

LP39 : Effet Tunnel

Niveau : L3

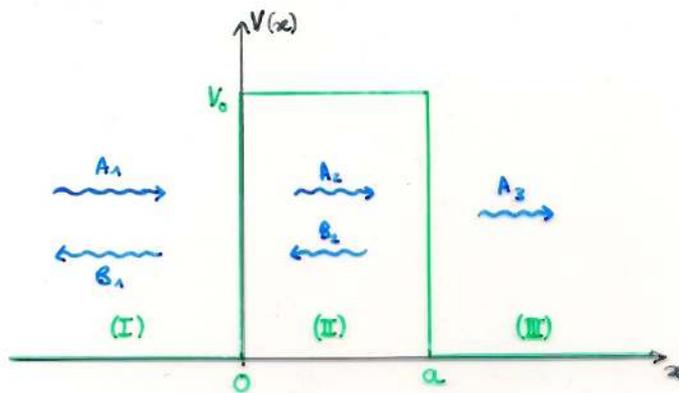
Prérequis :

- Premier cours de mécanique quantique (fonction d'onde, équation de Schrödinger, marche+barrière de potentiel, ...),
- Ondes évanescentes
- Cours élémentaire de supraconductivité

I. Description du phénomène

1) Barrière de potentiel et courant de probabilité

Barrière de potentiel :



$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$k = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

$\frac{1}{k}$: portée de l'onde évanescente

- Densité de probabilité de présence de la particule au point \vec{r} :

$$\rho(\vec{r}, t) = \Phi^*(\vec{r}, t) \Phi(\vec{r}, t) \quad \text{avec} \quad \int \rho(\vec{r}, t) d^3x = 1$$

- Vecteur densité de courant de probabilité :

$$\vec{J} = \frac{1}{m} \text{Re} \left(\Phi^* \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \Phi \right)$$

↳ cas particulier : $\Phi = \Phi_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$

$$\Rightarrow \vec{J} = \frac{\hbar \vec{k}}{m} |\Phi_0|^2$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = 0$$

Equation analogue à l'hydrodynamique et l'électromagnétisme.

Cas stationnaire : le premier terme est nul donc $\text{div}(\vec{j}) = 0$, le courant est à flux conservatif et dans notre cas d'étude à 1D il est conservé à chaque instant.

2) Transmission de la barrière

Relations de continuité en $x=0$ et $x=a$:

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2$$

$$iK(A_1 - B_1) = k(A_2 - B_2)$$

$$A_2 e^{ka} + B_2 e^{-ka} = A_3 e^{iKa}$$

$$kA_2 e^{ka} - kB_2 e^{-ka} = iKA_3 e^{iKa}$$

Après calcul on trouve :

$$T(E) = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0-E)} \sinh^2\left(\frac{\sqrt{2m(V_0-E)} a}{\hbar}\right)} \neq 0!$$

3) Cas où $ka \gg 1$

De plus $E \ll V_0$ et $\sinh(x) \simeq \frac{e^x}{2}$ donc

$$T(E) \simeq \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{16E(V_0-E)} e^{2ka}} \simeq \frac{16E(V_0-E)}{V_0^2} e^{-2ka}$$

OdG : $E = 1eV, V_0 = 2eV, a = 2,5\text{\AA}$

→ $T = 0,78$ pour un électron, $T = 10^{-4}$ pour un proton

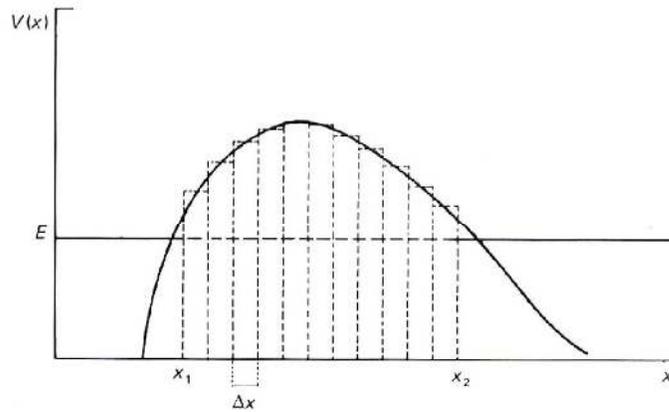
Comme le coefficient devant l'exponentielle est de l'ordre de l'unité, on retiendra l'expression

$T(E) \simeq e^{-\frac{2\sqrt{2m(V_0-E)}a}{\hbar}}$ dans la suite.

$$\left. \begin{array}{l} V_0 \nearrow \\ E \searrow \\ a \nearrow \\ m \nearrow \end{array} \right\} T \rightarrow 0$$

4) Cas d'un potentiel quelconque

Effet tunnel : calcul pour une barrière réelle



Agrégation de Physique	Réf : 74 - 15
Ouvrage : Quantique - rudiments Auteur(s) ou collection : Lévy-Leblond/Balibar, éd. Masson	

Approximation WKB :

$$T_{WKB} = T_1 * \dots * T_N = e^{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m} \Delta x \sum_{i=1}^N \sqrt{V_i - E}}$$

Lorsque $\Delta x \rightarrow 0$, on peut remplacer la somme discrète par une intégrale :

$$T_{WKB} = e^{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{V_0(x) - E} dx}$$

Analogie optique : réflexion totale interne frustrée (cf diapos)

II . Les dispositifs basés sur l'effet tunnel

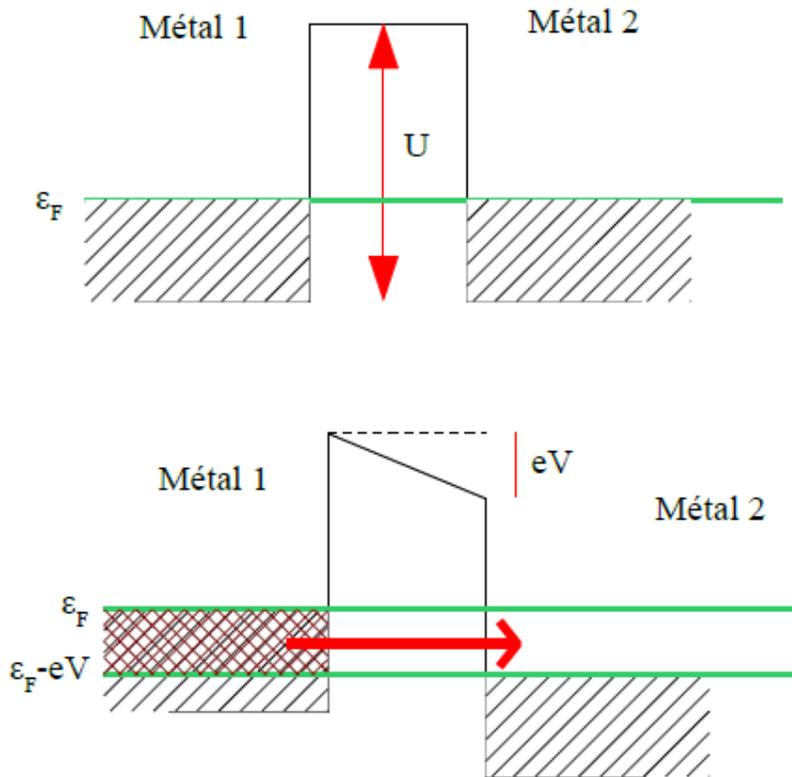
1) Le microscope à effet tunnel

a) Principe

Prix Nobel 1986 : Binnig et Rohrer, ingénieurs IBM

2 modes de fonctionnement : à intensité constante (boucle d'asservissement permettant de bouger la pointe via des piézos afin de garder le courant tunnel constant) ou à altitude constante.

b) Modélisation



OdG : $eV \approx 0.1eV$, $\varepsilon_F \approx 20eV$ donc $eV \ll \varepsilon_F$

c) Courant tunnel

- Aspect énergétique :

Les électrons pouvant transiter sont ceux appartenant à l'intervalle $[\varepsilon_F - eV, \varepsilon_F]$ (du fait du principe d'exclusion de Pauli les électrons ne peuvent pas transiter vers un état déjà occupé).

Aspect énergétique :

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}$$

donc $n(\varepsilon_F) = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{2m\varepsilon_F}{\hbar^2} \right)^{3/2}$

A.N: $n(\varepsilon_F) \sim 5 \times 10^{23} \text{ m}^{-3}$ pour l'aluminium

Densité électronique pouvant transiter:

$$n' = n(\varepsilon_F) - n(\varepsilon_F - eV)$$

$$n' = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{2m\varepsilon_F}{\hbar^2} \right)^{3/2} \left(1 - \left(1 - \frac{eV}{\varepsilon_F} \right)^{3/2} \right)$$

$eV \ll \varepsilon_F$ $\left\{ \begin{array}{l} n' \approx \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{2m\varepsilon_F}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{3}{2} \frac{eV}{\varepsilon_F} \\ n' \approx \frac{eV}{\pi^2 \hbar^2} \frac{m^2}{2} \end{array} \right.$

A.N: $n' \sim 3 \times 10^{24} \text{ m}^{-3}$ pour l'aluminium

- Aspect géométrique :

Il faut prendre en compte la géométrie de la pointe :

$$k_z > 0$$

$$k \in \Omega_0 \text{ avec } \Omega_0 = \int_0^{\theta_0} \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi (1 - \cos(\theta_0)) \approx \pi\theta_0^2 \text{ car } \theta_0 \ll 1$$

Au final, la densité électronique pouvant transiter est :

$$n_{tot} = n' \frac{\Omega_0}{4\pi}$$

OdG : $pA \leq I_{tunnel} \leq nA$

Sensibilité verticale \approx pm

Sensibilité horizontale \approx nm

?

2) La jonction Josephson

Prix Nobel 1973

Elle est constituée de deux supraconducteurs séparés par une barrière isolante de largeur \approx 1nm, les paires de Cooper peuvent les traverser par effet tunnel, ceci est à l'origine d'une constante de couplage entre les états des paires de Cooper des deux côtés de la barrière.

$$\phi_1 = \sqrt{\frac{n_{s1}}{2}} e^{i\theta_1} \text{ et } \phi_2 = \sqrt{\frac{n_{s2}}{2}} e^{i\theta_2}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & K \\ K & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

Étapes de calcul pour trouver

les Equations de Josephson :

- dériver les fonctions d'onde des deux supraconducteurs
- injecter les expressions trouvées dans l'équation de Schrödinger

$$\begin{cases} -\hbar \frac{d\theta_1}{dt} + \frac{i\hbar}{2m_{s1}} \frac{dm_{s1}}{dt} - E_1 = K \sqrt{\frac{m_{s2}}{m_{s1}}} e^{i(\theta_2 - \theta_1)} \\ -\hbar \frac{d\theta_2}{dt} + \frac{i\hbar}{2m_{s2}} \frac{dm_{s2}}{dt} - E_2 = K \sqrt{\frac{m_{s1}}{m_{s2}}} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \end{cases}$$

- ① on prend les parties imaginaires de ces Equations

$$\frac{dm_{s2}}{dt} = \frac{2K}{\hbar} \sqrt{m_{s1} m_{s2}} \sin(\theta_2 - \theta_1) = -\frac{dm_{s1}}{dt}$$

À partir de ce résultat on exprime la densité de courant

$$J = -2e \frac{dm_{s2}}{dt} = \frac{4eK}{\hbar} \sqrt{m_{s1} m_{s2}} \sin(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\boxed{J = J_c \sin(\theta_2 - \theta_1)} \text{ Relation « Courant - Phase »}$$

- ② on prend les parties réelles des Equations (avec $m_{s1} = m_{s2}$)

$$\begin{cases} -\hbar \frac{d\theta_1}{dt} - E_1 = K \cos(\theta_2 - \theta_1) = -\hbar \frac{d\theta_2}{dt} - E_2 \\ -\hbar \frac{d\theta_1}{dt} + \hbar \frac{d\theta_2}{dt} = -2eV \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} E_2 = E_1 + 2eV$$

$$\boxed{\frac{d(\theta_2 - \theta_1)}{dt} = \frac{2eV}{\hbar}} \text{ Relation « Tension - Phase »}$$

- $V=0$: courant continu
 - $V=Cste$: courant alternatif, $J = J_C \sin\left(\frac{2eV}{\hbar} t + \delta_0\right)$
- $$\omega_J = \frac{2eV}{\hbar}$$
- OdG : $\omega_J = 484MHz/\mu V$

Applications :

- étalon standard de tension
- SQUID (mesure de champs \vec{B} très faibles, application à la magnétoencéphalographie)

Questions

- **Pour la barrière on n'a que la partie spatiale, comment s'écrivent les fonctions d'onde avec la partie temporelle ?**

$$\phi(x, t) = \phi(x)e^{-i\omega t}$$

$$\text{Avec } \omega = \frac{E}{\hbar}$$

Dans la zone (II) il n'y a pas de propagation car pas de terme en $i(kx - \omega t)$

- **Quelle est la limite de l'analogie optique ?**
Il y a des ondes évanescentes propagatives (?) dans ce cas-là tandis que pour l'effet tunnel il n'y a pas propagation (d'après la correctrice). Cependant il nous semble que la correctrice a confondu avec les plasmons de surface qui eux se propagent, lorsqu'il n'y a pas de porteurs de charges on pense qu'il n'y a pas d'onde propagative comme pour l'effet tunnel.
- **Quelle est la relation entre la densité de probabilité de présence et la fonction d'onde ?**

$$\rho = |\phi|^2$$

- **Pourquoi avoir pris les valeurs $E = 1eV$, $V_0 = 2eV$, $a = 2,5\text{\AA}$ dans la partie $ka \gg 1$?**
Cas fréquemment rencontrés (?)

Remarques

- Plus développer la barrière, ne pas la mettre en prérequis. Plus insister sur les paramètres (K , k , a , m , ρ , ...) et écrire les définitions au tableau.
- Bien de parler de l'approximation WKB et de donner des OdG pour le courant tunnel
- Ne pas dire « l'électron peut passer », parler uniquement de densité électronique et probabilité de présence puisque que l'on utilise une description quantique.
- Calculer la valeur de n_{tot} pour que ce calcul ne serve pas à rien.
- Insister sur le fait que la fréquence de Josephson ne dépend que de constantes fondamentales et ne dépend donc pas du matériau.
- Dire ce que signifie SQUID (Superconducting Quantum Interference Device).