

LP49 Oscillateurs : portraits de phase et non-linéarités

Caroline BOULOC - Sandra MONTALESCOT

17/12/2013

Ceci est le CR de ce que j'ai présenté, mais il y a beaucoup de choses à modifier (principalement sur le contenu de la leçon), cf les remarques du correcteur et la proposition de plan plus adapté (et de biblio additionnelle) tout à la fin.

Niveau : L2

Prérequis :

- oscillateur harmonique, oscillateur amorti, pendule simple, résolution pour de petits angles
- théorèmes de l'électrocinétique, circuits à AO (dont résistance négative) et systèmes bouclés (notion de stabilité)

Bibliographie

- BUP 744, H. Gié et J.P. Sarmant, Le portrait de phase des oscillateurs, vol 86, mai 1992, 719-755 (pour tout le contenu. hyper clair, très intéressant. A LIRE ABSOLUMENT!!)
- BUP 804, L. Sartre, De l'oscillateur harmonique à Van der Pol, vol 92, mai 1998, 903-914 (pour les portraits de phase!)
- R. Duffait et J.-P. Lievre, Expériences d'électriques, Agrégation de Sciences physiques, Bréal (621.38 DUF) (pour le montage à résistance négative et le montage du multivibrateur astable)
- J.-P. Faroux et J. Renault, Electrocinétique et électronique - cours et 93 exercices corrigés, Dunod (53.4 FAR)
- http://uel.unisciel.fr/mathematiques/sys_diff/sys_diff_ch03/co/observer_ch4_01.html -> un outil très pratique pour tracer des portraits de phase pendant l'année. Ne sera probablement pas dispo à l'agreg.

Remarque dans le rapport du jury :

“Les aspects non linéaires doivent être abordés dans cette leçon sans développement calculatoire excessif, en utilisant judicieusement la notion de portrait de phase. Une simulation numérique bien présentée peut enrichir cette leçon.”

Table des matières

1	Oscillateurs non-entretenus, notion de portrait de phase	2
1.1	Oscillateur harmonique non amorti	2
1.2	OH avec amortissement (frottement fluide)	3
1.3	Oscillateur non-linéaire : le pendule simple	4
1.4	Remarques sur le portrait de phase : linéarité et périodicité	5
2	Oscillateurs entretenus	6
2.1	Définition, exemples	6
2.2	Modèle de Van der Pol	6
2.3	Oscillateurs à relaxation : exemple du multivibrateur astable	8
3	Bilan et conclusion	9
4	Questions et remarques du correcteur + proposition de plan et de biblio	9

Introduction

Définition : Un oscillateur est un système qui génère un signal périodique en l'absence de toute excitation périodique.

Nous avons tous déjà étudié des oscillateurs harmoniques quand nous étions petits, que ce soit par un système masse-ressort, un électron dans un puits de potentiel harmonique ou encore un pendule simple (avec une amplitude faible). Or, dans ce dernier cas, l'équation différentielle obtenue à partir du principe fondamental de la dynamique fait apparaître un sinus, donc n'est pas linéaire. Nous nous sommes donc toujours empressés de linéariser ce vilain sinus et de ne traiter que le cas des petites oscillations parce que "quand c'est non-linéaire on sait pas faire!". A priori, les non-linéarités, c'est terrible, on ne sait plus rien résoudre, c'est la panique. Et pourtant, elles sont partout (tous les systèmes électroniques se comportent de manière non-linéaire si on leur envoie une puissance trop importante...), et sont parfois même bien pratiques, comme nous le verrons au cours de cette leçon. Et puisqu'en effet la résolution mathématique s'avère compliquée lorsqu'on a affaire à des équations non-linéaires, nous allons introduire et exploiter un outil extrêmement pratique pour l'étude des oscillateurs : le portrait de phase.

Alors pourquoi étudier des oscillateurs non-linéaires, concrètement ? Tout simplement parce que de nombreux systèmes nécessitent des oscillateurs qui oscillent de manière stable pendant très longtemps (ex : une horloge), mais que tous ces systèmes sont nécessairement dissipatifs, donc doivent être entretenus. Et que cet apport d'énergie qui compense les pertes conduit à un fonctionnement non-linéaire, comme nous le verrons dans le II.

Remarque : Dans cette leçon, nous traitons exclusivement des systèmes à un seul degré de liberté, régis par des équations différentielles (linéaires ou non) d'ordre 2, et on n'étudiera pas le cas d'oscillations forcées (par une excitation périodique).

1 Oscillateurs non-entretenus, notion de portrait de phase

Oscillateur quasi-sinusoidal : dont le signal de sortie est à peu près sinusoidal.

1.1 Oscillateur harmonique non amorti

Ex : système masse-ressort sans frottement.

L'OH non amorti est un modèle mathématique très utilisé dans à peu près tous les domaines de la physique lorsqu'on souhaite linéariser un problème autour d'une position d'équilibre : pour un point matériel M, de position x , soumis à une force \vec{F} qui dérive d'une énergie potentielle $E_p(x)$ admettant un minimum en x_{eq} , on peut développer l'expression de E_p autour de la position d'équilibre :

$$E_p(x) = E_p(x_{eq}) + (x - x_{eq}) \frac{dE_p}{dx}(x_{eq}) + \frac{1}{2}(x - x_{eq})^2 \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_{eq}) + \dots \approx E_{p,min} + \frac{1}{2}k(x - x_{eq})^2$$

où $k = \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_{eq})$, car la dérivée de E_p s'annule en x_{eq} (minimum d'énergie potentielle).

D'où, proche de x_{eq} , $\vec{F} = k(x - x_{eq})\vec{e}_x$, donc, en appliquant le principe fondamental de la dynamique et en posant $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $x_{eq} = 0$ (changement d'origine du repère) :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Cette équation est l'équation générale qui gouverne l'évolution d'un oscillateur harmonique non amorti.

En multipliant cette équation par $2\dot{x}dt$ et en intégrant de 0 à t , on trouve $\dot{x}_{(t)}^2 + \omega^2 x_{(t)}^2 = \dot{x}_{(t=0)}^2 + \omega^2 x_{(t=0)}^2$ soit

$$\left(\frac{\dot{x}}{\omega}\right)^2 + x^2 = C^{te}(x_0, \dot{x}_0)$$

Portrait de phase :

- Le plan (x, \dot{x}) est appelé **plan de phase**. L'ensemble des points $(x(t), \dot{x}(t))$ par lesquels le système passe au cours du temps est appelé **trajectoire de phase**.

-> Dans le cas de l'OH, la trajectoire de phase pour des conditions initiales données est une ellipse centrée sur $(0,0)$ (ou sur $(x_{eq}, 0)$ si on ne place pas l'origine des x à la position d'équilibre). La taille de cette ellipse dépend des conditions initiales.

- On appelle **portrait de phase** l'ensemble des trajectoires de phase décrites par le système à partir de toutes les conditions initiales possibles.
- > Dans le cas de l'OH, c'est un ensemble d'ellipses concentriques.

Remarques :

- Afin de comparer des grandeurs de même unité, on préfère généralement travailler dans le plan $(x, \frac{\dot{x}}{\omega})$ pour un oscillateur. La trajectoire de phase devient alors un cercle.
- On remarque que la trajectoire de phase dépend directement des conditions initiales (x_0, \dot{x}_0) : cela signifie simplement que l'amplitude des oscillations dépend de ces conditions initiales, ce que l'on a toujours constaté en résolvant l'équation du mouvement.
- Pour un système oscillant (de mouvement périodique, donc), la trajectoire de phase est nécessairement fermée (on repasse sur les mêmes points à chaque période).
- La trajectoire de phase se parcourt toujours dans le sens des aiguilles d'une montre (pour $\dot{x} > 0$, x augmente).

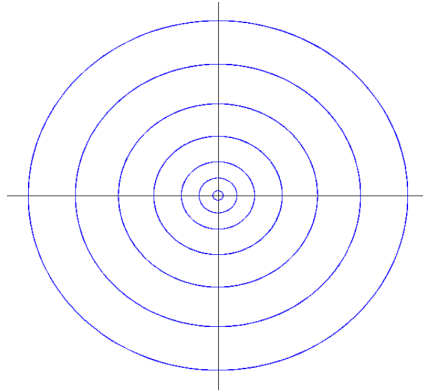


FIGURE 1 – Portrait de phase $(x, \frac{\dot{x}}{\omega})$ d'un oscillateur harmonique non amorti

1.2 OH avec amortissement (frottement fluide)

Reprenons le système précédent mais cette fois-ci avec un terme dissipatif de type frottement fluide ($\vec{f} = -\alpha\vec{v}$). La nouvelle équation du mouvement est de la forme

$$\ddot{x} + \frac{\omega}{Q}\dot{x} + \omega^2x = 0$$

Dans le cas d'oscillations pseudo-périodiques ($Q > 1/2$), la trajectoire de phase est maintenant une spirale. Le mouvement n'est plus strictement périodique (trajectoire ouverte) et son amplitude diminue au cours du temps, à cause de la dissipation d'énergie par les frottements. Le point O (position d'équilibre du système) est un point attracteur : quelles que soient les conditions initiales, le point M représentatif de l'état du système dans le plan de phase se rapproche du point O.

Remarque 1 : le facteur de qualité Q donne ici un ordre de grandeur du nombre d'oscillations du système (nombre de "tours" dans l'espace des phases) avant la relaxation vers l'état d'équilibre.

Remarque 2 : si l'on remplace les frottements par un terme d'apport d'énergie ($Q < 0$), la trajectoire de phase n'est pas simplement la même parcourue dans l'autre sens : c'est la symétrique du cas amorti par rapport à l'axe des abscisses. L'absence de symétrie de la trajectoire de phase par rapport à l'axe Ox est caractéristique des systèmes non-invariants par renversement du temps (qui transforme juste \dot{x} en $-\dot{x}$ dans le plan de phase), donc entre autres des systèmes dissipatifs.

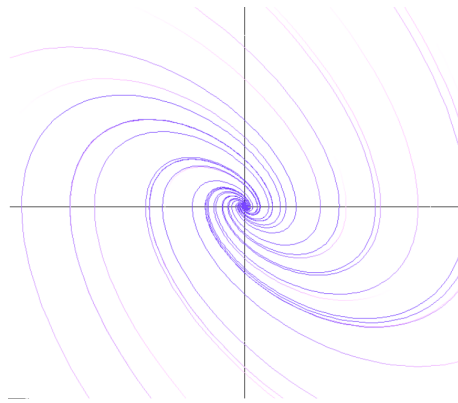


FIGURE 2 – Portrait de phase $(x, \frac{dx}{dt})$ d'un oscillateur harmonique amorti par frottements fluides. Les trajectoires sont parcourues du rose au bleu.

Manip : On peut observer le portrait de phase d'un circuit RLC série avec le montage de la figure 3 en prenant par exemple $R_m = 120\Omega$, $L_1 = 44mH$, $C_1 = 100nF$, et en excitant avec un créneau 0-10V à 200Hz. La résistance r de la bobine limite déjà le facteur de qualité Q à quelques unités, ce n'est pas la peine de rajouter une résistance... On observe (q, \dot{q}) , ou (i, \dot{i}) si on inverse la bobine et le condensateur. Ca fait une jolie manip' facile à monter si on sait bien expliquer les deux trajectoires de phase.

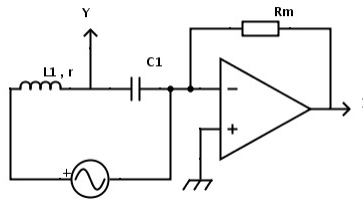


FIGURE 3 – Circuit RLC série, portrait de phase

Transition : Les deux oscillateurs étudiés jusqu'ici étaient linéaires, ce qui se traduit par des trajectoires de phase circulaires en l'absence d'amortissement. Nous verrons dans la suite que le portrait de phase d'un oscillateur quelconque (entretenu, ou non amorti) permet entre autres de juger du caractère sinusoïdal de ses oscillations.

Intéressons-nous maintenant à un oscillateur non-linéaire très "classique" : le pendule simple.

1.3 Oscillateur non-linéaire : le pendule simple

Soit un pendule de masse m fixé à l'extrémité d'une tige de longueur l , de masse négligeable, et dont l'autre extrémité, en O , tourne librement autour de l'axe (Oz) (pas de frottements). Notons θ l'inclinaison de la tige par rapport à la verticale. L'équation du mouvement s'écrit alors, avec $\omega = \sqrt{g/l}$:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0$$

Comme précédemment avec l'OH, multiplions par $\frac{2}{\omega^2} \dot{\theta} dt$ et intégrons entre 0 et t :

$$\left(\frac{\dot{\theta}}{\omega}\right)^2 - 2 \cos \theta = C^{te}(\theta_0, \dot{\theta}_0)$$

où $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$ est l'état initial du système.

Le portrait de phase est donc celui de la figure 3.

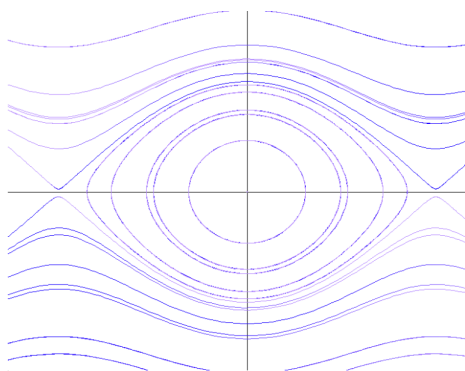


FIGURE 4 – Portrait de phase $(\theta, \frac{d\theta}{dt})$ du pendule simple non amorti

La trajectoire de phase correspondant à $C_0 = 2$ joue un rôle critique : elle délimite deux domaines du portrait de phase :

- Pour $C > C_0$, $\dot{\theta}$ ne s’annule jamais et θ peut prendre des valeurs quelconques. Ceci correspond au cas où le pendule tourne indéfiniment dans un sens, sans oscillations. (Ceci n’est possible que parce que nous avons négligé les frottements.) On parle alors de mouvement révolitif.
- Pour $C < C_0$, $\dot{\theta}$ peut s’annuler (donc le pendule “repart en arrière”) et on obtient un mouvement oscillatoire dont l’amplitude est fixée par C : $\cos \theta_{max} = \frac{-C}{2}$

Remarque : on retrouve bien une trajectoire de phase quasi-circulaire dans le cas d’oscillations de faible amplitude. Le caractère non-sinusoidal des oscillations de forte amplitude apparaît clairement sur le portrait de phase : les trajectoires de phase ne sont plus du tout circulaires.

Remarque 2 : en présence de frottements fluides, le mouvement révolitif n’est plus possible : après un ou plusieurs tours complets le pendule finit par s’arrêter à sa position d’équilibre car toute son énergie mécanique a été dissipée par les frottements. Ceci se traduit par la présence de points attracteurs dans le portrait de phase pour $\theta = 2n\pi$.

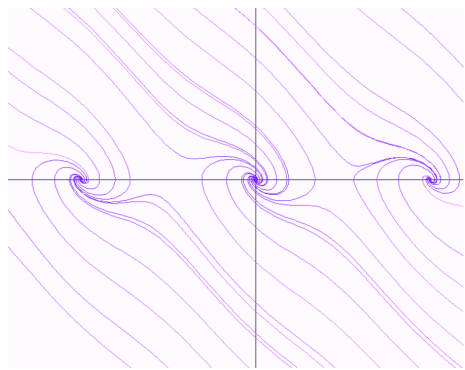


FIGURE 5 – Portrait de phase $(\theta, \frac{d\theta}{dt})$ du pendule simple amorti par frottements fluides. Les trajectoires sont parcourues du rose au bleu.

1.4 Remarques sur le portrait de phase : linéarité et périodicité

- Nous avons dit précédemment qu’à un mouvement périodique correspondait nécessairement une trajectoire de phase fermée. Pour un système gouverné par une équation différentielle d’ordre deux, la réciproque est vraie : une trajectoire fermée implique un mouvement périodique car le mouvement est entièrement déterminé par deux conditions initiales, donc si deux trajectoires de phase passent par un même point de l’espace des phases à un instant donné, leur évolution future est nécessairement la même, et ces deux trajectoires de phase sont donc superposées et correspondent au même mouvement du système. Ainsi, pour ces systèmes d’ordre 2, deux trajectoires de phase correspondant à des mouvements différents ne peuvent pas se croiser. (NB : Pour un système d’ordre 3 ou plus, en revanche, une trajectoire de phase fermée ne permet pas de conclure à la périodicité du mouvement.)
- Insistons encore sur le rôle des conditions initiales. Un système linéaire vérifie le théorème de superposition : pour $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deux solutions de l’équation différentielle régissant le système, alors $x_1(t) + \lambda x_2(t)$ est

aussi une solution possible de cette équation et correspond donc à un mouvement possible du système. Ceci traduit par le fait que pour une trajectoire de phase donnée du système, toutes les trajectoires de phase obtenues par homothétie font également partie du portrait de phase. Ceci n'est pas nécessairement le cas pour un système non-linéaire : par exemple, une saturation dans les valeurs possibles de x ou de \dot{x} (AO qui sature, rail de dimension finie,...) empêche toute trajectoire de phase dépassant cette valeur. Or de telles saturations existent dans (presque) tous les systèmes, surtout dans les oscillateurs électroniques où la puissance électrique est toujours limitée par la source. Nous allons voir dans la deuxième partie de ce cours d'autres effets de non-linéarités sur le portrait de phase des oscillateurs.

- Remarque : il est important de se souvenir que les non-linéarités conduisent à un "enrichissement" du spectre (par rapport au cas linéaire, pas par rapport à la source puisque justement l'oscillateur oscille sans source périodique). En pratique, obtenir un signal purement monochromatique est impossible, il existe toujours de petites non-linéarités qui élargissent le spectre ou créent des harmoniques à un multiple de la fréquence fondamentale de l'oscillateur.

2 Oscillateurs entretenus

2.1 Définition, exemples

L'oscillateur non amorti est un modèle mathématique ; dans la vraie vie, il y a toujours des pertes dans les oscillateurs (résistance électrique, frottements, réflectivité pas parfaite des miroirs de cavités laser,...). Produire une oscillation de durée infinie, quelle que soit sa forme, sans apport extérieur d'énergie, est donc impossible. Pour obtenir une oscillation stable dans le temps, il est nécessaire d'entretenir ces oscillations par un apport d'énergie soit continu (AO alimenté continu dans un pont de Wien, débit d'eau dans un vase de Tantale...), soit discontinu (balançoire poussée ponctuellement, mécanisme à échappement d'une horloge...).

On parle dans ce cas d'oscillateurs entretenus. Cet entretien est fondamentalement non-linéaire, il permet au système de se stabiliser à une amplitude (et une fréquence) données qui ne sont pas fixées par les conditions initiales mais par les caractéristiques du système. On réalise une sorte d'asservissement de l'amplitude des oscillations. Ceci peut conduire à des spectres très riches car les oscillations obtenues ne sont pas nécessairement sinusoïdales.

2.2 Modèle de Van der Pol

Cherchons un modèle mathématique simple pour décrire un oscillateur entretenu avec une pulsation ω et une amplitude d'oscillation x_0 . Ce modèle ne peut pas être linéaire, comme nous l'avons dit précédemment, puisque la trajectoire de phase doit être, après un éventuel régime transitoire, un cercle C de rayon x_0 , quelles que soient les conditions initiales. Il faut donc briser l'invariance par dilatation de l'équation différentielle associée. De plus, cette dernière doit également être d'ordre deux ou plus (pour permettre une oscillation) ; nous en chercherons donc une d'ordre 2. Prenons donc une équation de la forme

$$\ddot{x} + A(x) \frac{\omega}{Q} \dot{x} + \omega^2 x = 0$$

- Si $A(x) > 0$, les oscillations sont amorties et l'amplitude diminue. Il faut donc que $A(x) > 0$ lorsque $|x| > |x_0|$ i.e. lorsque $x^2 > x_0^2$, afin de se rapprocher de l'amplitude souhaitée.
- Si $A(x) < 0$, l'amplitude des oscillations croît. Il faut donc que $A(x) < 0$ lorsque $x^2 < x_0^2$.
- Si $A(x) = 0$, on retrouve l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation ω . Donc lorsque $x = x_0$, la fonction $A(x)$ doit s'annuler.

C'est pourquoi Van der Pol a proposé le modèle suivant pour $A(x)$: $A(x) = \frac{x^2}{x_0^2} - 1$. L'équation de Van der Pol s'écrit donc :

$$\ddot{x} + \frac{\omega}{Q} \left(\frac{x^2}{x_0^2} - 1 \right) \dot{x} + \omega^2 x = 0$$

On vérifie aisément qu'elle vérifie bien les propriétés voulues. En revanche, il est difficile de vérifier si le caractère périodique et le caractère sinusoïdal des oscillations sans passer par le portrait de phase. Il n'est pas possible de calculer analytiquement la fonction $x(t)$ ou l'équation des trajectoires de phase, elles sont donc obtenues par une intégration numérique.

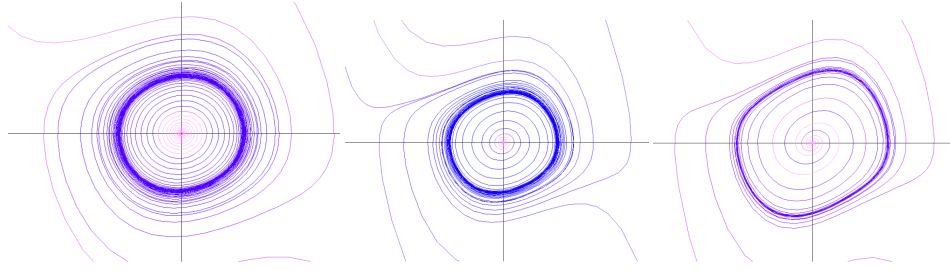


FIGURE 6 – Portrait de phase $(x, \frac{dx}{dt})$ d'un oscillateur de Van der Pol avec $\omega = 1$, $x_0 = 1$ et $Q = 2, 1, 0.5$. Les trajectoires sont parcourues du rose au bleu. On voit bien la trajectoire limite, le cycle attracteur, indépendant des conditions initiales. On remarque également que les oscillations sont de moins en moins sinusoïdales lorsque Q diminue (la trajectoire limite s'éloigne du cercle car le terme non-linéaire devient non négligeable). Le portrait de phase du Van der Pol se trouve dans le BUP 804, avec différents Q (qui ne s'appelle pas Q , refaites le calcul du coup...)

Pour des oscillations avec un coefficient Q grand, l'attracteur se rapproche d'une ellipse donc les oscillations sont quasi-sinusoïdales, ce qui est cohérent avec le fait que $Q \gg 1$ rend le terme non-linéaire négligeable et ramène l'équation de Van der Pol à celle de l'oscillateur harmonique. En revanche, lorsque Q diminue, l'attracteur ne ressemble plus du tout à une ellipse, l'effet de la non-linéarité est clairement visible sur le portrait de phase.

Remarques :

- Dans ce modèle, il y a apport extérieur d'énergie seulement lorsque $x < x_0$, donc par intermittence.
- ATTENTION!! Dans le BUP 744, ils ont pris pour équation de Van der Pol $\ddot{x} + (x^2 - x_0^2)\dot{x} + \omega^2 x = 0$. Ça a l'air plus simple, sauf que c'est faux (inhomogène, manque un paramètre équivalent à Q , etc.).
- A l'origine, le modèle de Van der Pol est un modèle purement mathématique, il ne cherche pas à décrire précisément un système existant. Toutefois, il décrit assez bien le comportement d'un oscillateur à résistance négative.

Oscillateur quasi-sinusoïdal à résistance négative

[Manip à faire devant la classe si vous arrivez à le faire marcher. Après 8h d'échec inexplicable, j'ai choisi de ne pas le faire... Prendre le montage du Bréal p174, il est astucieux MAIS il faut combiner ça avec le BUP744 pour retrouver l'équation des oscillations ET sa caractéristique courant-tension (la courbe) est complètement fautive dans le Bréal... /!\

Pour la manip, en gros, on ajoute un convertisseur courant-tension après le condensateur (qu'on ne relie pas à R' du coup), il donne l'image de i en sortie. On mesure la tension u_c à l'autre voie de l'oscilloscope. Et pour voir le portrait de phase, on applique une tension créneau aux bornes de R' de sorte à la court-circuiter périodiquement.]

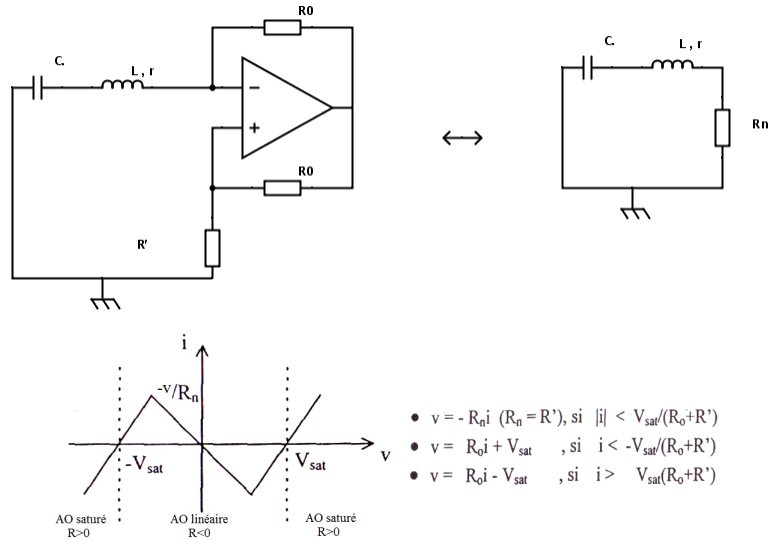


FIGURE 7 – Oscillateur à résistance négative et caractéristique de la résistance négative

On peut montrer que (à refaire...ce n'est pas fait dans le Bréal, et le montage est différent dans le BUP)

$$\frac{d^2 i}{dt^2} - \frac{R'-r}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0 \text{ si } |i| < i_{sat} = \frac{V_{sat}}{R_0+R'} \text{ (l'AO de la résistance négative n'est pas saturé)}$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R_0+r}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0 \text{ si } |i| > i_{sat} = \frac{V_{sat}}{R_0+R'} \text{ (l'AO de la résistance négative est saturé)}$$

On trouve donc une équation similaire à celle de Van der Pol avec cette fois $x_0 = i_{sat}$ imposé par la tension de saturation de l'AO et le choix de R_0 et de R' , $A(x) = +\frac{R_0+r}{R'-r}$ lorsque $i^2 > i_{sat}^2$ et $A(x) = -1$ lorsque $i^2 < i_{sat}^2$. On a un puits carré pour $A(x)$ au lieu d'une parabole. Le portrait de phase est similaire à celui de Van der Pol. (L'approximation n'est pas pire que lorsqu'on prend un puits carré pour modéliser un potentiel de Lennard-Jones... ;)

2.3 Oscillateurs à relaxation : exemple du multivibrateur astable

Dans l'oscillateur à résistance négative, l'énergie passait alternativement d'un premier réservoir, le condensateur, à un deuxième réservoir, la bobine. Dans un oscillateur à relaxation, il n'y a plus qu'un seul réservoir dans lequel l'énergie s'accumule (le vase du vase de Tantale, un condensateur en électronique...), et un dispositif déclenche le "remplissage" et la "vidange" du réservoir (le siphon du vase de Tantale, un dispositif à seuil comme une diode ou un AO en électronique). (On peut montrer qualitativement le fonctionnement du vase de Tantale pour expliquer le principe général de ces oscillateurs. Ou même étudier le vase de Tantale à la place du multivibrateur astable, à condition d'avoir un siphon de taille correcte pour avoir une fréquence d'oscillation de 0.1 à 1 Hz...)

Dans ce cas, l'amplitude des oscillations est directement fixée par les niveaux de basculement d'un état à un autre, qui déterminent également la durée de montée et la durée de descente donc la période des oscillations. Illustrons ceci avec un exemple : le multivibrateur astable.

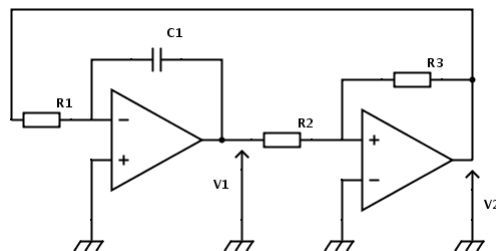


FIGURE 8 – Multivibrateur astable : le premier étage est un intégrateur à AO, le deuxième un comparateur non-inverseur à AO.

Supposons les AO idéaux et identiques, et $R_2 < R_3$. On peut montrer par un calcul simple et à savoir refaire mais que j'ai la flemme de réécrire ici que le signal $V_1(t)$ est triangulaire (il oscille entre $-V_0$ et V_0 , où $V_0 = \frac{R_2}{R_3} V_{sat}$) et que le signal $V_2(t)$ est un créneau $+V_{sat}/-V_{sat}$, tous deux de période $T = 4 \frac{R_1 R_2}{R_3} C = 4 \times (R_1 C) \times \frac{V_0}{V_{sat}}$.

Remarques :

- Attention, ce montage est différent du multivibrateur astable compact, avec un seul AO, pour lequel le signal n'est pas triangulaire mais une succession d'exponentielles croissantes et décroissantes. Ne confondez pas, la mise en équation est plus compliquée et le signal moins joli...!
- On peut assez facilement commander en fréquence les oscillateurs à relaxation. Pour ce montage, il suffit d'ajouter un multiplicateur dans la boucle de retour entre R_3 et R_1 pour multiplier V_2 par un signal $V_{commande}(t)$ avant de l'envoyer dans l'intégrateur. La période des oscillations vaut alors $T(t) = 4R_1C \times \frac{V_0}{kV_{sat}V_{commande}(t)}$ si la tension de commande ne varie pas trop vite. Si elle est constante, on règle juste la fréquence des oscillations à l'aide d'une tension -> générateur de signaux créneau/triangulaire de fréquence réglable!

3 Bilan et conclusion

Le modèle de l'oscillateur harmonique n'est pas suffisant, il faut prendre en compte les non-linéarités qui fixent l'amplitude et la fréquence des oscillations dans le cas d'oscillations entretenues (seuils, saturations) et rendent l'évolution du système irréversible.

Le portrait de phase est un outil précieux si le problème ne peut être résolu analytiquement, il contient une bonne partie de la physique (mais pas l'aspect temporel, la durée des différentes phases de l'évolution, etc).

Les non-linéarités peuvent être très utiles, pour avoir des oscillations entretenues ou un enrichissement du spectre (doublement de fréquence, génération de créneaux, etc)

Ouverture : traitement perturbatif des oscillateurs quasi-sinusoïdaux lorsqu'on veut vraiment une expression analytique pour des oscillations d'amplitude pas trop importante.

4 Questions et remarques du correcteur + proposition de plan et de biblio

- Sur un portrait de phase, y a-t-il toujours intersection avec les axes à angle droit? -> oui, pour le montrer calculer $\frac{dE_m}{d\theta}$ avec $\theta = 0$ ou $\dot{\theta} = 0$: pente nulle ou infinie, sauf dans les cas limites où l'accélération est nulle quand on arrive au niveau de l'axe (cas limite du pendule,...)
- Les trajectoires de phases d'un système hamiltonien sont à flux conservatif : si on lance le système avec 4 conditions initiales (points A, B, C, D dans le plan de phase), à un instant ultérieur le cadre ABCD est déformé mais garde la même aire. (théorème de Liouville)
- On peut avoir un même cercle limite pour un système linéaire avec des conditions initiales qui sont différentes... si les oscillations sont forcées, cas qui n'était pas traité ici mais devrait peut-être l'être.
- Il faut insister plus sur l'enrichissement du spectre, qui ne se voit pas dans le portrait de phase.
- Il faut insister plus dans la leçon sur ce qui ne se voit pas dans le portrait de phase.
- L'outil numérique n'est pas utilisable ici (c'est beaucoup trop long)
- Le portrait de phase est surtout utilisé dans les systèmes chaotiques en fait, c'est là qu'il est le plus utile, mais c'est trop compliqué pour cette leçon
- Parler moins du portrait de phase, et traiter un cas non-linéaire par la méthode des perturbations (montrer le doublage de fréquence)
- Parler de ce que le portrait de phase nous dit sur le Van der Pol (linéarité aux petites amplitudes, période plus grande que pour un OH simple...)
- Bien faire le lien entre l'oscillateur à résistance négative et le Van der Pol et faire un osc. à résistance négative le jour J (virer le multivibrateur astable?)
- On peut faire le calcul sur le portrait de phase du VdP quasi-linéaire du lien entre amplitude des oscillations et terme non-linéaire (raisonnement énergétique, mais qui nécessite d'écrire l'équation de VdP différemment sinon c'est pas clair et pas très utile, bref cf la bibliographie)
- On peut évoquer l'effet de synchronisation de deux oscillateurs auto-entretenus non-linéaires légèrement couplés
- Bilan sur les non-linéarités : 3 effets : fixent l'amplitude des oscillations, enrichissent le spectre et permettent la synchronisation de deux oscillateurs couplés
- Ne pas confondre oscillateur forcé et oscillateur auto-entretenu, ça n'a rien à voir.

Proposition de plan

I - Oscillateurs non-entretenus, portrait de phase

1. Oscillateur non-amorti

-> OH et pendule simple, définition du portrait de phase, sens de parcours et autres généralités

2. Oscillateur amorti

-> conséquence sur le portrait de phase,... faire la manip du RLC

3. Oscillateur non-linéaire, apparition d'harmoniques

-> calcul perturbatif, soit pour le pendule à l'ordre 3, soit pour un oscillateur forcé (optique NL, doublement de fréquence avec modèle de l'électron élastiquement lié + terme potentiel en x^3), soit les deux

II - Oscillateurs entretenus

1. Définition, exemples du quotidien

-> nécessité d'une non-linéarité

2. Modèle de Van der Pol

-> rôle de la non-linéarité

3. Oscillateur à résistance négative

-> faire la manip + modélisation par un van der pol

III - Bilan et conclusion

-> intérêt et limites du portrait de phase

-> rôles des non-linéarités suivant le type d'oscillateur

Proposition de biblio supplémentaire, à compléter

L'ordre dans le chaos, P. Bergé, éd. Hermann

Vibration et propagation T.1 : les oscillateurs, J.-P. Mathieu

Mécanique 2, Faroux Renault

Electronique 2, HPrépa