

LP33 : Diffraction de Fraunhofer

BISOGNIN Rémi, GRZELKA Marion

12 Novembre 2014

Table des matières

1	Diffraction à l'infini	2
1.1	Principe de Huygens-Fresnel	2
1.2	Approximation de Fraunhofer	3
1.3	Condition expérimentale	3
2	Figure de diffraction	4
2.1	Ouverture rectangulaire et fente	4
2.2	Ouverture circulaire	6
2.3	Théorème de Babinet	7
3	Application aux instruments d'optique	8
3.1	Critère de Rayleigh	8
3.2	Filtrage spatial	8

Niveau

Classe Préparatoire

Pré-requis

- Optique géométrique
- Ondes électromagnétiques
- Interférences

Introduction

Dans le cours sur les ondes électromagnétiques nous avons vu que la lumière était une onde, ce qui n'est pas évident a priori. Nous avons déjà vu avec le cours sur les interférences une manifestation du caractère ondulatoire de la lumière. Nous allons voir ici une deuxième manifestation du caractère ondulatoire de la lumière avec le phénomène de diffraction.

De plus, c'est la diffraction qui, historiquement, a convaincu du caractère ondulatoire de la lumière. Nous allons donc commencer ce cours par une expérience historique : l'observation de l'ombre d'une bille, le point de Poisson. Une bille de l'ordre du millimètre de diamètre comme celle d'un stylo est éclairé avec un laser vert et son ombre est observée sur un écran. L'optique

géométrique prévoit une ombre uniforme et regardez il y a un point lumineux au centre de l'ombre, c'est le phénomène de diffraction qui permet d'expliquer la présence de lumière dans l'ombre.

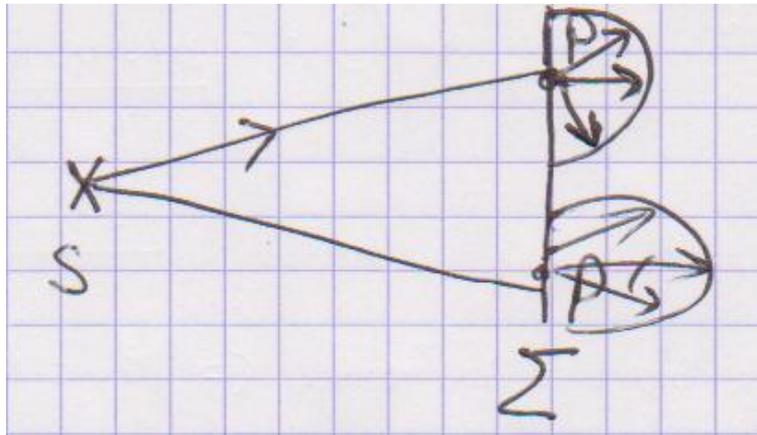
Matériel pour expérience : Laser vert, lentille convergente, point de Poisson (le plus petit) et écran

Dans ce cours nous étudierons le phénomène de diffraction dans le cas où source et écran sont à l'infini de l'objet diffractant.

Remarque : J'ai bien compris que tu introduis d'abord la diffraction puis après tu te places dans les conditions de Fraunhofer mais l'expérience d'introduction est de la diffraction de Fresnel. On pourrait aussi faire de la diffraction avec une fente réglable en introduction.

1 Diffraction à l'infini

1.1 Principe de Huygens-Fresnel



Chaque point P d'une surface Σ atteinte par la lumière de la source primaire peut être considéré comme une source secondaire, ponctuelle et fictive, émettant une onde sphérique :

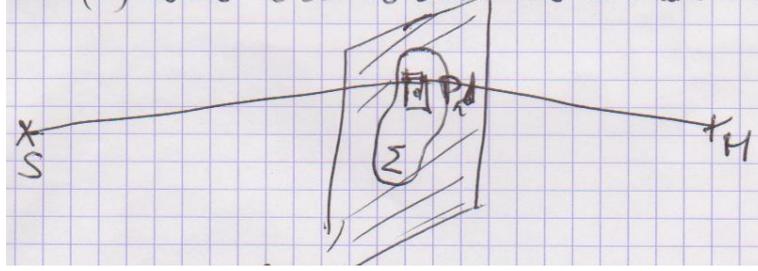
- (i) d'amplitude proportionnelle à celle de l'onde incidente qui atteint ce point P et à l'élément de surface $d\Sigma$ qui l'entoure
- (ii) toutes ces sources secondaires sont cohérentes entre elles.

Remarque : Dire qu'elles sont les contributions de Huygens et de Fresnel à ce principe. Pour Huygens c'est le (i) et pour Fresnel c'est le (ii).

Principe de Huygens-Fresnel sous sa forme mathématique :

$$dA_P \propto A_S d\Sigma \frac{e^{\frac{2i\pi}{\lambda} SP}}{SP} \quad (1)$$

$$A_M = K \int_{\Sigma} dA_P \frac{e^{\frac{2i\pi}{\lambda} PM}}{PM} = K \int_{\Sigma} A_S d\Sigma \frac{e^{\frac{2i\pi}{\lambda} SP}}{SP} \frac{e^{\frac{2i\pi}{\lambda} PM}}{PM} \quad (2)$$



1.2 Approximation de Fraunhofer

On repère un point au centre O

La taille de l'ouverture diffractante est notée a .

Première approximation : $a \ll SO$ (source loin de l'objet diffractant) et $a \ll OM$ (écran loin de l'objet diffractant) impliquent $\frac{1}{SP \times PM} \approx \frac{1}{SO \times OM}$

$$SP = \sqrt{SO^2 + 2\vec{SO} \cdot \vec{OM} + OM^2} \approx SO + \frac{\vec{SO}}{SO} \cdot \vec{OP} + \dots$$

On reconnaît la direction de l'onde incidente $\vec{u}_i = \frac{\vec{SO}}{SO}$ et les termes suivant sont de l'ordre de $\frac{a^2}{SO}$.

$$\text{De même } PM = \sqrt{OM^2 - 2\vec{OM} \cdot \vec{OP} + OP^2} \approx OM + \frac{\vec{OM}}{OM} \cdot \vec{OP} + \dots$$

On reconnaît la direction de l'onde incidente $\vec{u}_t = \frac{\vec{OM}}{OM}$ et les termes suivant sont de l'ordre de $\frac{a^2}{OM}$.

$$\frac{2\pi}{\lambda}(SP + PM) \approx \frac{2\pi}{\lambda}(SO + OM) - \frac{2\pi}{\lambda}(\vec{u}_t - \vec{u}_i) \cdot \vec{OP} + \dots$$

Les termes suivant sont de l'ordre de $\frac{2\pi a^2}{\lambda SO}$ et $\frac{2\pi a^2}{\lambda OM}$. Ils sont négligeables devant 2π à la condition que (deuxième approximation)

$$\frac{a^2}{\lambda SO} \ll 1 \text{ et } \frac{a^2}{\lambda OM} \ll 1 \quad (3)$$

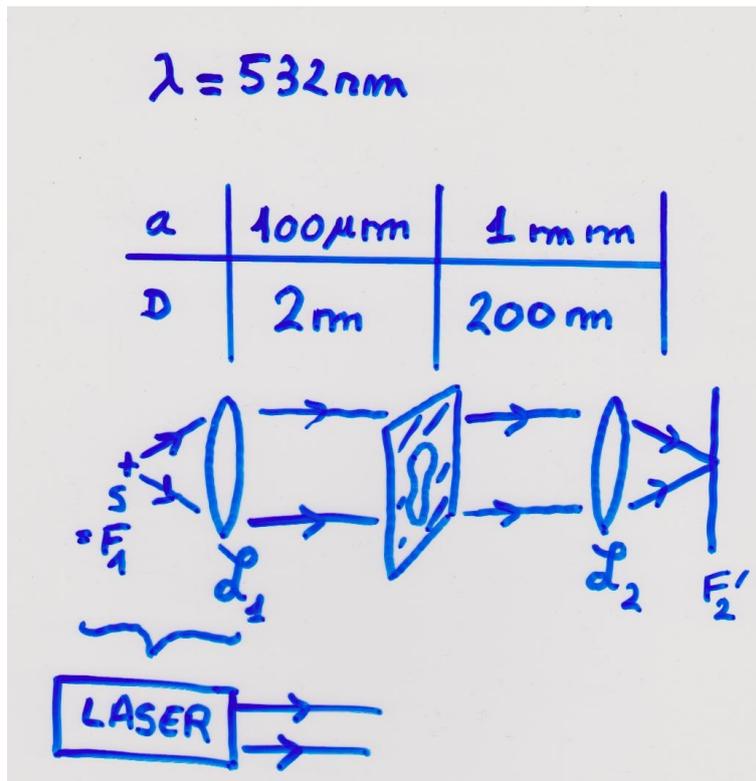
D'où :

$$A_M = K \frac{e^{\frac{2i\pi}{\lambda}(SO+OM)}}{SO \times OM} \int_{\Sigma} A_S d\Sigma e^{-\frac{2i\pi}{\lambda}(\vec{u}_t - \vec{u}_i) \cdot \vec{OP}} \text{ et } I_M = |A_M|^2 \quad (4)$$

1.3 Condition expérimentale

Calculs pour différentes tailles a d'objets diffractants de la longueur D qui doit séparer l'écran et la source de l'objet diffractant. D devient vite grand. Les solutions pour éviter de se placer trop loin expérimentalement sont :

Remarque : Attention pour le laser : il faut regarder la longueur de Rayleigh l_R : le faisceau est bien cylindrique sur une distance proche de l_R mais devient conique au delà.

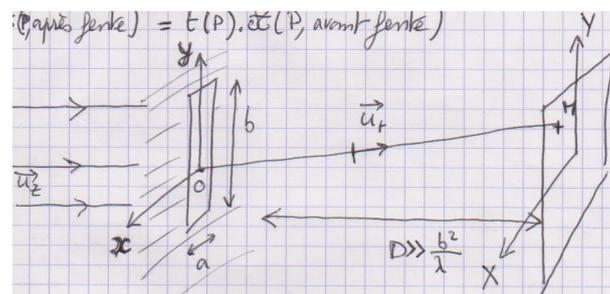


2 Figure de diffraction

2.1 Ouverture rectangulaire et fente

L'objet diffractant est pris en compte grâce à la transmittance t , nombre complexe de module inférieur à 1.

$$A(P, \text{après fente}) = t(P) \cdot A(P, \text{avant fente}) \text{ si l'objet est plan et fin}$$



$$\vec{u}_i = \vec{u}_z$$

$$\vec{u}_t = \frac{X}{D}\vec{u}_x + \frac{Y}{D}\vec{u}_y + \vec{u}_z$$

$$\vec{OP} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$$

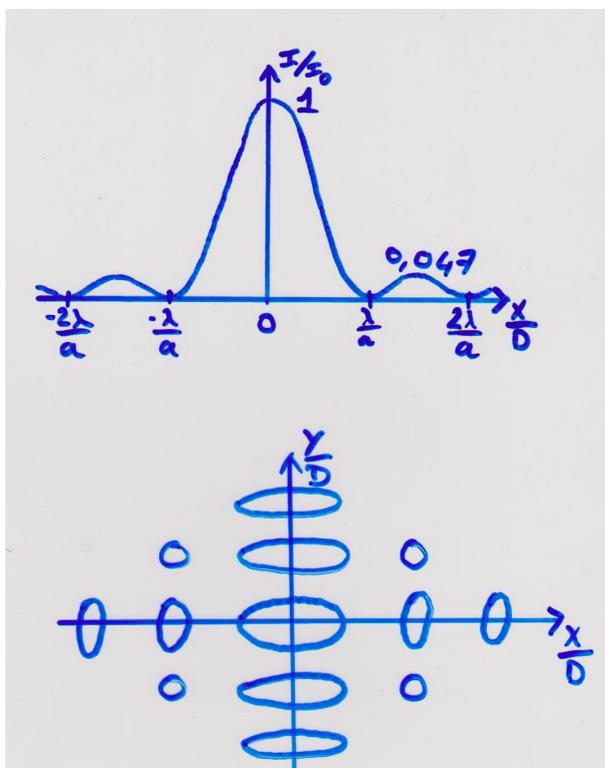
$$t(P) = 1 \text{ si } P \in \text{fente}, t = 0 \text{ sinon}$$

Le principe de Huygens-Fresnel s'écrit donc :

$$A_M = K' \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} A_S e^{-\frac{2i\pi}{\lambda}(\frac{xX}{D} - \frac{yY}{D})} dx dy$$

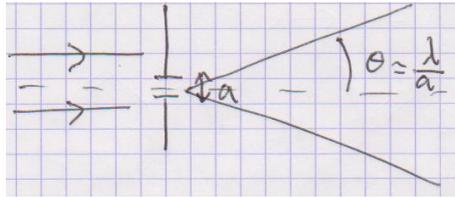
$$I_M = |A_M|^2 \propto \text{sinc}^2\left(\frac{\pi a}{\lambda} \times \frac{X}{D}\right) \times \text{sinc}^2\left(\frac{\pi b}{\lambda} \times \frac{Y}{D}\right)$$

Expérience : laser vert, fentes de différentes largeurs (avec leur complémentaires), écran. On montre la dépendance de la figure de diffraction en $\frac{\lambda}{b}$. Avec des fentes plus fines, la figure de diffraction s'étale. Les petits détails correspondent donc à des ordres de la figure de diffraction éloignés de l'image de l'optique géométrique.

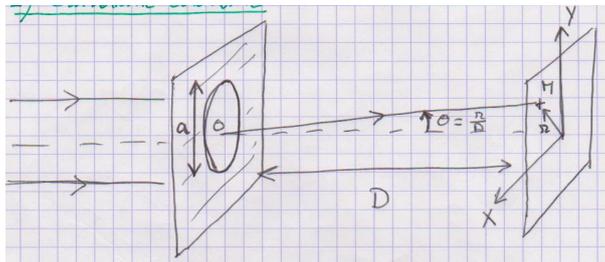


Remarque : Attention : figures et calculs pour une fente rectangulaire mais manip pour une fente fine... Il faut présenter ce qu'on illustre (faire tendre a vers 0). Signaler, voir écrire au tableau, que la figure de diffraction est perpendiculaire à la direction de la fente. Faire apparaître clairement par un paragraphe ou du moins l'écrire au tableau que la figure de diffraction est centrée autour de l'image de l'optique géométrique.

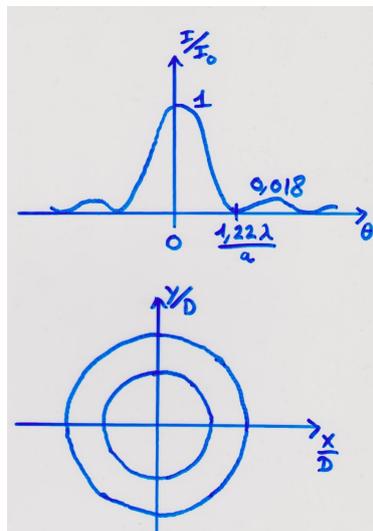
cône de Diffraction :



2.2 Ouverture circulaire

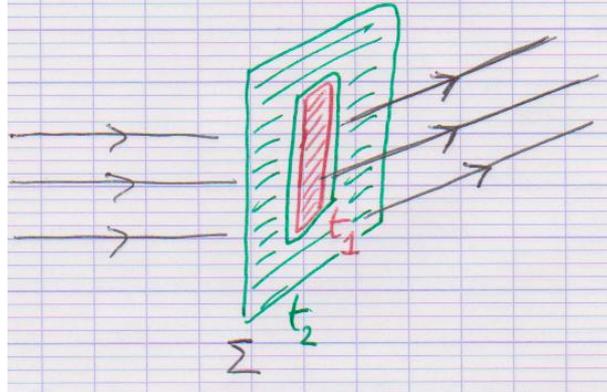


La symétrie de révolution autour de l'axe z nous permet de passer en coordonnées polaires.



La figure de diffraction a au moins les mêmes symétries que l'objet diffractant.

2.3 Théorème de Babinet



$$t_1 + t_2 = 1$$

En dehors de l'optique géométrique, on a : $I_M = 0 \Rightarrow A_M = 0$

$$\int_{d\Sigma} (t_1 + t_2) A_S e^{-\frac{2i\pi}{\lambda}(\vec{u}_t - \vec{u}_i) \cdot \vec{OP}} d\Sigma = 0$$

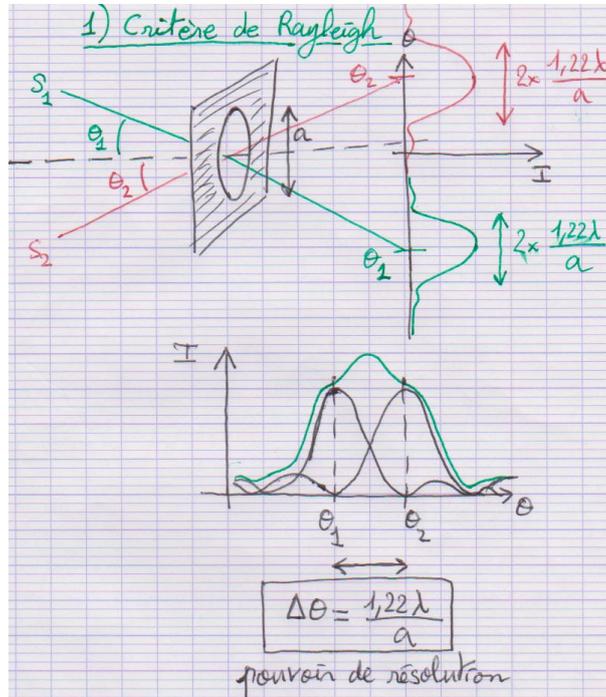
$$\int_{d\Sigma} t_1 A_S e^{-\frac{2i\pi}{\lambda}(\vec{u}_t - \vec{u}_i) \cdot \vec{OP}} d\Sigma + \int_{d\Sigma} t_2 A_S e^{-\frac{2i\pi}{\lambda}(\vec{u}_t - \vec{u}_i) \cdot \vec{OP}} d\Sigma = 0$$

$$A_{t_1} = -A_{t_2} \Rightarrow I_{t_1} = I_{t_2}$$

Expérience : laser vert, complémentaire des fentes du II.2., écran.

3 Application aux instruments d'optique

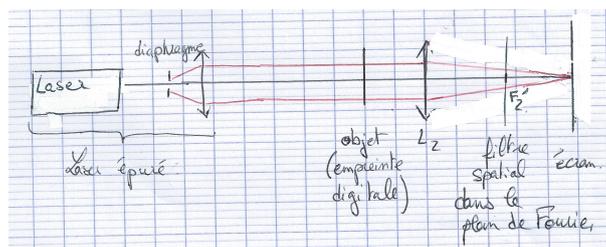
3.1 Critère de Rayleigh



définition du pouvoir de résolution de l'instrument optique.

Calcul du pouvoir de résolution de l'œil : $a = 2 \text{ mm}$ et $\lambda = 600 \text{ nm} \Rightarrow \Delta\theta \approx 1'$ Soit si $D = 3 \text{ m}$, $D \cdot \Delta\theta = 1 \text{ mm}$

3.2 Filtrage spatial



Expérience de striescopie : banc optique, laser avec épurateur, doublet de 100 mm, miroir (pour autocollimation), écran que l'on peut mettre sur un pied, grille avec un défaut (pour régler la position de l'écran d'observation, c'est plus simple), fente réglable, objet avec un ruban adhésif sur lequel il y a une empreinte de doigt, crayon à papier bien taillé.

Pour gagner du temps, il vaut mieux faire d'abord un montage de détramage d'une grille puis remplacer la grille par l'objet avec l'empreinte digitale et la fente par le crayon à papier.

On a vu avec les petites fentes que les détails se trouvent loin de l'image géométrique. Ici, on a une empreinte digitale : il y a des objets qui sont assez larges et ont une image proche de l'image géométrique. Ils sont majoritaires et font qu'on ne voit pas bien les détails. On coupe avec le crayon l'image de ces objets et les détails ressortent : on voit apparaître l'empreinte digitale avec un meilleur contraste.

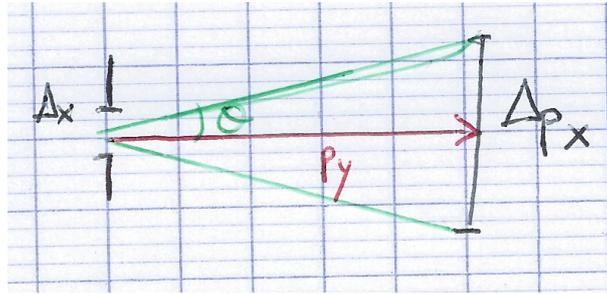
Remarque : Parler de fréquence spatiale et faire une analogie avec l'électronique.

Conclusion

On a vu la diffraction pour les ondes lumineuses. On peut également voir ce phénomène avec des ondes de matières (électrons).

Questions

- Définition d'une seconde d'arc.
- Calculez le pouvoir de résolution d'un télescope pour $a = 10$ m. En pratique, qu'est-ce qui limite le pouvoir de résolution ? A quoi sert alors d'augmenter a ? $\Delta\theta \approx 210^{-2}''$ Les turbulences de l'atmosphère limitent le pouvoir de résolution des instruments. Augmenter a sert à augmenter la luminosité.
- Comment se débarrasser des turbulences de l'atmosphère ? optique adaptative.
- Pouvez-vous en dire plus sur les symétries des figures de diffraction ? La figure de diffraction a plus de symétrie que l'objet diffractant car $I = |A|^2$ pour un objet où la transmittance est réelle.
- Est-ce qu'à partir de la figure de diffraction on peut revenir à l'objet diffractant ? Oui, si on a les phases.
- Est ce qu'on a les phases ? Comment les avoir ? holographie
- Peut-on faire mieux comme pouvoir de résolution ? oui, en observant près de l'objet diffractant.
- Existe-t-il un autre type de diffraction ? Différence ? diffraction de Fresnel avec approximation paraxiale et longueur d'onde est la même pour tout l'objet diffractant mais pas $\frac{a^2}{\lambda D} \ll 1$
- Vous nous avez parlé du filtrage passe haut pour la strioscopie. N'y a-t-il pas un autre type de filtrage sur la table ? filtrage passe bas avec l'épurateur du laser. La lentille sur l'épurateur place la plan de Fourier de la figure de diffraction dans le plan du diaphragme. Le diaphragme coupe les hautes fréquences du laser.
- Connaissez-vous la notion d'apodisation ? on coupe les pieds du *sinc*.
- Si on a N ouvertures circulaires réparties aléatoirement, ça change quoi à votre calcul ? on a les lycopodes. Donc on a toujours un *sinc* avec une tache centrale en $\frac{1.22\lambda*2}{a}$ mais une intensité multipliée par N^2
- interprétation simple de la diffraction des photons ou des électrons ?
 $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{h}{2}$
càd $\Delta p_x \geq \frac{h}{2\Delta x}$
Donc



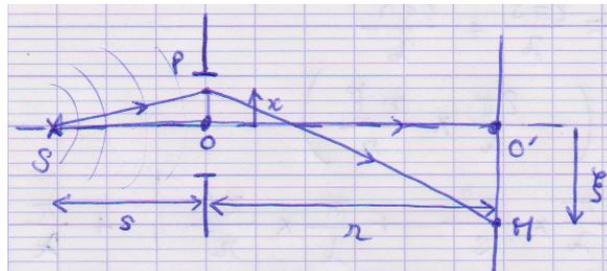
$$\theta \approx \frac{h}{2\Delta x p}$$

$$\text{D'où } \theta \approx \frac{\lambda}{2\Delta x} \approx \frac{\lambda}{a}$$

Commentaires

- oubli dans les approximations de Fraunhofer de l'approximation paraxiale et de $\lambda \ll a$
- il manque le point important que la figure de diffraction est centrée autour de l'image géométrique.

figure de diffraction autour de l'image géométrique (d'après le Sextant) Calculons le terme de phase dans l'intégrale du calcul de la figure de diffraction d'après le principe de Huygens-Fresnel.



$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} ((SP) + (PM)) \quad (5)$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{s^2 + x^2} + \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{r^2 + (x - \xi)^2} \quad (6)$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda} s \sqrt{1 + \left(\frac{x}{s}\right)^2} + \frac{2\pi}{\lambda} r \sqrt{1 + \left(\frac{x - \xi}{r}\right)^2} \quad (7)$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda} s \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{s}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{x}{s}\right)^4\right) + \frac{2\pi}{\lambda} r \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x - \xi}{r}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{x - \xi}{r}\right)^4\right) \quad (8)$$

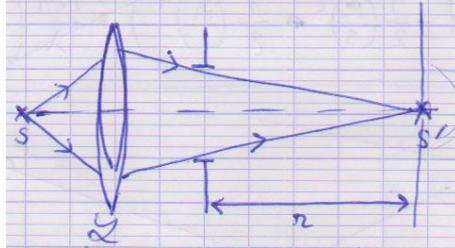
$$\phi = \frac{2\pi s}{\lambda} + \frac{2\pi r}{\lambda} - \frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{x\xi}{r} \text{ diffraction de Fraunhofer} \quad (9)$$

$$+\frac{\pi x^2}{\lambda s} + \frac{\pi x^2}{\lambda r} - \frac{\pi x^4}{4\lambda s^3} - \frac{\pi x^4}{4\lambda r^3} \text{ termes qui s'annuleront après} \quad (10)$$

$$-\frac{\pi x^2 \xi^2}{2\lambda r^3} \text{ terme qui restera} \quad (11)$$

$$+\frac{\pi \xi^2}{\lambda r} - \frac{\pi \xi^4}{4\lambda r^3} \text{ termes constants dans l'intégrale qui est sur } x \quad (12)$$

$$(13)$$



Si la lentille est supposé sans aberrations alors la source S et la lentille L sont équivalentes à une source fictive S' conjuguée par la lentille avec la source S. La figure de diffraction de la source fictive S' dans son plan est telle que pour le calcul ci-dessus $r = -s$.

$$\phi = \frac{2\pi s}{\lambda} + \frac{2\pi r}{\lambda} - \frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{x\xi}{r} - \frac{\pi x^2 \xi^2}{2\lambda r^3} \quad (14)$$

La nouvelle condition c'est $\frac{x^2 \xi^2}{4\lambda r^3} \ll 1$ pour $\lambda \approx 0.5\mu\text{m}$, $r \approx 1\text{m}$, et $x \approx 1\text{cm}$ on a $\xi \ll 14\text{cm}$

- Dans l'approximation de Fraunhofer, on se limite à des termes de phase linéaires car les termes d'ordre 2 correspondent à la courbure des fronts d'onde. On dit diffraction à l'infini parce qu'on néglige les courbures.
- Constituer l'expression mathématique en même temps qu'on énonce le principe de Huygens-Fresnel. Cela permet de faire le parallèle entre les deux.
- Le théorème de Babinet n'est pas fondamental. Il est possible de s'en passer pour gagner du temps, notamment pour l'image de diffraction centrée autour de l'image géométrique.
- Faire une autre application au critère de Rayleigh en plus de l'œil. Par exemple le télescope.
- sur le filtrage, il est difficile d'en dire plus par manque de temps (dur d'aller plus vite...) mais aussi parce qu'on a décidé de s'adresser à une classe préparatoire.

Bibliographie

- SEXTANT
- J-P.FAROUX, J.RENAULT, *Optique 1ière et 2ième années MP PC*, édition Dunod. Le plus utilisé pour ce que nous avons présenté.
- P.BRENDERS, M.SAUZEIX, *Optique MP-PC-PSI-PT*, édition Les Nouveaux Précis Bréal. Énoncé du principe de Huygens-Fresnel et résultat des figures de diffraction simple facile à trouver.
- J-M.BRÉBEC, ..., *Optique ondulatoire 2ième année*, édition Hachette Supérieur. Donne des ordres de grandeur pour le pouvoir de résolution de l'œil et d'instrument d'optique page 188.

– R.-J.CHAMPEAU, R.CARPENTIER, I.LORGERÉ, *Ondes lumineuses : Propagation, optique de Fourier, cohérence*, édition de boeck. Si on veut aller plus loin.

Dates

Huygens (1629-1695) Il propose en 1690 une théorie ondulatoire de la lumière pour expliquer les phénomènes de réfraction et de réflexion.

Fresnel (1788-1826) Il développe la théorie ondulatoire de la lumière et explique les phénomènes d'interférences et de diffraction. Énoncé du principe en 1815.

Fraunhofer (1787-1826) Il travaille sur les premier réseau de diffraction.

Matériel

- Laser vert parce qu'on le voit mieux quand la lumière est allumé qu'un rouge
- point de poisson : bille de l'ordre du millimètre de diamètre, comme une bille de stylo
- doublet de 100
- objet avec 7 fentes et 7 fils correspondants de $200\mu\text{m}$ à plus petit
- 4 pieds
- écran pour projeter
- flexcam
- écran de flexcam
- 1 banc d'optique
- 7 pieds pour banc d'optique, dont deux plus bas que les autres pour le laser avec épurateur
- laser avec épurateur
- miroir
- écran que l'on peut mettre sur un pied
- grille avec un défaut
- fente réglable
- objet avec un ruban adhésif sur lequel il y a une empreinte de doigt
- crayon à papier bien taillé