

## **LP 32 - Diffraction de Fraunhofer**

Sylvain Fayard - Yann Gouttenoire

### **Messages à faire passer dans la leçon :**

- ° Limite de l'optique géométrique, complexité des eq de Maxwell → Modèle scalaire de la lumière
- ° Du principe de Huygens-Fresnel jusqu'aux conditions de Fraunhofer
- ° Diffraction de Fraunhofer se retrouve dans 3 cas : observation à l'infini ou dans le plan focale image d'une lentille pour une onde plane incidente et dans le plan image d'une lentille dans le cas d'une source ponctuelle
- ° La figure de diffraction s'exprime alors simplement comme le carré de la transformée de Fourier du facteur de transmission du diaphragme
- ° La diffraction de Fraunhofer est celle qui intervient lorsque l'on observe l'image d'un objet éclairé par une onde plane selon les lois de l'optique géométrique (Un des messages parmi les plus importants de la leçon)
- ° Conséquence pour la résolution en optique: critère de Rayleigh
- ° Fente étroite → figure de diffraction large et inversement
- ° La lentille permet de décomposer l'objet selon ses fréquences spatiales dans son plan focal image → filtrage spatiale

### **Plan choisi :      **Niveau L3****

**Intro :** OG décrit « rayons lumineux se propageant en ligne droite », mis en défaut par expérience de diffraction par une fente → Bords diffus. Selon que figure de diffraction plus étroite ou plus large que image géom → Fresnel ou Fraunhofer. Eq de Maxwell ? Non trop compliqué → Description scalaire

### **I- De Huygens-Fresnel à Fraunhofer**

#### **A) Le principe de Huygens-Fresnel (1678 puis 1819)**

H-Prépa d'optique ondulatoire

#### **B) Traitement rigoureux (Champeau 2.1, Goodman 3.10)**

Kirchhoff (1882), Sommerfeld (1896).

Eq de Maxwell dans le cadre du modèle scalaire → eq de Helmholtz dont on cherche la solution en onde plane.

L'amplitude diffractée est la superposition des ondes planes que l'on aura fait propager depuis le plan du diaphragme jusqu'au plan d'observation avec l'équation de Helmholtz.

Ce traitement permet de définir proprement les approximations : largeur diaphragme et distance d'obs largement supérieur à longueur d'onde.

La première approx est une hypothèse de départ pour négliger les courants de charge dans le diaphragme.

La deuxième découle du calcul.

Le modèle apporte 2 corrections à H-F : les ondes secondaires sont déphasées de  $\pi$  sur 2 par rapport à l'onde incidente et sont émises avec une certaine distribution angulaire donné par le facteur d'inclinaison.

*Remarque :* l'interprétation du déphasage de  $\pi$  sur 2 dépend des auteurs.

Ce serait le déphasage qui intervient après passage par un point de convergence : la phase de gouy (Chartier 7.1.2).

Ou bien ce serait parce que les ondes secondaires interviennent dans la sommation de HF par leur dérivée temporelle (Goodman 3.7).

#### **C) Hypothèses simplificatrices**

### **i) Approximations paraxiales (Goodman 4.2)**

Aboutir à la formule de Fresnel dans la limite des petits angles. Cela revient à approximer les fronts d'ondes sphériques des ondes secondaires par des fronts d'ondes paraboliques.

*Remarque* : la formule de Fresnel peut aussi s'écrire comme le produit de convolution de l'amplitude complexe dans le plan du diaphragme par une certaine fonction.

### **ii) Approximation de Fraunhofer (Goodman 4.3)**

On introduit le nombre de Fresnel  $N_f$  qui est l'ordre de grandeur de la phase du terme quadratique sous l'intégrale.

Condition de Fraunhofer :  $N_f$  très petit. Cela revient à négliger le terme quadratique (on peut aussi voir que  $N_f = \text{ODG phase terme quadratique}$ ). Donner ODG de distance pour être dans ces conditions → difficile à obtenir à priori à moins de disposer d'une fente faite exprès. Mais en fait on peut se placer artificiellement à l'infini dans le plan focal image lentille.

#### ***Interprétation de $N_f$ :***

La figure de diffraction en  $M(x,y,z)$  est la TF d'une certaine fonction dont un peu donner la signification physique : c'est l'amplitude complexe d'une onde sphérique convergente en  $(0,0,z)$ . L'approximation de Fraunhofer revient à considérer que cette onde sphérique peut être assimilée à une onde plane au niveau du diaphragme. On introduit alors le nombre de Fresnel  $N_f$  qui est le nbr de surfaces équiphasés (surfaces d'onde séparées de  $\lambda$ ) appartenant à cette onde sphérique qui interceptent le diaphragme.

## **II- Diffraction de Fraunhofer en optique**

### **A) Facteur de transmission**

Definition puis cas d'une lentille convergente avec démonstration.

### **B) Formation des images (Goodman 5.3, Champeau 1.4 et 2.1)**

**Situation** : source ponctuelle dans plan objet, lentille + diaphragme accolé, image de la source dans plan image.

**Q** : figure de diffraction dans le plan image ?

Exprimer amplitude diffractée dans plan image via formule de Fresnel.

Exprimer amplitude complexe de l'onde issu de la source dans plan du diaphragme.

Exprimer facteur de transmission lentille (paragraphe précédent).

Faire inventaire termes quadratique en  $X, Y$  (coord dans plan du diaph), voir que leur somme est nulle (formule de conj Descartes).

Faire inventaire termes linéaires.

Finalement, l'amplitude diffractée est la transformée de Fourier du facteur de transmission du diaphragme centré sur l'image prédite par l'optique géométrique.

**Message** : la lentille compense le méchant terme quadratique de la formule de Fresnel pour aboutir à la formule de Fraunhofer. La formule de Fraunhofer décrit la figure de diffraction qui entoure l'image de l'optique géométrique.

**Remarque** : L'amplitude diffractée que l'on vient de calculer est le produit de convolution de la transformée de Fourier du facteur de transmission du diaphragme par l'amplitude image de la source prédite par l'optique géométrique.

### **C) Diffraction par une fente**

Supposer formulaire des TF connus  $\rightarrow$  TF porte = sinc.  
On remarque que fente fine  $\rightarrow$  figure de diffraction large et recip.  
Généralisation pour ouverture circulaire  $\rightarrow$  encadrer expression de largeur mi-hauteur.  
Livres de prépa pour la figure en sinc ou la tache d'Airy.

### **D) Critère de Rayleigh pour la résolution**

La diffraction limite la résolution. Présenter critère de Rayleigh avec prisme de Wollaston.

Donner ODG limite de résolution angulaire pour télescope puis microscope.

Bien dire que c'est la turbulence atm qui limite résolution des télescopes et que sans optique adaptative le diamètre apparent est de 25 cm (paramètre de Fried (1966) qui dépend de la météo et de la géographie)

## **III- Optique de Fourier**

### **A) Plan de Fourier**

Situation : onde en incidence normale sur objet dans plan objet.

On a vu que l'amplitude complexe dans plan focal d'une lentille est la TF du facteur de transmission de l'objet. Donc la lentille réalise une opération de décomposition de l'objet suivant ses fréquences spatiales. On appelle plan focal=plan de Fourier.

Illustration avec comme objet un réseau : on montre en faisant la TF de son facteur de transmission que le spectre du réseau comporte une suite de fréquences discrètes matérialisées dans le plan de Fourier par des points régulièrement espacés vers lesquels convergent les ondes sphérique émergentes.

On voit que l'on peut retirer certaines fréquences spatiales en opérant dans le plan de Fourier avec un masque.

### **B) Strioscopie (Abbe 1840-1905)**

Montage expérimentale : filtrage passe-haut d'une empreinte de doigt. Le filtrage permet de mettre en évidence certains éléments physiques de l'image qui n'apparaissent pas directement. On a révélé les variations rapides de l'indice optique.

### **C) Epuration d'un laser**

Du faite de sa grande cohérence, un faisceau laser agrandi va présenté des fluctuations aléatoires d'intensité (Speckle).

Montage expérimentale : filtrage passe-bas d'un laser.

On ne laisse passer que l'ordre zéro (le fond continu).

## **Expériences présentées :**

- ° Mise en évidence diffraction par fente
- ° Mise en évidence critère de Rayleigh avec prisme de Wollaston
- ° Strioscopie pour une empreinte de doigt
- ° Epuration d'un laser

## **Remarques et questions du jury:**

### ***Si on parle de TF il faut savoir :***

- ° que la TF d'un produit de convolution est le produit des TF. C'est très puissant et très utile. Par exemple dans le cas d'un facteur de transmission qui s'écrit comme le produit de 2 facteurs de transmission ou lorsque l'on veut introduire la réponse impulsionnelle ou alors si l'on a N pupilles diffractantes identiques.
- ° que le support d'une fonction est inversement proportionnelle au support de sa

**Quelques questions posées :**

- ° Dans quel cas l'approximation scalaire n'est plus valable ?  
Nécessité de la prise en compte de la polarisation (milieux anisotropes).
- ° Comment est modifiée l'intensité diffractée dans la direction de l'OG si je multiplie la largeur de la fente par 2 ?  
Elle est multipliée par 4.
- ° Est-ce que l'on peut remonter au facteur de transmission de l'objet à partir de la figure de diffraction ?  
Non il manque les phases → intérêt de l'holographie
- ° Comment différencier Fresnel et Fraunhofer ?  
Comparer dimension figure de diffraction à dimension image de l'OG

**Les applications à connaître :**

- ° L'apodisation dans le contexte de 2 étoiles et dont l'image de la moins brillante risque d'être noyée dans les maxima secondaires de la tache d'Airy de la plus brillante. Pour réduire les maxima secondaires, on adoucit les bords du diaphragme (Taillet, Goodman)
- ° La microscopie à contraste de phase pour faire l'image d'un objet de phase. Contrairement à la strioscopie, on conserve l'ordre zéro mais on le déphase de  $\pi$  sur 2. Zernike (1935) Nobel pour cette invention (1953). (Champeau, Goodman, Born et Wolf)
- ° L'interférométrie des tavelures de Labeyrie pour vaincre les turbulences atm et séparer 2 étoiles proches en prenant des photos sur des temps très courts puis en constatant que les TF de ces photos forment des franges d'interférence dont l'interfrange est relié au diamètre angulaire des 2 étoiles (Champeau, Hetch)
- ° L'optique adaptative pour vaincre les turb atm en analysant le front d'onde avec un analyseur de Shack-Hartmann (1977) puis en déformant le miroir avec des cales piezo (Champeau)
- ° L'holographie pour conserver les phases de l'objet contrairement à une opération de TF au carré (Champeau)
- ° La dimension d'un grain de speckle qui est relié au diamètre du télescope (analogie avec speckle laser : dimension de la tache éclairée sur le diffuseur) alors que le diamètre de la figure speckle complète est relié au paramètre de Fried qui est l'échelle caractéristique de variation des fluctuations de l'indice optique dans l'atmosphère (analogie avec speckle laser : dimension d'un diffuseur) (Champeau)
- ° Les zones de Fresnel qui définissent des ensembles de sources secondaires qui émettent en phases vis-à-vis d'un point d'observation donné (Hetch)

**Le système optique vu comme un système linéaire en amplitude ou en intensité (Goodman) :**

- ° Dans le cas d'une source cohérente, l'amplitude diffractée s'exprime comme le produit de convolution de l'amplitude image prédite par l'optique géométrique par la réponse impulsionnelle de l'amplitude. Cette dernière est l'amplitude diffractée lorsque l'onde incidente est une onde plane, c'est-à-dire la transformée de Fourier du facteur de transmission de l'objet (ou du diaphragme). Elle est aussi appelée fonction d'étalement du point de l'amplitude. Sa transformée de Fourier est appelée fonction de transfert de l'amplitude. Cette dernière est tout simplement le facteur de transmission de l'objet.
- ° Dans le cas d'une source incohérente, l'intensité diffractée s'exprime comme le produit de convolution de l'intensité image prédite par l'optique géométrique par la réponse impulsionnelle de l'intensité. Cette dernière est l'intensité diffractée lorsque l'onde incidente est une onde plane, c'est-à-dire le module au carré de la transformée de Fourier du facteur de transmission de l'objet (ou du diaphragme). Elle est aussi appelée fonction d'étalement du point de l'intensité. Sa transformée de Fourier est appelée fonction de transfert optique. Le module de sa

transformée de Fourier est appelée fonction de transfert de modulation.

° La réponse impulsionnelle de l'intensité est le module au carré de la réponse impulsionnelle de l'amplitude. La fonction de transfert optique est la fonction d'autocorrélation de la fonction de transfert de l'amplitude et donc la fonction d'autocorrélation du facteur de transmission de l'objet.

***Un peu plus éloigné du sujet de la diffraction de Fraunhofer :***

° La synthèse d'ouverture dont le principe est de faire interférer les ondes reçues par différents télescopes afin de remonter au degré de cohérence spatiale de l'onde émise par un astre (le contraste des franges d'interférences) et donc de remonter à la luminance de la source via le théorème de Wiener-Khintchine (Champeau, Hetch, An introduction to Optical Stellar Interferométrie Labeyrie)

° L'interférométrie de HBT qui est la même chose sauf qu'on mesure le degré de cohérence spatiale de l'intensité (Champeau, Hetch, An introduction to Optical Stellar Interferométrie Labeyrie)

**Bibliographie et remarques bibliographiques :**

Goodman, Introduction to Fourier Optics (l'essentiel pour la leçon, ne nous fait pas attendre contrairement au Champeau, bonne pédagogie, formulations de la diffraction par Kirchhoff et Sommerfeld très bien expliquées).

Champeau, Ondes lumineuses (essentiel aussi pour la leçon mais un peu trop dilué, le point positif est le bon nombre d'applications présentées).

Born et Wolf (complet).

Hetch (permet de bien comprendre le passage de Fresnel à Fraunhofer).

Taillet, Optique physique (des choses intéressantes mais calculs très rapides).

Chartier, Manuel d'optique.

H-Prépa d'optique ondulatoire et autres livres de prépa.

Labeyrie, An introduction to Optical Stellar Interferometry (techniques récentes pour améliorer la résolution des télescopes terrestres).