

## LPh7: Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique.

phénomène de résonance:

la réponse d'un système oscillant devient très grande pour une certaine fréquence d'excitation de notre système.

I - Exemple de résonance à un degré de liberté: système masse-ressort.

### a) Mise en équation du mouvement.

Ici on traite de la résonance en critérii qui a lieu quel que soit la valeur de  $\alpha$



$$m \ddot{x} = -kx - \alpha \dot{x} + F \cos(\omega t)$$

$$m \ddot{x} + \alpha \dot{x} + kx = F \cos(\omega t)$$

Equations linéaire  $\rightarrow$  on peut passer en complexe

$$F = F_0 e^{i\omega t} \quad x = x_0 e^{i\omega t}$$

$$-m \omega^2 x_0 + i\omega \alpha x_0 + k x_0 = i\omega F_0$$

$$x_0 = \frac{i\omega F/m}{k/m - \omega^2 + i\omega \frac{\alpha}{m}} \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2 \quad \frac{\alpha}{m} = \gamma$$

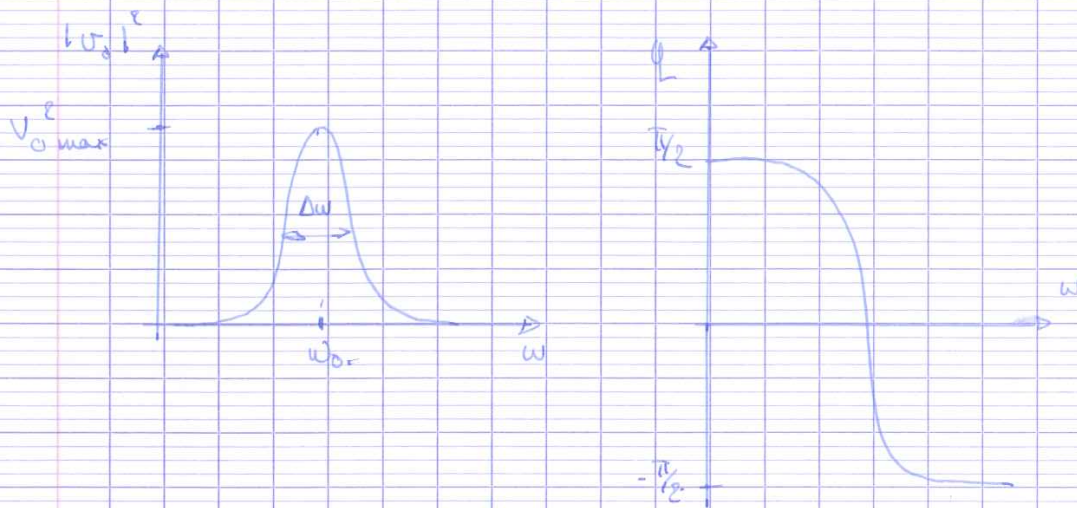
$$x_0 = \frac{F}{m\gamma} \frac{1}{1 - \frac{i\omega_0}{\gamma} \left( \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)}$$

$$|x_0|^2 = \frac{F^2}{(m\gamma)^2} \frac{1}{1 + \left( \frac{\omega_0}{\gamma} \right)^2 \left[ \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right]^2}$$

Pour  $\omega = \omega_0$  on a résonance  $\omega_0$ : pulsat<sup>o</sup> propre du système.

A.N:  $k = 25 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$   
 $m = 100 \text{ g}$

$\Delta \omega_0 = 1,5 \text{ Hz}$



b) Définition du facteur de qualité Q

$$|v_0|^2 = \frac{\omega^2 (F_0/m)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}$$

Proche de la résonance  $\omega \approx \omega_0$

$$\omega_0^2 - \omega^2 \approx (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) \approx 2\omega_0$$

$$|v_0|^2 \approx \frac{(F_0/m)^2}{4[(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\gamma^2}{4}]}$$

Fonction Lorentzienne

$\Delta \omega = \gamma$

On définit le facteur de qualité Q

$Q = \frac{\omega_0}{\Delta \omega}$

quantifie la sélectivité de notre système.

ici  $\gamma \approx 0,25 \text{ s}^{-1}$  (dans l'eau)

$Q \approx 10 - 100$



c) Aspects énergétiques.

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \langle \vec{F} \cdot \vec{v} \rangle = F_0 |\underline{v}_0| \langle \cos(\omega t) \cos(\omega t + \phi) \rangle$$

à résonance  $|\underline{v}_0| = \underline{v}_{0 \max}$  et  $\phi = 0$ .

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{F_0 |\underline{v}_0|}{2}$$

À résonance le transfert de puissance entre l'excitateur et le système est maximal.

Energie mécanique

$$E_m = E_c + E_p$$

$$\langle \frac{dE_m}{dt} \rangle = \langle P_{\text{perdue}} \rangle + \langle P_{\text{transmise}} \rangle$$

= 0  
car mv périodique.

$$E_m = E_{c \max} = \frac{1}{2} m v_0^2 \max$$

$$\langle P_{\text{perdue}} \rangle = - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{T_0} \quad \lambda = \frac{m \gamma}{T_0}$$

$$|E_{\text{perdue}}|_{T_0} = \frac{m \gamma v_0^2 \max}{2} \times T_0$$

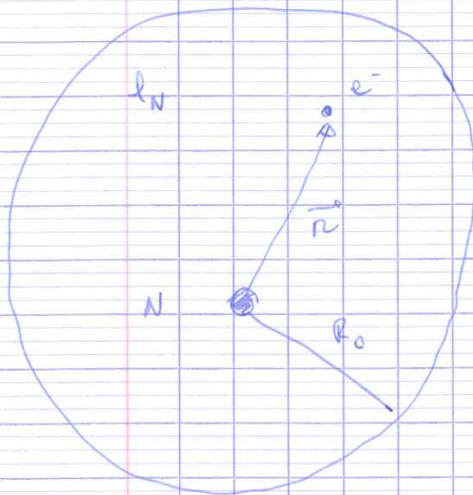
$$\frac{E_m}{|E_{\text{perdue}}|_{T_0}} = \frac{E_m}{T_0} \frac{1}{\gamma} = \frac{\omega_0}{\gamma} = Q$$

$$Q = \frac{E_m}{E_{\text{perdue}} / \text{période d'oscillation}}$$

- sélection en fréquence.
- efficacité de la sélection quantifiée par  $Q$ .
- $Q$  est lié aux pertes énergétiques du système.

## III - Analogies avec deux autres systèmes physiques.

a) Résonance microscopique : le modèle de l'électron élastiquement lié



Face de rappel élastique

Modèle de Thomson:

la charge du noyau est délocalisée et uniformément répartie dans une sphère de rayon  $R_0$ .

Théorème de Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int.}}{\epsilon_0}$$

$$\text{avec } n^2 E(r) = \frac{4}{3} \pi n^3 l_N \frac{1}{\epsilon}$$

$$E(r) \propto r$$

$$\vec{F}_N = -e E(\vec{r})$$

$$\vec{F}_N \propto -n \vec{r}$$

$$\omega_0 \approx 10^{16} \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\vec{F}_{el} = -m \omega_0^2 n \vec{r}$$

$$\vec{F}_{frott} = -\frac{m}{\tau} \vec{v} \approx n 10^{-9} \text{ N}$$

$\hookrightarrow$  due au rayonnement du dipôle



$$\vec{F}'_{elec} = -e \vec{E}'_{ext}$$

$$= -e E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$$

$$\vec{F}'_{totale} = -e \vec{E}' - e \vec{v} \wedge \vec{B}'$$

$$|\vec{B}'| = \frac{|\vec{E}'|}{c} \quad \text{Relation de structure.}$$

$$\frac{|F_{magn}|}{|F_{elec}|} = \frac{v B}{E} = \left[ \frac{v}{c} \ll 1 \right]$$

electrom non relativiste.

$$m_e \ddot{x} + m \omega_0^2 x + \frac{\mu}{2} \dot{x} = -e E_0 e^{i\omega t}$$

Analogie avec le système masse ressort.

$$\frac{1}{Z} = \gamma$$

$$F_0 = -e E_0$$

Le moment dipolaire:  $p(t) = -e x(t)$

$$p(t) = \frac{e^2 E_0 / m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} e^{i\omega t}$$

$$\omega \approx 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$$

$$p(t) = \frac{e^2 E_0 / m}{\omega_0^2}$$

$$S_{rayonnée} \propto [p^{(2)}(t)]^2$$

$$S_{rayonnée} \propto \omega^4 p_0^2$$

$$\text{D'où } S_{rayonnée} \propto \frac{p_0^2}{\lambda^4}$$

Notre système permet d'expliquer la couleur bleue du ciel. Le maximum du rayonnement se fait dans le violet mais notre œil est plus sensible au vert-jaune on voit le ciel bleu.

b) Analogie avec le circuit RLC.



$$u_e = u_s + u_L + u_C$$

$$= \frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} + Ri$$

On dérive par rapport au temps.

$$\dot{u}_e = \frac{i}{C} + R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2 i}{dt^2}$$

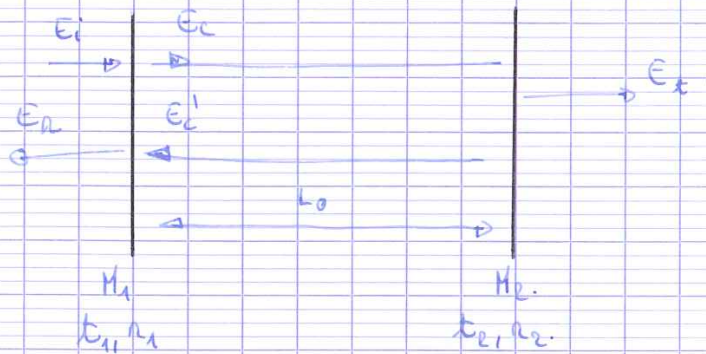
en Méca:  $F = kv + \Delta \dot{v} + m \ddot{v}$

mécanique	électronique
k	1/C
m	L
d	R
v	i
ae	q



### III - Résonance à N degrés de liberté.

#### a). Présentation du Fabry Péro.



au M<sub>1</sub> :

$$E_c = t_1 E_i - r_1 E'_c$$

$$E_r = r_1 E_t + t_1 E'_c$$

au M<sub>2</sub> :

$$E_t = t_2 E_c e^{i k L_0}$$

$$E'_c = -r_2 E_c e^{i k L_0}$$

$$\frac{E_t}{E_c} = \frac{t_1 t_2 e^{i k L_0}}{1 - r_1 r_2 e^{i k L_0}}$$

$$\left| \frac{E_t}{E_c} \right|^2 = \frac{T_1 T_2}{1 + R_1 R_2 - 2 \sqrt{R_1 R_2} \cos(2kL_0)}$$

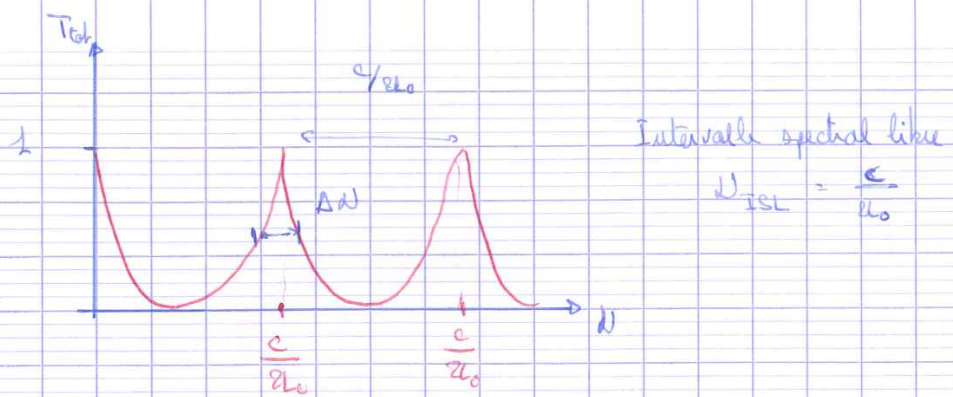
$$\cos(2kL_0) = 1 - 2 \sin^2(kL_0)$$

$t_1^2 = T_1$     $r_1^2 = R_1$    de même pour 2.

$$T_{\text{tot}} = \frac{T_1 T_2}{(1 - \sqrt{R_1 R_2})^2} \frac{1}{1 + \frac{2\sqrt{R_1 R_2}}{(1 - \sqrt{R_1 R_2})^2} \sin^2(kL_0)}$$

$kL_0 = n\pi$  à la résonance    $n \in \mathbb{N}$

$$D = \frac{P_c}{2L_0} \quad P \in \mathbb{N}$$



b). Définition de la finesse  $\mathcal{F}$ .

$$\Delta \lambda = \frac{1-R}{\sqrt{R}} \frac{c}{2\lambda_0}$$

$$\frac{\Delta \lambda_{ISL}}{\Delta \lambda} = \frac{\pi \sqrt{R}}{1-R} = \mathcal{F}$$

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta \lambda_{ISL}}{\Delta \lambda} = \frac{\Delta \lambda_{ISL}}{\lambda_0} \frac{\lambda_0}{\Delta \lambda}$$

$$\mathcal{F} = \frac{\lambda_0}{c \Delta t} Q$$

c). Considérations énergétiques.

$$Q = \frac{2\pi E_{cavité}}{E_{perdu \text{ par oscillation}}}$$

$$E_{cav} = (\pi c + \pi c') S \frac{L_0}{c} \quad \pi c' = R \pi c$$

$$E_{cav} = \frac{L_0 S}{c} (1+R) \pi c$$

Puissance perdue:  $(T \pi c' + T \pi c) S$

$$P_{perdu} = T(1+R) S \pi c$$



Questions :

- Quelles sont les conditions pour avoir une résonance au vitesse.

$$\hookrightarrow Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- Pourquoi avoir directement traité la résonance en  $v$  ?  
 $\hookrightarrow$  Pour le traitement énergétique de la résonance.

Energie : seule grandeur que l'on retrouve dans tout les domaines de la physique.

- Modèle de l'électron élastiquement lié, quels sont les limites d'un tel modèle.

Dans quel mesure ce modèle peut être considéré comme vrai ?

- Qu'est ce qu'une résonance à  $N$  degré de liberté ?

Analogie Fabry - Perot  $\Leftrightarrow$  corde de Melde ou on peut découper la corde en une infinité de systèmes élémentaires à un degré de liberté.

- Pourquoi s'intéresser à la finesse et non pas au facteur de qualité  $Q$  pour le Fabry - Perot ?

la  $\mathcal{F}$  universel : ne dépend pas de la fréquence des modes considérés.

- D'où vient la face de flattement dans le modèle de l'électron élastiquement lié.

$\rightarrow$  De la perte d'énergie du système par rayonnement.

### Remarques:

- Mettre plus d'arches de grandeurs notamment pour le RLC
- Mettre une application de la résonance type amortissement de voiture.
- Mettre un transparent les calculs sur le Fabry-Pérot.
- Faire un transparent avec le rayonnement speckle du rayonnement du dipôle, le spectre de la perception de l'œil. et les superposer → ciel bleu