

Nous savons très bien qu'à notre échelle, il est parfaitement impossible pour un homme, dans une vie dénuée de fiction, de traverser un mur, et il en est de même par exemple pour une balle de ping-pong qui ne passera jamais à travers la table sur laquelle elle rebondit. Cependant, à une échelle beaucoup plus faible, nous allons voir qu'il existe un phénomène, l'effet tunnel, qui permet aux particules d'avoir un comportement complètement contre-intuitif.

Celui-ci, et nous allons le voir à travers cette leçon, prévoit qu'une particule peut franchir un potentiel de valeur supérieur à son énergie, ce qui est interdit en physique classique.

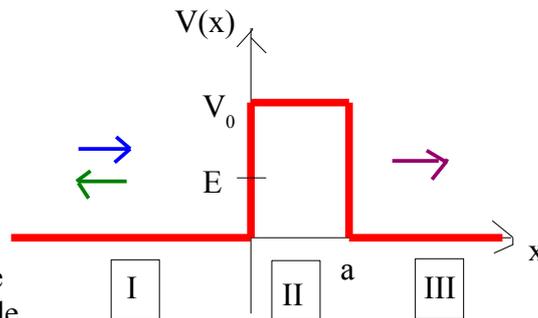
I) Mise en équation de l'effet tunnel

1) Description de la situation

La situation est la suivante:

On considère une onde se propageant selon les x croissants, et arrivant sur une barrière rectangulaire.

On considère alors une partie de l'onde réfléchie à l'arrivée sur la barrière de potentiel, et une onde transmise se propageant dans la zone $x > a$.



On va donc chercher à voir si une onde dans la zone 3 est possible.

On résout donc l'équation de Schrödinger stationnaire indépendante du temps:

$$E \psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(x) + V(x) \psi(x)$$

*Dans les régions I et III, l'équation se réécrit de la manière suivante:

$$\psi''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x) = 0 \quad \text{et en notant} \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}},$$

$$\psi''(x) + k^2 \psi(x) = 0$$

On obtient donc les solutions suivantes:

$$\psi_I(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

$$\psi_{III}(x) = E e^{ikx}$$

L'absence de terme en « $-ikx$ » pour la zone III vient du fait qu'il n'y a aucune raison qu'une onde se propage selon les x décroissants, étant donné que l'onde initiale arrive de moins l'infini.

*On réalise de même dans la région II:

$$\psi''(x) - \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \psi(x) = 0 \quad \text{avec, rappelons-le, } V_0 > E.$$

$$\text{et en notant} \quad \alpha = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}, \quad \text{on obtient} \quad \psi_{II}''(x) - \alpha^2 \psi_{II}(x) = 0$$

Et donc: $\psi_{II}(x) = C e^{\alpha x} + D e^{-\alpha x}$

2) Probabilité de transmission

On a donc l'expression générale de notre fonction d'onde dans les trois zones I, II, III.

Afin de déterminer les coefficients inconnus, on utilise alors la continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée à la traversée d'un potentiel:

$x=0$:

$$\begin{aligned} A + B &= C + D \\ ik(A - B) &= \alpha(C - D) \end{aligned}$$

$x=a$:

$$\begin{aligned} C e^{\alpha a} + D e^{-\alpha a} &= E e^{ika} \\ \alpha C e^{\alpha a} - \alpha D e^{-\alpha a} &= ik E e^{ika} \end{aligned}$$

Ce système peut se noter de la façon suivante:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ ik - ik & -\alpha & \alpha & \\ 0 & 0 & e^{\alpha a} & e^{-\alpha a} \\ 0 & 0 & \alpha e^{\alpha a} - \alpha e^{-\alpha a} & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E e^{ika} \\ ik E e^{ika} \end{pmatrix}$$

Remarquons qu'on a ici 4 équations, 5 inconnues.

Cependant, ce qui nous intéresse ici est la probabilité pour que l'onde incidente donne naissance à une onde transmise, soit $T = \left| \frac{E}{A} \right|^2$

Rmq: on peut aussi calculer la probabilité pour une onde d'être réfléchie: $R = \left| \frac{B}{A} \right|^2$, $R + T = 1$.

on peut donc résoudre le système par la méthode que nous préférons, et on obtient alors (après simplification qu'il faut réaliser sur un transparent par exemple:

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \operatorname{sh}^2\left(\sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} a\right)}$$

Discussion

- si E diminue, $T \rightarrow 0$ (intuitif: plus l'énergie est basse, plus la barrière paraît haute)
- si a augmente, $T \rightarrow 0$ (d'autant plus dur à franchir qu'elle est longue)
- si V_0 augmente, $T \rightarrow 0$ (plus elle est haute, plus elle est dure à franchir)
- si m augmente à E fixée, $T \rightarrow 0$
- si $\alpha a \rightarrow 0$, alors, comme $\operatorname{sh}(x) \simeq \frac{e^x}{2}$
- $T \rightarrow T = 16 \frac{E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-2\sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} a}$, c'est pour cela qu'on entend parler de décroissance

exponentielle pendant la traversée tunnel, et c'est dans ce cas que nous nous placerons désormais, car cette condition est vérifiée dans la majorité des cas.

AN: e^- d'énergie 1eV pour une barrière de 2eV: $T=0,78$
proton, même conditions: $T \simeq 10^{-4}$

On voit ici l'importance cruciale de la masse dans la valeur de la proba de transmission.

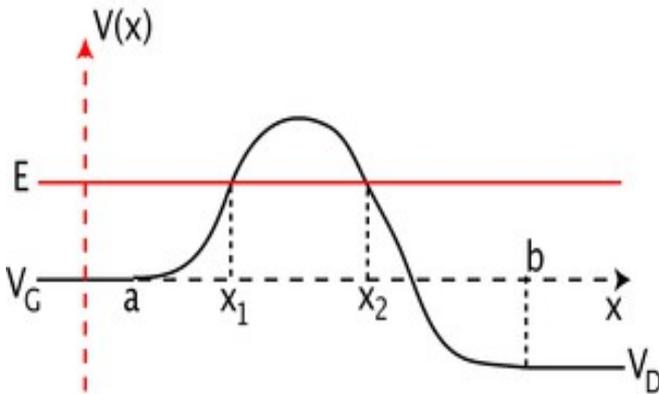
Rmq:

On peut s'interroger sur la possibilité pour un homme de traverser une porte par effet tunnel. Celle-ci est très faible, on s'en doute, mais de combien très faible?

Imaginons un chat marchant aléatoirement sur un clavier d'ordinateur. La probabilité pour qu'il tape au hasard l'intégralité de l'Odyssée d'Homère est de environ $e^{-10^{4.8}}$. Et la proba pour qu'un homme traverse une porte est de environ $e^{-10^{26.30}}$. (LOL)

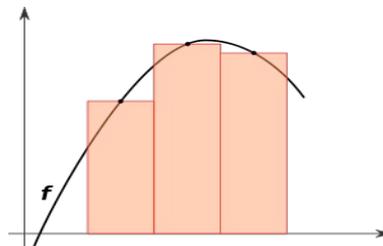
3) Cas d'un potentiel quelconque

Nous avons donc traité le cas d'une barrière de potentiel rectangulaire. En réalité, les potentiels étudiés sont loin d'être rectangulaires, et nous allons ici voir comment les traiter.



Nous avons ici une barrière quelconque, et on

appelle x_1 et x_2 les points tels que $V(x_1) = V(x_2) = E$. On modélise alors la courbe par une succession de rectangles (identique à la méthode intégrale des rectangles), comme sur l'exemple suivant:



On peut donc ici considérer en première approximation que pour franchir toute la barrière de potentiel par effet tunnel, la particule doit franchir chaque barrière rectangulaire qui la compose. On peut donc écrire la probabilité de transmission totale de la manière suivante:

$$T_{\text{total}} = \prod T_i \text{ et donc (ce qui nous intéressera pour la suite) } \log(T_{\text{total}}) = \sum_i \log(T_i)$$

Si l'on note Δx la largeur des rectangles et x_i leur position, on a donc:

$\log(T_{\text{total}}) = \sum_i \left(-2 \sqrt{\frac{2m(V(x_i) - E)}{\hbar^2}} \Delta x \right)$ et si l'on considère les rectangles de largeur infiniment petite, on obtient alors :

$$\log(T_{\text{total}}) = \int_{x_1}^{x_2} \left(-2 \sqrt{\frac{2m(V(x) - E)}{\hbar^2}} dx \right) .$$

C'est cette formule que nous utiliserons pour la suite.

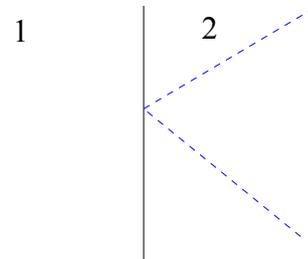
4) Analogie avec la physique classique

On peut faire un lien classique pour comprendre un peu l'effet tunnel : l'exemple de l'optique.

Considérons deux milieux et d'indices respectifs n_1 et n_2 avec $n_2 > n_1$.

Considérons alors une onde se propageant de le milieu 2 et arrivant à l'interface entre les deux milieux avec une incidence telle que la réflexion soit totale.

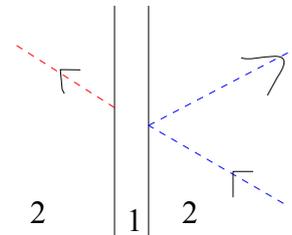
Rien ne se propage dans la région 1. Cependant on sait que dans la région 1, au voisinage de l'interface, existe une onde évanescente et le champ E pénètre dans le milieu 1 sur une courte distance.



Si maintenant on considère deux milieux 2 entourant une faible épaisseur de milieu 1 :

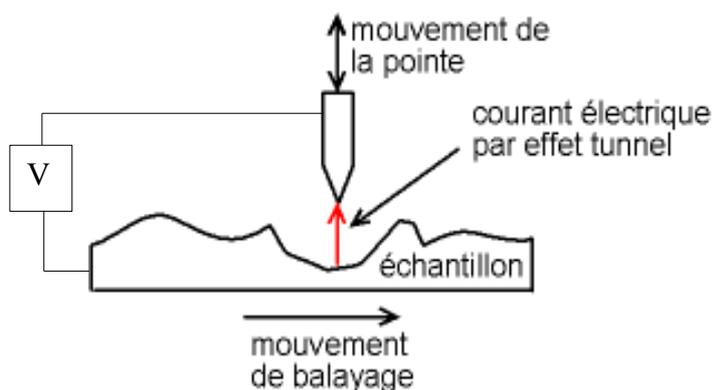
On a ici le champ qui pénètre dans le milieu 1, mais cette faible épaisseur permet au rayon lumineux de se « reformer » dans le milieu 2 de gauche.

Sur cet exemple, on voit bien l'analogie avec l'effet tunnel dans la mesure où une épaisseur faible permet un comportement a priori interdit par la mécanique classique.



II) Applications : le microscope à effet tunnel

1) Principe



Binnig et Rohrer ingénieurs IBM, Prix Nobel

Le microscope à effet tunnel permet l'étude très précise de surface d'un métal (conducteur!). Le principe est le suivant :

Une différence de potentiel est appliquée entre la pointe du microscope et l'échantillon. Si la distance entre les deux est faible (de l'ordre du nm), les électrons du métal peuvent passer par effet tunnel et il y a création d'un courant tunnel. En déplaçant la pointe le long de l'échantillon à l'aide de piezo-électrique, et la valeur du courant dépendant de la distance entre l'échantillon et la pointe, on

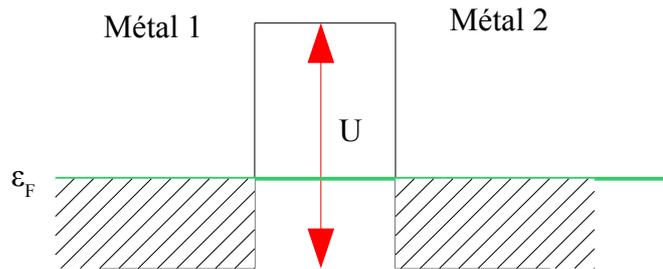
peut remonter à la topographie de la surface.

En pratique, on déplace la pointe verticalement en asservissant le système de sorte que le courant soit toujours le même. Ainsi, en sachant de combien on a déplacé la pointe, on en déduit de même la topographie de la surface du métal.

Notons que cette microscopie à effet tunnel ne fonctionne qu'avec des conducteurs.

2) Mise en situation

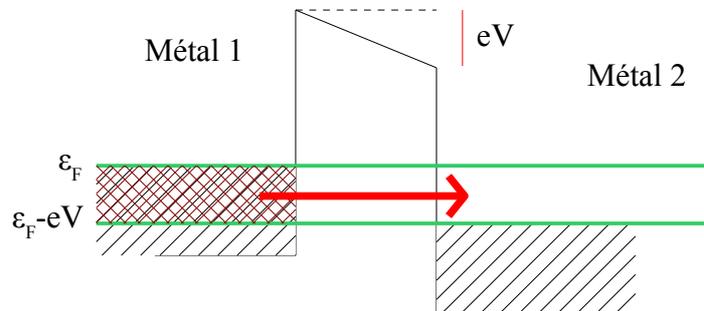
Pour modéliser le problème, on considère deux métaux identiques, séparés par une fine épaisseur d'air, créant un potentiel U entre les deux. On note ϵ_F l'énergie de Fermi du métal.



En hachuré : les états occupés dans les deux métaux.

Même si la probabilité tunnel pour que des électrons franchissent cette barrière est non nulle, aucun état de l'autre côté de la barrière n'est libre pour permettre la traversée.

Si maintenant on applique une tension V entre les deux métaux :



Dans le métal 2, le niveau de Fermi est abaissé de eV .

Dans ce cas, il existe des électrons, ceux dans la zone doublement hachurée, qui ont une énergie suffisante pour potentiellement occuper un état libre du métal 2.

Ces électrons ont une énergie appartenant à $[\epsilon_F - eV, \epsilon_F]$.

En pratique : $eV = 0,1 \text{ eV}$
 $U = 30 \text{ eV}$
 $\epsilon_F = \text{une vingtaine d'eV}$

Ainsi on a $eV \ll U, \epsilon_F$.

3) Courant tunnel

Pour connaître la valeur de l'intensité du courant tunnel entre la pointe et l'échantillon, on va s'intéresser aux différents facteurs qui influent sur cette intensité.

J_T dépend de :

- du nombre d'électrons dans le métal
- proba de traverser par effet tunnel
- vitesse (énergie) des électrons

On utilise alors la physique statistique, et le résultat suivant :

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}} \quad \text{d'où : } n(\epsilon_F) = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{2m\epsilon_F}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

La densité d'électrons n' pouvant traverser par effet tunnel est la densité d'électrons compris entre $\epsilon_F - eV$ et ϵ_F .

$$n' = n(\epsilon_F) - n(\epsilon_F - eV)$$

$$n' = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \epsilon_F^{\frac{3}{2}} \left(1 - \left(1 - \frac{eV}{\epsilon_F} \right)^{\frac{3}{2}} \right)$$

et en utilisant $eV \ll \epsilon_F$

$$n' = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{2m\epsilon_F}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{3}{2} \frac{eV}{\epsilon_F}$$

et en utilisant $\sqrt{\epsilon_F} = \frac{\hbar k_F}{\sqrt{2m}}$

$$n' = \frac{4m eV}{\hbar^2} k_F$$

AN : $eV = 0,1 \text{ eV}$, $U = 30 \text{ eV}$, $\epsilon_F = 23 \text{ eV}$.

$$n' = 3,4 \cdot 10^{27} \text{ m}^{-3}$$

comparé à $n(\epsilon_F) = 5 \cdot 10^{29} \text{ m}^{-3}$

Il faut cependant s'intéresser à un autre facteur influençant la densité d'électrons à considérer.

En effet, les électrons pouvant transiter de la pointe vers le métal passe obligatoirement par la pointe. Si on considère que la pointe est un cône de demi-angle θ_0 , on a alors que n' correspond à l'intégration de θ sur tout l'espace, alors que $n_{\text{réel}}$ correspond à l'intégration de θ à θ_0 .

Soit :

$$\frac{n_{\text{réel}}}{n} = \frac{\int_0^{\theta_0} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi}{4\pi (\text{tout l'espace})}$$

$$n_{\text{réel}} = n \frac{(-\cos(\theta_0) + 1) 2\pi}{4\pi}$$

en considérant $\theta_0 \ll 1$

$$n_{\text{réel}} = n' \frac{\theta_0^2}{4}$$

et on peut donc écrire la valeur de la densité de courant tunnel :

$$\vec{J} = -e n_{\text{réel}} \vec{v} \cdot T(\epsilon_F) \quad \text{avec } \vec{v} \simeq \vec{v}_F$$

En remplaçant avec tout ce qu'on connaît :

$$J_T = \frac{e^2 V k_F \theta_0^2}{4\pi^2 \hbar} T(\epsilon_F)$$

AN : $I_T = J_T \sigma$ avec une pointe de l'ordre du nm

$$I_T = 35 \text{ pA}$$

III) Radioactivité α

1) Problématique

Il a été remarqué que les noyaux lourds peuvent émettre des particules α (noyaux d' ${}^4_2\text{He}$). Le temps de demi-vie de cette radioactivité dépend fortement de l'atome considéré. En effet, voici quelques valeurs numériques pour différentes espèces :

${}_{228}\text{U}$: $4,5 \cdot 10^9$ années (environ l'âge de la Terre)

${}_{88}\text{Ra}$: 1622 ans

${}_{84}\text{Po}$: $\approx 10^{-4}$ s

Cette différence ne peut pas être expliquée par les différences de masse, car ces particules ont le même ordre de grandeur concernant celles-ci. Alors d'où vient cette différence ?

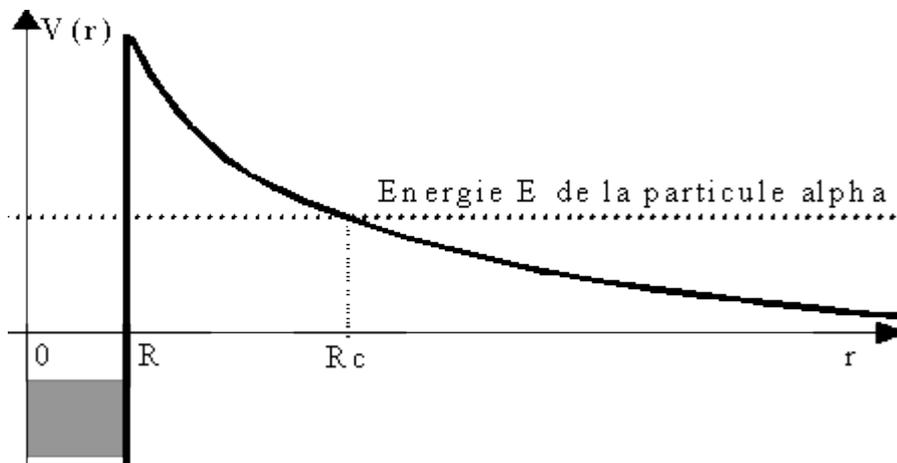
2) Modèle

Gamow dans les années 20 propose alors le modèle que nous allons développer ici. A l'époque, on a mesuré les temps de demi-vie, et remarqué que les énergies des particules α sont comprises entre 4 et 10 MeV, en fonction de l'atome considéré.

Il va proposer une théorie basée sur l'effet tunnel.

Supposons que l'atome a pour numéro atomique Z . Notons $Z'=Z-2$ la charge du noyau après l'émission de la particule α .

Gamow modélise alors le potentiel ressenti par une particule α , en fonction de sa position par rapport au centre de l'atome dont il s'extrait.



R est le rayon de l'atome. On note E l'énergie de la particule et R_c la valeur de r telle que $E=V(R_c)$.

- $0 < r < R$: α soumise à interaction forte au sein du noyau (mur de potentiel)
- $r > R$: α soumise au potentiel coulombien « habituel » de la forme

$$V(r) = \frac{2e(Z-2)e}{r} = \frac{2e^2 Z'}{r}$$

$$E = \frac{2e^2 Z'}{R_c}$$

On a alors :

$$\text{d'où : } R_c = \frac{2e^2 Z'}{E}$$

On se place alors dans le cas du potentiel quelconque traité en partie I)3).

$$\log T = -2 \int_R^{R_c} \sqrt{\frac{2m_\alpha(V(r)-E)}{\hbar^2}} dr$$

Allez! on y va pour le calcul! (détaillé un peu trop ici par rapport à ce qu'il faudrait faire en live)

$$\log T = -2 \int_R^{R_c} \sqrt{\frac{2m_\alpha}{\hbar^2} \sqrt{\frac{2e^2 Z'}{r} - E}} dr$$

$$x = \frac{r}{R_c}$$

$$\log T = -2 \sqrt{\frac{2m_\alpha}{\hbar^2}} \int_{\frac{R}{R_c}}^1 \sqrt{\frac{2e^2 Z'}{R_c x} - E} R_c dx$$

$$\log T = -2 R_c \sqrt{\frac{2m_\alpha}{\hbar^2} E} \int_{\frac{R}{R_c}}^1 \sqrt{\frac{1}{x} - 1} dx$$

après calcul (Berkeley, inutile de trop détailler ici)

$$\log T = \frac{-2\pi e^2 Z'}{\sqrt{E}} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} + 8 \sqrt{\frac{m R Z' e^2}{\hbar^2}}$$

La variation des différents termes est régie par la variation de E.

Les différences de masse et de charge étant peu différentes, on peut alors considérer (et c'est une des approximations de Gamow), que on peut finalement écrire, en utilisant les valeurs du Ra :

$$\log T = -\frac{148}{\sqrt{E(\text{MeV})}} + 32,5$$

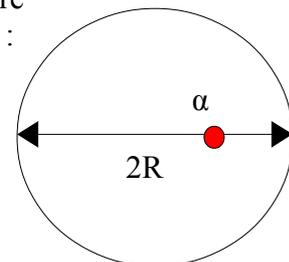
On a donc la valeur de la probabilité de traverser la barrière de potentiel, en fonction de l'énergie E de la particule α , qui dépend de l'atome considéré.

3) Temps de demi-vie

Pour modéliser le temps de demi-vie, on opère avec le modèle suivant :

La particule α possède à l'intérieur de l'atome l'énergie E que l'on mesure en sortie. Elle parcourt le diamètre de l'atome et deux cas se présentent :

- la particule sort par effet tunnel
- la particule est réfléchiée



Le temps entre deux réflexions est noté τ_0 .

On a :

$$\tau_0 = \frac{2R}{v} \text{ avec } v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

$$\tau_0 = 2R \sqrt{\frac{m}{2E}}$$

Alors si T est la proba de transmission tunnel, $\frac{1}{T}$ est le nombre moyen de collisions effectuées par la particule avant de sortir de l'atome.

Alors le temps moyen passé par une particule à l'intérieur du noyau avant de s'en extraire est :

$$\tau = \frac{\tau_0}{T} \text{ et on peut donc écrire : } \log(\tau) = \log(\tau_0) - \log(T)$$

$$\log(\tau) = \log\left(2R\sqrt{\frac{m}{2E}}\right) + \frac{148}{\sqrt{E(\text{MeV})}} - 32,5$$

Or, si E varie de 4 à 9 MeV, étudions les variations des différents termes en fonction de E.
Rappelons que pour différents noyaux, E varie en gros de 4 à 10 MeV.
Étudions alors l'impact d'une variation de 4 à 9 MeV.

$$\tau_{0,4} = 2R\sqrt{\frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{4}}$$

$$\tau_{0,9} = 2R\sqrt{\frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{9}} \quad \Delta\left(\frac{148}{\sqrt{E}}\right) = 148\left(\frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{9}}\right) \approx 25$$

$$\Delta \log(\tau_0) = \log\left(\frac{3}{2}\right) = 0,18$$

$$\Delta \log(\tau_0) \ll \Delta\left(\frac{148}{\sqrt{E}}\right)$$

On peut donc prendre une valeur constante pour τ_0 , celle du Ra.

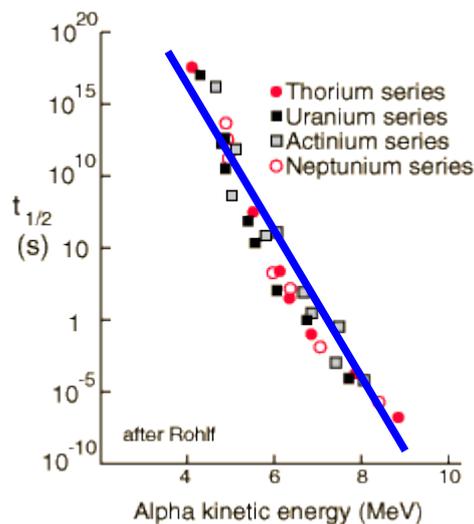
$$\tau_0 \approx 10^{-21} \text{ s}$$

On obtient alors l'équation suivante :

$$\log(\tau) = \frac{148}{\sqrt{E(\text{MeV})}} - 53,5$$

Comme à une énergie E correspond un noyau radioactif, on peut donc tracer la droite

$$\log(\tau) = f\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right) \text{ (en bleu) :}$$



J'ai pris ici un graphe internet de $\log(\tau) = f\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right)$ (vraies valeurs) et j'y ai rajouté la courbe, qui n'est pas exacte ici, mais pour la compréhension du phénomène c'est amplement suffisant (courbe réelle dans le Berkeley)

On voit donc que avec toutes les approximations faites, on obtient tout de même un modèle qui colle de manière assez surprenante à la réalité.

C'est ainsi que Gamow a été le premier à expliquer la radioactivité alpha à l'aide de l'effet tunnel.

IV) Conclusion

On a donc pu décrire dans cette leçon un effet purement quantique et contre-intuitif, qu'est l'effet tunnel, et qui permet de manière assez surprenante la traversée d'une barrière de potentiel pour une particule, alors que la mécanique classique et le sens commun l'interdisent totalement.

Nous avons alors pu décrire grâce à ce phénomène deux types de problèmes, la STM et la radioactivité α , et l'on a donc vu que l'effet tunnel apparaissait dans des domaines très différents de la physique microscopique.

Nous aurions pu également traiter l'effet Josephson, méthode de mesure extrêmement précise de champ magnétique utilisant une jonction tunnel entre deux supraconducteurs, ou encore étudier la molécule d'ammoniac (mais celle-ci l'est déjà dans la leçon systèmes à deux niveaux).

Commentaires/questions

- Quelle est l'analogie du potentiel carré en optique ?
→ Fabry-Pérot $T \propto \frac{1}{1 + \sin^2(\dots)}$
- analogie classique avec les deux milieux
→ attention pas totalement équivalent, il peut exister des ondes stationnaires entre les deux milieux
Terme clé : Onde évanescente
Piège : ne pas parler d'effet de peau, qui est l'absorption de l'onde dans le métal
- Microscope à effet tunnel : bien fait
- Conseil de Biblio du correcteur :
Henri Alloul : Physique des électrons
- Attention ! On ne dit pas Gamo mais Gamof !
- Petite blagounette : ce fripon de Gamow a contacté des potes dont les noms lui siaient, pour faire le théorème Alphen-Bethe-Gamow.
- NH_3 : déconseillé, déjà fait dans une leçonGr
- C'est dur, mais si motivé : faire l'effet Josephson
- Ce que l'on ne voit pas dans les calculs sur le Hamiltonien :
 $\begin{pmatrix} X & W \\ W & X \end{pmatrix}$ W traduit le passage par effet tunnel.
 $P(A \rightarrow B) = \langle A | W | B \rangle$.
- Effet tunnel autre : électrons dans un solide (FEYNMAN)
- Un peu HS avec la leçon, mais grand classique à lire : Landau-Lipschitz

Ref :

- Basdevant (pour toute la partie I notamment)
- Balibard, Levy-Leblond (du prof)
- Berkeley (vraiment génial pour la radioactivité α)