

LP-30 présentation de l'OCI à l'aide du principe de Fermat.

prerequis - rayon lumineux.
- Les lois de l'OCI.

Intro Nous connaissons déjà les lois de l'OCI. Ces lois ont été obtenues expérimentalement, elles sont bien connues au XVII^es. À cette époque les physiciens (Huygens, Newton, Descartes) s'interroge sur la nature de la lumière. À la même époque Pierre de Fermat, qui est magistrat et mathématicien à Toulouse, propose le principe de moindre temps de parcours. Ce principe sera rebaptisé principe de Fermat et permet, à lui seul, de retrouver toutes les lois de l'OCI sans faire aucune hypothèse quant à la nature de la lumière.

① Principe de Fermat et conséquences immédiates

1) énoncé du principe (1657).

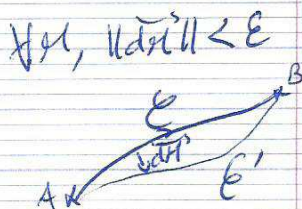
Historique : La lumière se propage d'un point A à un point B en passant par le chemin qui minimise le temps de parcours.

Cet énoncé a dû être modifié pour rester vrai dans certains cas un peu pathologiques.

Modernement la lumière se propage d'un point A à un point B en passant par le chemin qui stationnarise le chemin optique

2) Chemin optique et chemin optique stationnaire

$$L_{AB} = \int_{AB} \frac{dl}{v} = \frac{1}{c} \int_{AB} \frac{c}{v} dl = \frac{1}{c} \int_{AB} n dl = \frac{L_{AB}}{c}$$



On dit que L_{ϵ} est stationnaire si $|L_{\epsilon} - L_{\epsilon_0}| = 0 + o(\epsilon)$.

A développer à l'oral pour faire comprendre ce que l'on fait (on cherche parmi tous les chemins possible)

3) Conséquences immédiates

→ principe de retour inverse de la lumière.

$$\left. \begin{aligned} L_{AB} &= \int_{\epsilon} n dl \\ L_{BA} &= \int_{\epsilon} n dl = L_{AB} \end{aligned} \right\} \text{ si } L_{AB} \text{ est stationnaire alors } L_{BA} \text{ aussi}$$

donc le ~~chemin~~ chemin suivi par la lumière ne dépend pas de son sens de propagation.

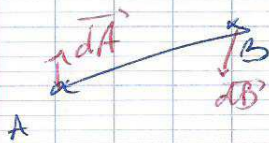
→ propagation rectiligne dans un milieu homogène.

$$L_{AB} = \int_{AB} n dl = n \int_{AB} dl = n \overline{AB}$$

\overline{AB} minimum (et donc stationnaire) pour AB

II) Démonstration des lois de l'OC2 à partir du principe de Fermat.

1) Lemme mathématique utile.

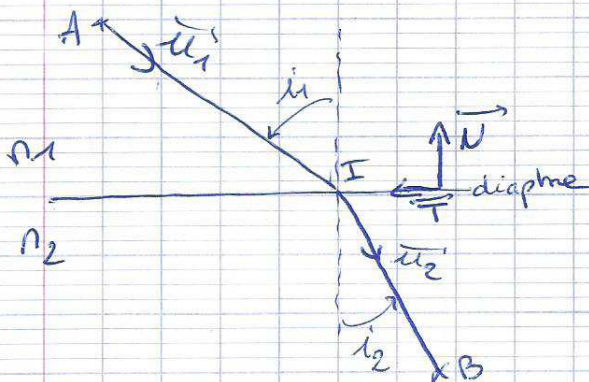


$$AB = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AB}}{\|\overline{AB}\|^2} = \vec{u} \cdot \overline{AB}$$

$$\begin{aligned} dAB &= d\vec{u} \cdot \overline{AB} + \vec{u} \cdot d\overline{AB} \\ &= \|\overline{AB}\| \left(\vec{u} \cdot d\vec{u} + \vec{u} \cdot (d\overline{B} - d\overline{A}) \right) \\ &\quad \frac{1}{2} d(\vec{u}^2) \end{aligned}$$

$$dAB = \vec{u} \cdot (d\overline{B} - d\overline{A})$$

2) Les lois de Snell-Descartes.



$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{AB} &= \mathcal{L}_{AI} + \mathcal{L}_{IB} \\ &= n_1 AI + n_2 IB \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_{AB} &= n_1 \vec{u}_1 \cdot (d\overline{I} - d\overline{A}) \\ &\quad + n_2 \vec{u}_2 \cdot (d\overline{B} - d\overline{I}) \\ 0 &= (n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2) \cdot \underbrace{d\overline{I}}_{\in \text{diaphrane}} \end{aligned}$$

donc $\boxed{n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2 = \alpha \vec{N}} \quad (1)$

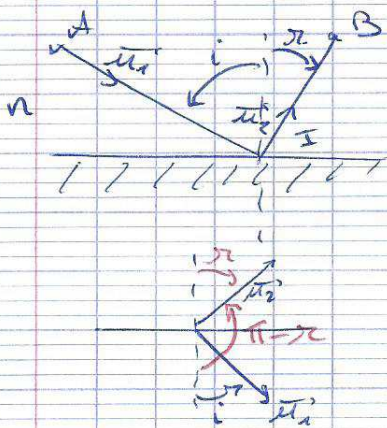
Remq $\vec{u}_2 = \frac{n_1}{n_2} \vec{u}_1 - \frac{\alpha}{n_2} \vec{N}$

donc le rayon émergent \in plan incident.

→ La réfraction

(1) $\cdot \vec{T} \rightarrow \boxed{0 = n_1 \sin(i_1) - n_2 \sin(i_2)}$

→ la réflexion



$$\begin{aligned} n \vec{u}_1 - n \vec{u}_2 &= \alpha \vec{N} \\ \vec{u}_1 - \vec{u}_2 &= \alpha' \vec{N}' \end{aligned} \quad \cdot \vec{T}$$

$$\sin(i) - \sin(\pi - r) = 0$$

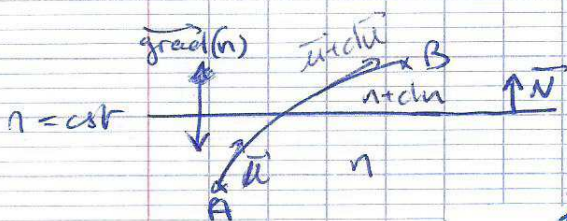
donc $\sin(i) = -\sin(r)$

et comme i et r sont dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

on a : $\boxed{i = -r}$

III) Equation differentielle du rayon lumineux et application aux milieux inhomogenes

1) Equation differentielle du rayon lumineux



$$(n+dn)(\vec{u}+d\vec{u}) - n\vec{u} = n d\vec{u} + \vec{u} dn + \frac{d\vec{u} dn}{\text{ordre 2}} = d(n\vec{u})$$

$$d(n\vec{u}) = \alpha \vec{N} = \alpha' \text{grad}(n)$$

$$\vec{u} \equiv \frac{d\vec{r}}{ds} \quad \text{et} \quad \text{grad}(f) \cdot d\vec{r} = df$$

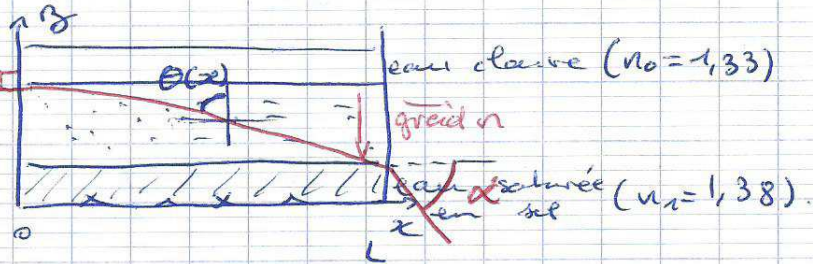
$$\vec{u} \cdot d(n\vec{u}) = dn \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{=1} + n \frac{\vec{u} \cdot d\vec{u}}{= \frac{1}{2} d(u^2) = 0} = dn$$

$$\alpha' \frac{\text{grad}(n) \cdot d\vec{r}}{ds} = \frac{\alpha'}{ds} dn$$

donc $\alpha' = ds$ et alors $\boxed{\frac{d(n\vec{u})}{ds} = \text{grad}(n)}$

e) Application aux milieux inhomogènes.

a) Curve à gradient d'indice



$$PF \cdot \vec{OA} \cdot \vec{ux} \Rightarrow 0 = \frac{d(n\vec{u})}{ds} \cdot \vec{ux} = \frac{d(n\vec{u} \cdot \vec{ux})}{ds}$$

donc $n \sin \theta = \text{cst}$

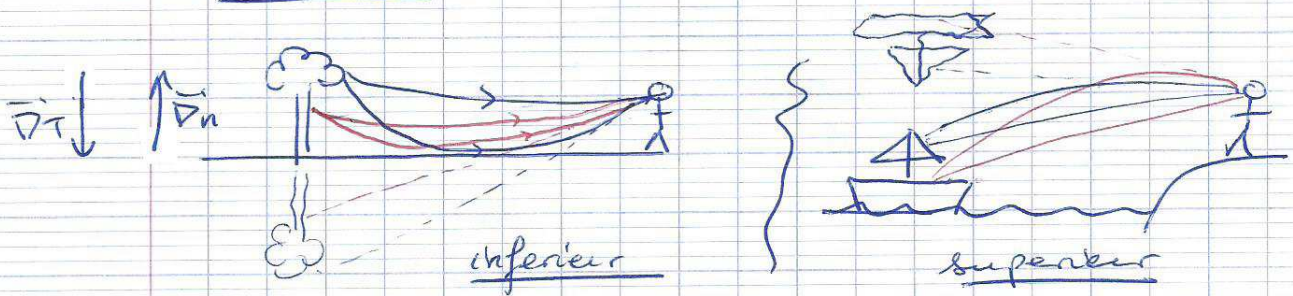
(1) $n_0 \sin(\frac{\pi}{2}) = n_1 \sin(\theta(L))$

(2) $n_0 \sin \alpha = n_1 \cos(\theta(L))$

$(1)^2 + (2)^2 \rightarrow n_1^2 = n_0^2 + \sin^2 \alpha$

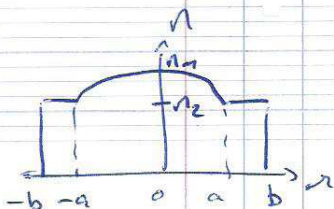
AN donc $\alpha = \arcsin(\sqrt{n_1^2 - n_0^2}) = 21,6^\circ$

b) Mirages.



c) Fibre optique à gradient d'indice.

$$n = n_1 \left(1 - 2\Delta \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)^{1/2} \approx n_1 \left(1 - \frac{r^2}{2a^2}\right)$$



$$\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \ll 1$$

$$p = \frac{a}{\sqrt{2\Delta}} \left(\begin{array}{l} \text{car } a \approx 50 \mu\text{m} \\ \rightarrow p \approx 50 \mu\text{m} \end{array} \right)$$

ODG $n_1 = 1,6$ et $n_2 = 1,51 \rightarrow \Delta \approx 5 \times 10^{-2}$

On se place dans l'approximation de Gauss $\rightarrow \boxed{ds \approx dr}$

$$\text{PFOG} \text{ sur } r: \quad \frac{d}{dr} \left(n \frac{dr}{dt} \right) = \frac{\partial n}{\partial r}$$
$$n \frac{d^2 r}{dr^2} = -n \frac{r}{p^2}$$

linéarisation $\frac{d^2 r}{dr^2} + \frac{r}{p^2} = 0$

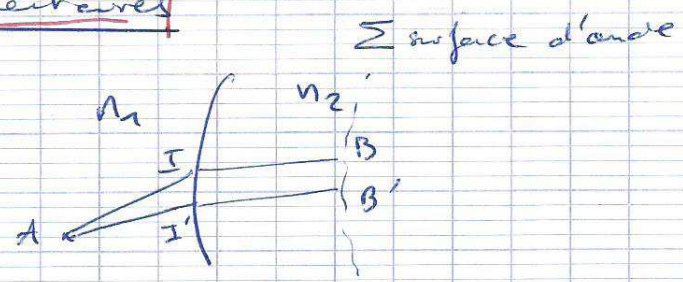
$$\rightarrow \boxed{r = A \cos\left(\frac{r}{p}\right) + B \sin\left(\frac{r}{p}\right)}$$

CCP • On a gagné en généralité puisque l'un seul principe permet de retrouver toute l'OG.

- Permet une étude simple du stigmatisme
- On peut retrouver le Th de Malus Dupin à l'aide du principe de Fermat
- C'est un principe variationnel, comme celui de Héraklès (1744) (ou d'Euler-Lagrange) \rightarrow ça permet des analogies mécanique/optique.
 \rightarrow c'est élégant.

Notes supplémentaires

Héles Dupin



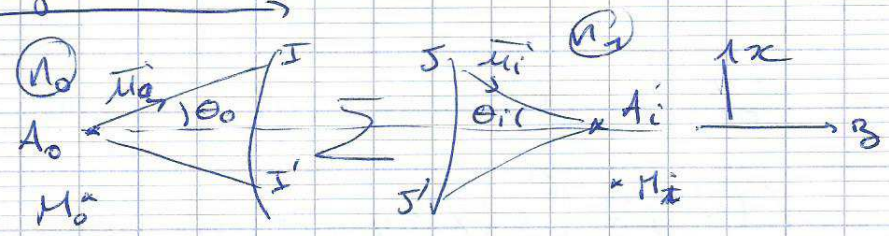
$$\Delta L = [AIB] - [AI'B'] = 0$$

$$\Delta L = n_1 \vec{u}_1 (\overrightarrow{\Delta I} - \overrightarrow{\Delta A}) + n_2 \vec{u}_2 (\overrightarrow{\Delta B} - \overrightarrow{\Delta I})$$

$$= \underbrace{(n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2)}_{\propto \vec{N}' (\perp \Delta I)} \overrightarrow{\Delta I} + n_2 \vec{u}_2 \overrightarrow{\Delta B}$$

$$0 = n_2 \vec{u}_2 \cdot \overrightarrow{\Delta B} \Rightarrow \boxed{\Sigma \perp \vec{u}_2}$$

Stigmatisme



$$[A_0 A_i] = \text{cv} \quad (-A \text{ et } A' \text{ conjugués} = \text{stigmatiques})$$

$$[A_0 A_i] = n_0 \overrightarrow{A_0 I} + [\overrightarrow{I I'}] + n_2 \overrightarrow{I' A_i} = \text{cv}$$

Rng grandeurs algébrique pour prendre en compte les objets et images virtuelles.

si on prend M_0 et M_i conjugués $[M_0 M_i] = \text{cv}$.

$$[M_0 M_i] = [A_0 A_i] + n_0 \vec{u}_0 \cdot \overrightarrow{A_0 M_0} + n_i \vec{u}_i \cdot \overrightarrow{A_i M_i}$$

$$\Rightarrow n_0 \vec{u}_0 \cdot \overrightarrow{A_0 M_0} + n_i \vec{u}_i \cdot \overrightarrow{A_i M_i} = \text{cv}$$

→ M_0 et M_i dans le plan \perp (Applanche).

$$+ \theta_0 = \theta_i = 0 \rightarrow \frac{n_0 \sin \theta_0 \times \overline{A_0 M_0}}{1} = n_i \sin \theta_i \overline{A_i M_i}$$

condition des sinus d'Abbe.

→ M_0 et M_i sur axe optique.

$$n_0 \cos \theta_0 \overline{A_0 M_0} = n_i \cos \theta_i \overline{A_i M_i} = \text{err} = K$$

$$\theta_0 = \theta_i = 0 \Rightarrow n_0 \overline{A_0 M_0} = n_i \overline{A_i M_i} = K.$$

$$\Rightarrow \frac{n_0 \overline{A_0 M_0} \sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right)}{1} = \frac{n_i \overline{A_i M_i} \sin^2 \left(\frac{\theta_i}{2} \right)}{1}$$

condition de Herschel.

fonctionnelle stationnaire

$$\left(\dot{} = \frac{d}{ds} \right) \mathcal{L}(\mathcal{C}) = \int_{s_0}^{s_1} F(x, \dot{x}, s) ds.$$

$$\mathcal{C}_\epsilon = X(s) + \epsilon \eta(s) \quad (\eta(s_0) = \eta(s_1) = 0).$$

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}_\epsilon) = \int_{s_0}^{s_1} F(x + \epsilon \eta, \dot{x} + \epsilon \dot{\eta}, s) ds$$

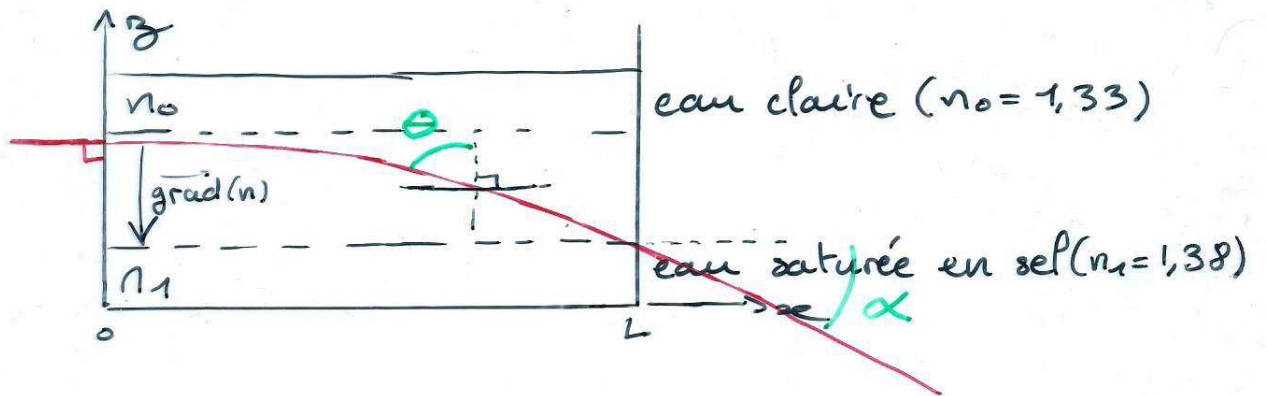
$$\mathcal{L} \text{ stationnaire si } \delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}(\mathcal{C}_\epsilon)}{\partial \epsilon} (\epsilon=0) = 0 = \int_{s_0}^{s_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \eta(s) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{\eta}(s) \right) ds$$

$$0 = \int_{s_0}^{s_1} \frac{\partial F}{\partial x} \eta(s) ds + \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \eta \right]_{s_0}^{s_1} - \int_{s_0}^{s_1} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \eta(s) ds.$$

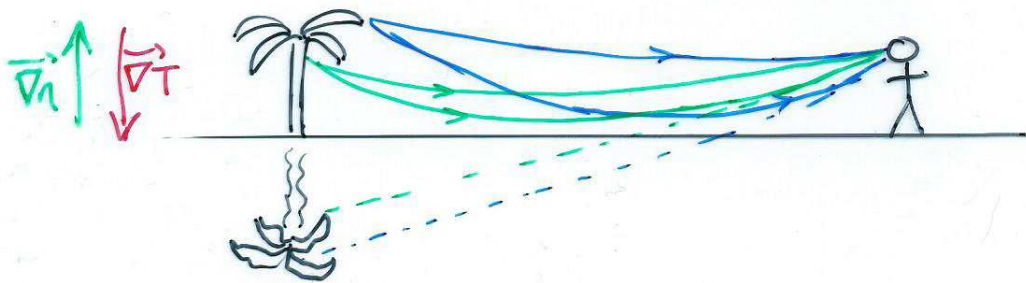
$$0 = \int_{s_0}^{s_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \right) \eta(s) ds \quad \forall \eta$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0.$$

Cuve à gradient d'indice



Mirage inférieur



Mirage supérieur

