

LP 36 II) Notion de cohérence

Jusqu'à présent, nous avons considéré une source primaire S ponctuelle et monochromatique. Mais quand on réalise une expérience d'interférences, on remarque généralement que le contraste est inférieur à 1.

Nous avons établi dans notre première partie que l'intensité résultante pouvait s'écrire : $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \phi$
avec $\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta$.

Maintenant, nous allons envisager des variations de ϕ , il y a 2 possibilités.

en un point M

* $\Delta\phi = 2\pi \cdot \frac{\Delta\nu}{c} \cdot \delta$ \Rightarrow la source primaire n'est pas rigoureusement monochromatique
 \Rightarrow la source n'est pas cohérente temporellement.

en un point M

* $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta\delta$ \Rightarrow la source primaire n'est pas rigoureusement ponctuelle
 \Rightarrow la source n'est pas cohérente spatialement.

On admet comme critère de cohérence : $\Delta\phi \ll 2\pi$

C'est à dire qu'en un point M , ϕ varie de $\Delta\phi$ tout en gardant un contraste acceptable ($c > \frac{1}{2}$)

1) Cohérence temporelle (on considère une source ponctuelle)

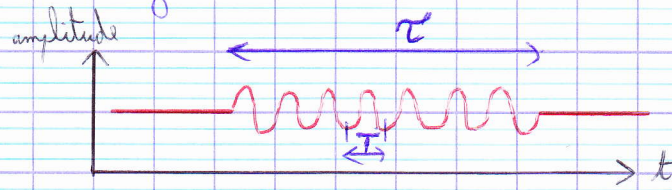
\Rightarrow La cohérence temporelle est liée à la finesse spectrale de la raie.

* Vision temporelle

L'onde monochromatique est un modèle. En effet, il ne peut exister de signal d'extension temporelle infinie.

Lors de sa désexcitation, un atome va émettre un train d'onde.

Un train d'onde peut être vu comme la superposition d'un très grand nombre de sinusoïdes de durée finie, valant en moyenne τ .



ODG: lampe spectrale: $\tau = 10^{-11}$ s | $T = 10^{-14}$ s
 laser de TP: $\tau = 10^{-8}$ s

⇒ très grand nombre de sinusoïdes dans un train d'onde

On montre que pour un train d'onde d'extension temporelle τ et d'extension fréquentielle $\Delta\nu$ (autour de ν_0), on a la relation:

$$\tau \cdot \Delta\nu \approx 1$$

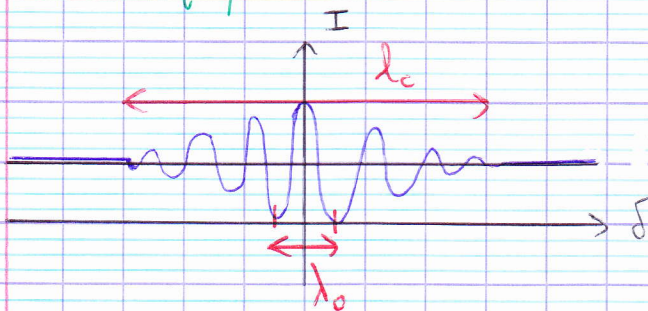
On définit alors la longueur de cohérence temporelle: $l_c = c \cdot \tau$, qui s'interprète alors comme la longueur d'un train d'onde.

D'après le critère de cohérence: $\Delta\phi = 2\pi \Delta\nu \frac{\delta}{c} \ll 2\pi$
 $\delta \ll \frac{c}{\Delta\nu} = c\tau$

$$\delta \ll l_c$$

ODG: lampe blanche^{+filtre}: $l_c \sim \mu\text{m}$
 lampe spectrale: $l_c \sim \text{mm}$
 laser de TP: $l_c \sim \text{qq mètres}$

* Vision fréquentielle



Ainsi le nombre N de franges visibles sur un interférogramme est :

$$N = \frac{l_c}{\lambda_0} = \frac{c\tau}{c/\nu_0} = \nu_0 \tau$$

$$N = \frac{\nu_0}{\Delta\nu} \Rightarrow \text{c'est la finesse de la raie}$$

ODG :	lampe blanche ^{+ filtre}	$N \sim 100$ franges
	lampe spectrale	$N \sim 1000$ franges
	laser de TP	$N \sim 1000000$ franges

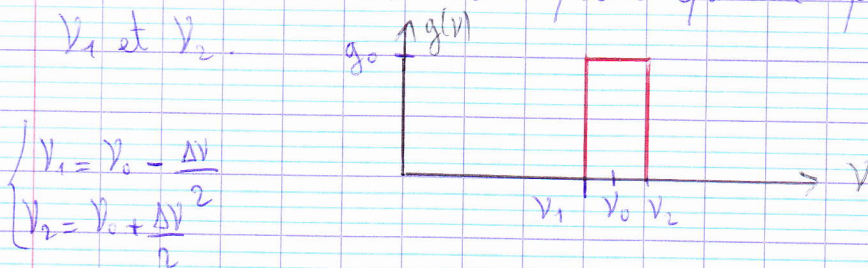
* Profil spectral rectangulaire

Une raie n'est jamais purement monochromatique, à cause de l'effet Doppler, des collisions, ou de la longueur naturelle d'origine quantique.

L'intensité $dI_s(\nu)$ délivrée par la source entre ν et $\nu+d\nu$ s'écrit :

$$dI_s(\nu) = g(\nu) d\nu \quad \text{où } g(\nu) \text{ est le profil spectral de la source}$$

La forme exacte de $g(\nu)$ dépend de la nature de la source, mais nous le modéliserons dans cette partie par un profil rectangulaire entre ν_1 et ν_2 .



Les différentes fréquences de la source étant incohérentes, nous sommerons leurs intensités sur l'écran.

$$I(M) = \int_0^{+\infty} 2 g(\nu) \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{c} \nu\right) \right] d\nu$$

$$I(M) = \int_{\nu_1}^{\nu_2} 2 g_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{c} \nu\right) \right] d\nu$$

$$I(M) = 2g_0 \left(\nu_2 - \nu_1 + \frac{\sin\left(\frac{2\pi\delta}{c} \nu_2\right) - \sin\left(\frac{2\pi\delta}{c} \nu_1\right)}{\frac{2\pi\delta}{c}} \right)$$

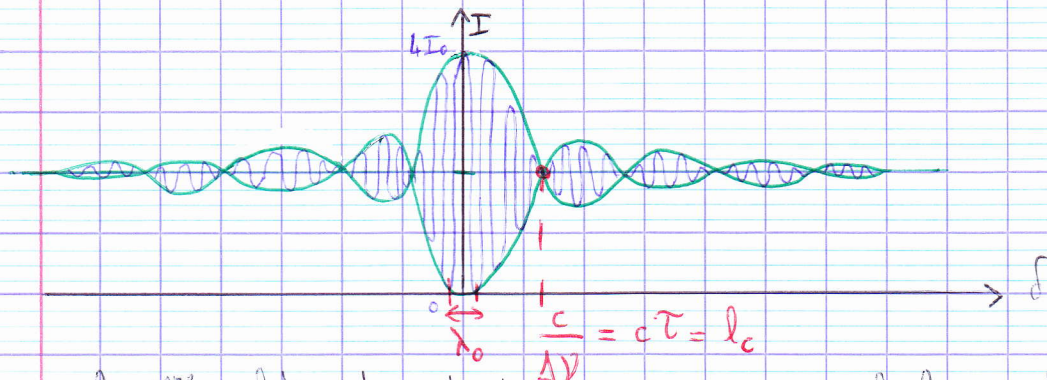
$$\sin(p) - \sin(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$I(M) = 2 I_0 \left(\Delta V + 2 \times \frac{c}{2\pi\delta} \sin\left(\frac{\pi\delta}{c} (\nu_2 - \nu_1)\right) \cos\left(\frac{\pi\delta}{c} (\nu_2 + \nu_1)\right) \right)$$

$$I(M) = 2 I_0 \Delta V \left(1 + \frac{c}{\pi\delta\Delta V} \sin\left(\frac{\pi\delta\Delta V}{c}\right) \cos\left(\frac{2\pi\nu_0\delta}{c}\right) \right)$$

$$I(M) = 2 I_0 \left(1 + \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi\Delta V\delta}{c}\right) \cos\left(\frac{2\pi\nu_0}{c}\delta\right) \right)$$

Par identification : $C = \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi\Delta V\delta}{c}\right)$



⇒ la 1^{ère} annulation du contraste nous renseigne sur la longueur de cohérence de la source.

* Profil à 2 raies très proches

Dans cette partie, nous allons modéliser le spectre de la lampe à vapeur de sodium par 2 raies infiniment fines à $\lambda_1 = 589,0 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = 589,6 \text{ nm}$.

On a : $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 \ll \lambda_1, \lambda_2$; $\lambda_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$

Les ondes correspondant à deux longueurs d'onde différentes n'interfèrent pas : elles sont incohérentes. L'intensité totale observée sur l'écran est la somme des intensités correspondant à chaque longueur d'onde présente.

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) = 2I_{01} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_1} \delta\right)\right) + 2I_{02} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_2} \delta\right)\right)$$

$$I(M) = 2I_0 \left(2 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_1} \delta\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_2} \delta\right)\right)$$

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

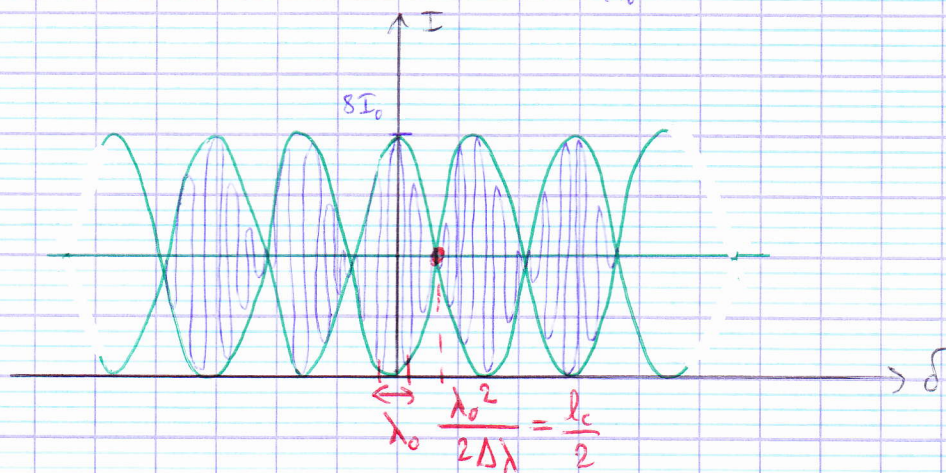
$$I(M) = 2 I_0 \left(2 + 2 \cos\left(\pi \delta \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\right) \cos\left(\pi \delta \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)\right)\right)$$

$$\text{or, } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2} \approx \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \\ \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2} \approx \frac{2\lambda_0}{\lambda_0^2} = \frac{2}{\lambda_0} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2} \approx \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \\ \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2} \approx \frac{2\lambda_0}{\lambda_0^2} = \frac{2}{\lambda_0} \end{array} \right.$$

$$I(M) = 4I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{\pi \Delta\lambda}{\lambda_0^2} \delta\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta\right)\right)$$

Par identification: $C = \cos\left(\frac{\pi \Delta\lambda}{\lambda_0^2} \delta\right)$



⇒ résolution du doublet du sodium

1^{er} annulation du contraste: $\delta = \frac{\lambda_0^2}{2\Delta\lambda} = 2e$

on sait de combien on a changé (de e), on en déduit: $\Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{4e}$

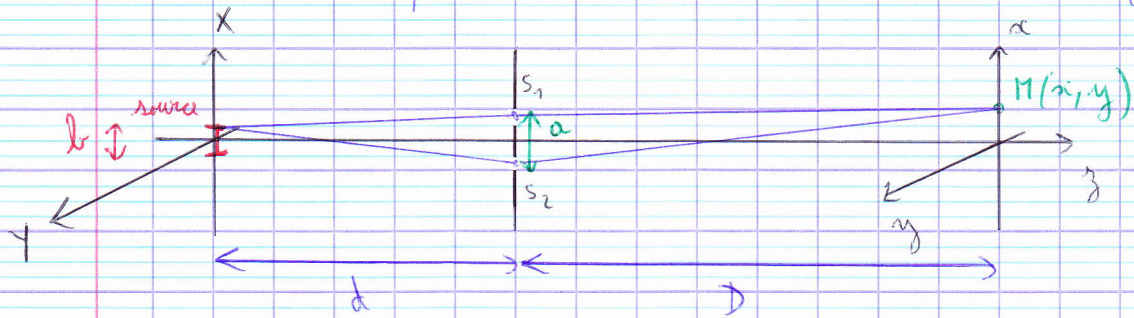
puissance de résolution: $R = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda}$

2) Coherence spatiale (on considère une source monochromatique)

⇒ La coherence spatiale est liée à l'étendue géométrique de la source

Considérons le dispositif des trous d'Young.

Pour une source ponctuelle nous avons: $I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{D}\right) \right)$



D'après l'expression de la différence de marche (δ indépendant de y), on voit qu'étendre la source suivant (OY) n'influencera pas le contraste.

On considère une source étendue entre $+\frac{b}{2}$ et $-\frac{b}{2}$ suivant (OX) .

Soit $P(X, Y)$ un point de la source.

On montre que: $\delta = \frac{ax}{D} + \frac{aX}{d}$

L'intensité totale est la somme des intensités des sources P , incohérentes entre elles.

$$I(M) = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dI_P(M) = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{ax}{D} + \frac{aX}{d}\right)\right) \right) \frac{dX}{b}$$

$$I(M) = 2 \frac{I_0}{b} \left(b + \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{ax}{D} + \frac{ab}{2d}\right)\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{ax}{D} - \frac{ab}{2d}\right)\right)}{\frac{2\pi}{\lambda} \frac{a}{d}} \right)$$

$$\text{or, } \sin(p) - \sin(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$I(M) = 2I_0 \left(1 + \frac{\lambda d}{2\pi ab} \times 2 \times \sin\left(\frac{\pi ab}{\lambda d}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{D}\right) \right)$$

$$I(M) = 2I_0 \left(1 + \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi ab}{\lambda d}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{D}\right) \right)$$

Par identification $C = \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi ab}{\lambda d}\right)$

Il y a bruissement (contraste très faible) lorsque $\frac{\pi ab}{\lambda d} \gg \pi$

ce qui donne comme condition de cohérence: $\frac{ab}{\lambda d} \ll 1$

⚠ On est parti d'une source primaire totalement incohérente spatialement, et on arrive à un critère de cohérence spatiale sur les deux sources secondaires.

Lorsque les sources secondaires S_1 et S_2 sont dans le cône d'ouverture $\frac{\lambda}{b}$, elles sont cohérentes spatialement.

AN: $d = 50 \text{ cm}$, $a = 1 \text{ mm}$, $\lambda = 500 \text{ nm}$
 $\Rightarrow l_s = \frac{\lambda d}{a} = 25 \mu\text{m}$

Pour ne pas avoir de bruissement, il faudrait $b \ll l_s = 25 \mu\text{m}$! très petit

* Annexe: Michelson

en lame d'air \Rightarrow interférences ^{localisées} à l'infini \Rightarrow cohérence spatiale infinie
 en coin d'air \Rightarrow interférences localisées sur les miroirs \Rightarrow cohérence spatiale finie

Conclu

ouverture \rightarrow interférences à N ondes - réseau (division du front d'onde)
 - Talbot-Pérot (division d'amplitude)