des spiral.

On observe un point attracteur : point d'équilibre stable.

II) Non linéarité

1) Portrait de phases du pendule simple :



Du centre vers l'extérieur :

- approximation de l'oscillateur harmonique valable
- Cercle déformé dut a l'effet des non linéarité
- Point singulier en $(\theta=\pi / \theta'=0)$ du a l'équilibre instable, Effet très dépendant des condition initial lien a faire avec le chaos.

- État non liée.

- Périodicité général de la figure de 2π .
- Courbe fermé donc non dissipatif

1) Méthode perturbative

Comme nous l'avons vu dans le portrait de phases on a une solution périodique. On va donc développer en série de fourrier. On réinjecte dans l'équation avec le sinus développé au second ordre.

Méthode Perturbative:

$$\left[\ddot{\theta} + \omega_0^2 \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} \right) = 0 \right] \quad \left[\theta = \theta_1 \sin(\omega t) + \theta_3 \sin(3\omega t) \right]$$

$$\theta_1 (-\omega^2) \sin(\omega t) + \theta_3 (-9\omega^2) \sin(3\omega t) + \omega_0^2 \left(\theta_1 \sin(\omega t) + \theta_3 \sin(3\omega t) - \frac{\theta_1^3 \sin^3(\omega t)}{6} \right) = 0$$

$$\left[\sin^3(\omega t) = \frac{1}{4} [3 \sin(\omega t) - \sin(3\omega t)] \right]$$

$$\theta_1 \sin(\omega t) [\omega_0^2 - \omega^2] + \theta_3 \sin(3\omega t) [\omega_0^2 - 9\omega^2] - \frac{\omega_0^2 \theta_1^3}{24} [3 \sin(\omega t) - \sin(3\omega t)] = 0$$

$$\theta_1 \sin(\omega t) \left[\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{3\omega_0^2 \theta_1^2}{24} \right] + \sin(3\omega t) \left[\theta_3 (\omega_0^2 - 9\omega^2) + \frac{\omega_0^2 \theta_1^3}{24} \right] = 0$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{3\omega_0^2 \theta_1^2}{24} \quad \left| \quad \theta_3 = -\frac{\omega_0^2 \theta_1^3}{24(\omega_0^2 - 9\omega^2)} \quad \omega \simeq \omega_0$$

$$\left[\omega \simeq \omega_0 \left(1 - \frac{\theta_1^2}{16} \right) \right] \quad \left[\theta_3 \simeq \frac{\theta_1^3}{192} \right]$$

$$\theta = \theta_1 \sin(\omega t) + \frac{\theta_1^3}{192} \sin(3\omega t)$$

Après un vieux calcul on obtient la formule de Borda.

On a donc plus d'isochronisme et on a un enrichissement du spectre avec une harmonique d'ordre 3.

2) Optique non linéaire

Calcul de l'ordre de grandeur :

$$E_{\text{interatomique}} = 10^{11} \text{ V/m}$$

$$E_{\text{rayonnement solaire}} = 10^3 \text{ V/m}$$

Les champs électrique créés par des sources « normales » sont 8 ordres de grandeur inférieurs aux champs interatomiques. Dans ces conditions on peut se permettre l'approximation de l'optique linéaire.

$$P = \epsilon_0 \chi E$$

Cette approximation harmonique n'est plus valable dans le cas des laser de puissance ou les champs électrique sont de l'ordre de :

$$E_{\text{laser de puissance}} = 10^7 \text{ V/m}$$

$$P = \epsilon_0 (\chi E + \chi E^2 + \chi E^3 + \dots)$$

Avec les équation de Maxwell on peut arriver a une équation qui régie la propagation de l'onde. La résolution des cette équation a l'ordre deux nous amène a des solution de fréquence double comme pour le cas du pendule simple on a un enrichissement du spectre.

Ouverture sur le laser Nd-YAG. Un cristal double la fréquence initial (1064nm) pour donner le laser vert que l'on connaît (532nm).

II) Oscillateur auto-entretenu

1) Oscillateur de Van der Pol

C'est un modèle mathématique de la forme :

$$x'' + (x^2/x_0^2 - 1) \omega/Q x' + \omega^2 x = 0$$

Si $x=x_0$: Stabilité

Si $x < x_0$: Gain d'énergie

Si $x > x_0$: Perte d'énergie

Nécessité de la non linéarité pour crée des oscillateur auto entretenue.

Sur le portrait de phase on observe une trajectoire limite.

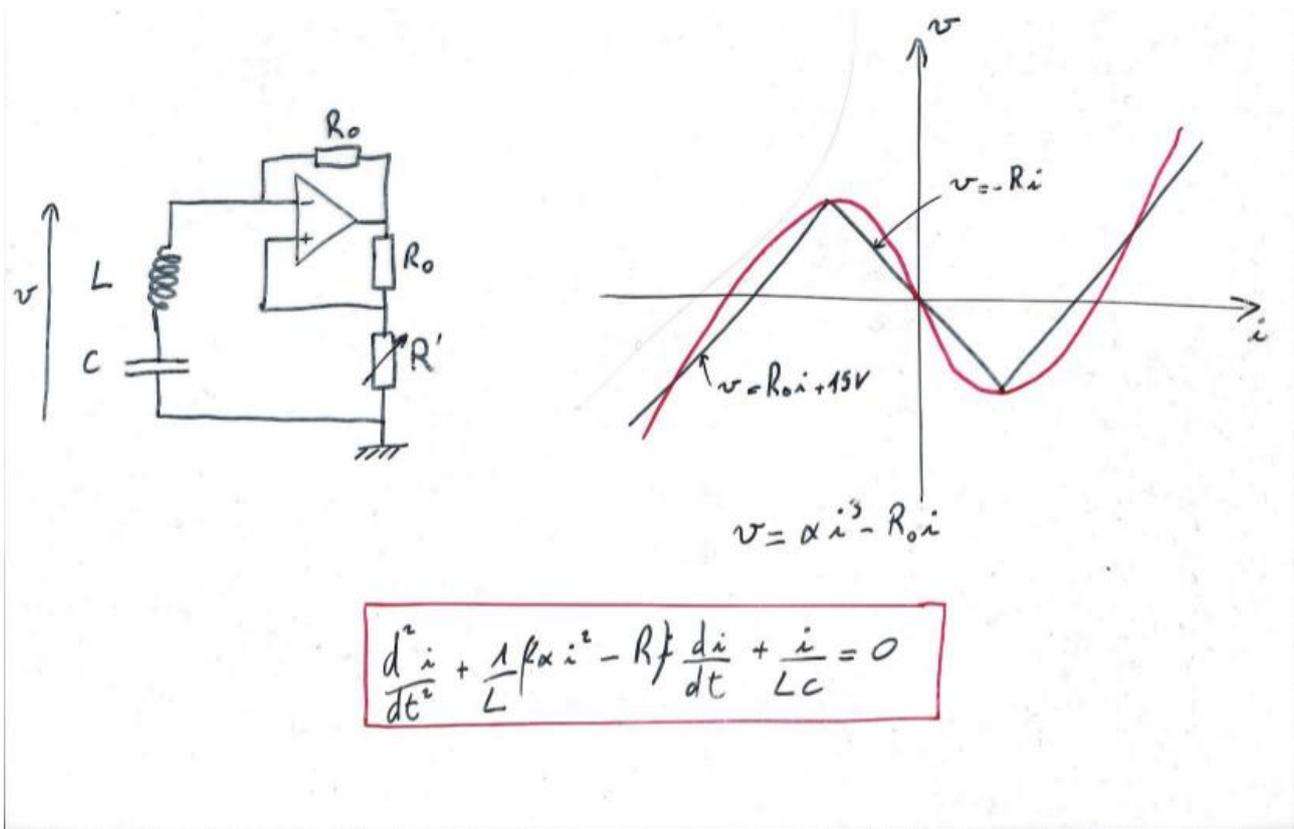
2) Oscillateur a résistance négative

Revenir sur la nécessité d'avoir un composant actif pour apporter de l'énergie au système.

Dans ça plage de fonctionnement linéaire l'ampli op fonctionne comme une résistance négative. Mais il sature se qui nous donne la courbe en noire. On vient ajuster cette courbe avec un polynôme du troisième ordre se qui nous donne une équation comparable a Van der Pol. On va donc comparer sont portrait de phase.

Expérience : On peut observer le cycle limite et le démarrage des oscillation en mode persistant et XY.

Pour cette expérience on a utiliser les valeur les plus proche possible du Dufait. Les oscillation débutent pour R variable a 50Ω .



Questions :

– Quelle est la définition rigoureuse d'un portrait de phase ?

C'est la représentation des trajectoires possibles du système dans l'espace des phases (N coordonnées généralisées + N impulsions généralisées).

- Une autre manifestation des non-linéarités dans le portrait de phase ?

Pour un système linéaire, la linéarité fait que toute homothétie d'une trajectoire de phase est également une solution possible, exemple, pour l'oscillateur harmonique sans dissipation, tous les cercles de centre O sont des trajectoires de phase.

- Pour l'optique non-linéaire, la méthode choisie est-elle une méthode perturbative ?

Oui, un électron lié à un atome est dans un potentiel a priori compliqué. S'il s'éloigne peu de sa position d'équilibre, on peut faire l'hypothèse harmonique : c'est le modèle de l'électron élastiquement lié. Si le déplacement devient important, on rajoute de puissance 3,4... dans l'énergie potentielle, c'est bien une approche perturbative. En pratique, on classe effectivement les non-linéarités optiques selon leur ordre.

- D'où provient l'énergie dans un oscillateur à résistance négative ?

L'AO est un composant actif, qui fournit l'énergie au système.

- Quelle est la pulsation d'oscillation ?

C'est la fréquence propre de l'oscillateur, aux harmoniques près.

- Comment peut-on déterminer la période à partir du portrait de phase ?

On intègre l'expression de la conservation de l'énergie.

Commentaires :

- Leçon OK, mais manque de fil conducteur
- Bien insister sur les différentes propriétés du portrait de phase, leur conséquence, et leur origine dans les propriétés fondamentales du système
- Pour l'oscillateur à résistance négative, mieux faire le lien entre paramètre de non-linéarité et forme du cycle limite.
- L'ouverture "naturelle" de cette leçon se fait sur les instabilités, la transition vers le chaos et les instabilités... si on maîtrise suffisamment le sujet.

Biblio :

- Hprepas, Mécanique 1. Pour se remettre en forme sur les portraits de phase.
- Dunod, Mécanique 1 de Farrou, Renault pour le traitement de pendule simple.
- Garing, Ondes électromagnétique dans les milieux diélectrique pour l'optique non linéaire
- BUP 804 pour les portrait de phases et le Van der Pol.
- Duffait, Expérience d'électricité pour l'oscillateur a résistance négative.