

LP31 : Présentation de l'optique géométrique à l'aide du principe de Fermat

Elie SEZESTRE, Marc-Antoine MARTINOD Correcteur : S. JURINE

04/12/2013

Niveau L1

Prérequis :

- Optique géométrique de lycée
- Notion de chemin optique
- Opérateur gradient
- Surface d'onde

Introduction

Il existe de nombreuses lois en optique géométrique, au contraire d'autres domaines de la physique où par exemple le principe fondamental de la dynamique permet de résoudre la plupart des problèmes. Nous allons voir qu'il existe en optique géométrique un principe général qui va nous permettre de redémontrer toutes les lois que l'on connaît.

1 Une approche historique

1.1 Les lois de Snell-Descartes

En 1637, Descartes énonce ses lois de l'optique géométrique, démontrée en 1621 par Snell. Il énonce ce que l'on connaît aujourd'hui comme la seconde loi de Descartes de la réfraction sous la forme suivante :

A la traversée d'une surface, on constate que le rapport des sinus des angles est constant.

Cet énoncé est juste au regard de nos lois actuelles, cependant si Descartes avait continué sur son raisonnement basé sur une analogie avec les ondes sonores, il en serait arrivé à une égalité fautive : $\frac{\sin(i_1)}{n_1} = \frac{\sin(i_2)}{n_2}$. En effet, il considère que la lumière se propage plus vite dans un milieu plus dense.

1.2 L'énoncé de Fermat

Fermat perçoit les défauts du raisonnement de Descartes et il souhaite faire ressortir un principe plus général, qui permettrait de prédire le trajet de la lumière dans des cas plus nombreux. En 1662, il énonce son principe :

Toute chose étant faites, la nature agit par les voies le plus courtes.

Il introduit ainsi la notion de temps de parcours. Le défaut de cet énoncé, qui a souvent été attaqué notamment par les cartésiens, est qu'il semble introduire une finalité dans la physique, et que le rayon lumineux "sait" déjà quel chemin il doit suivre.

1.3 Énoncé moderne

Entre 2 points A et B, le trajet suivi par un rayon lumineux correspond à un chemin optique stationnaire.

La stationnarité impose que pour un chemin optique effectif L , si on fait varier ce chemin continuellement de $\delta\vec{M}$, dL varie en ordre 2 ou plus en $\|\delta\vec{M}\|_{max}$.

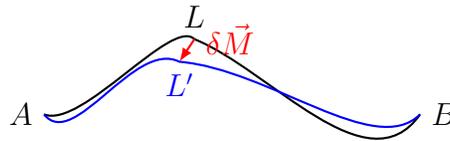


Figure 1 – Exemple de chemin optique

2 Démonstration des lois de l'optique géométrique à l'aide du principe de Fermat

Dans cette section, sauf indication contraire, on se placera dans un milieu homogène.

2.1 Retour inverse

$$\int_A^B n ds = \int_B^A n ds' \quad (1)$$

Si le trajet $A \rightarrow B$ est stationnaire, alors il en est de même pour le trajet $B \rightarrow A$. La lumière emprunte donc le même trajet à l'aller et au retour.

2.2 Propagation en ligne droite

Dans un milieu homogène, l'indice ne dépend pas de la position donc on peut le faire sortir de l'intégrale :

$$\int_A^B n ds = n \int_A^B ds = n AB \quad (2)$$

En géométrie euclidienne, le parcours qui rend l'intégrale stationnaire est la ligne droite.

2.3 Loi de la réflexion

À l'aide des 2 principes précédents, on peut montrer les lois de la réflexion : le trajet est le même pour un point symétrique par rapport au miroir et c'est une droite car on se propage dans un milieu homogène.

2.4 Loi de Snell-Descartes vectorielle

On démontre d'abord le développement limité du chemin optique :

$$\begin{aligned}
 dL &= d(n \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}) \\
 &= n \vec{u} \cdot d\overrightarrow{AB} + n \overrightarrow{AB} \cdot d\vec{u} \\
 &= n \vec{u} \cdot (d\vec{B} - d\vec{A}) + 0
 \end{aligned} \tag{3}$$

En effet, \vec{u} est un vecteur unitaire, ce qui donne $\vec{u} \cdot \vec{u} = 1$ donc :

$$\begin{aligned}
 d(\vec{u} \cdot \vec{u}) &= 0 \\
 &= 2\vec{u} \cdot d\vec{u}
 \end{aligned}$$

Donc \vec{u} et $d\vec{u}$ sont orthogonaux. Comme \overrightarrow{AB} est porté par \vec{u} , le second terme de l'équation (3) est donc nul.

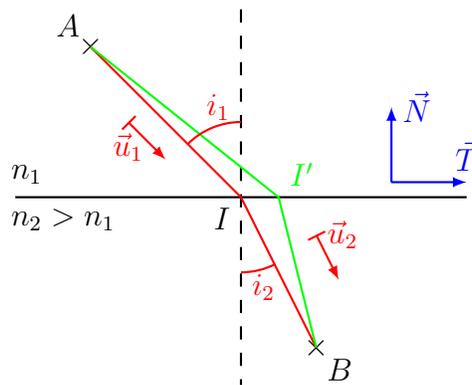


Figure 2 – Schéma de la réfraction

On établit l'équation de Snell-Descartes vectorielle entre 2 points A et B fixes, en faisant varier le point I.

$$\begin{aligned}
 dL &= n_1 \vec{u}_1 \cdot (d\vec{I} - d\vec{A}) + n_2 \vec{u}_2 \cdot (d\vec{B} - d\vec{I}) \\
 &= (n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2) \cdot d\vec{I}
 \end{aligned} \tag{4}$$

2.5 Loi de Malus-Dupin

On se place dans le cas de la figure 3 : un point source A, un dioptre et une surface d'onde à laquelle appartiennent les points B et B'. On maintient A fixe et on fait varier les autres points :

$$\begin{aligned}
 dL &= n_1 \vec{u}_1 \cdot d\vec{I} + n_2 \vec{u}_2 \cdot (d\vec{B} - d\vec{I}) \\
 &= n_2 \vec{u}_2 \cdot d\vec{B}
 \end{aligned} \tag{5}$$

$d\vec{B}$ est contenu dans la surface d'onde donc pour avoir un chemin optique stationnaire, on doit avoir les rayons lumineux orthogonaux à la surface d'onde : c'est la loi de Malus-Dupin.

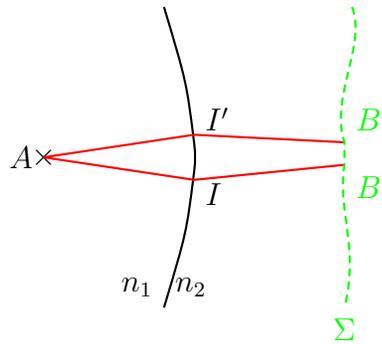


Figure 3 – Schéma du problème

2.6 Loi fondamentale de l'optique géométrique

On se situe maintenant dans un milieu inhomogène. La loi de Snell-Descartes vectorielle peut se réécrire :

$$d(n.\vec{u}) = a.\vec{N} \quad (6)$$

$$dn.\vec{u} + n.d\vec{u} = a'.\overrightarrow{\text{grad}}(n) \quad (7)$$

$$dn = a'.\overrightarrow{\text{grad}}(n).\vec{u} \quad (8)$$

Or on sait que $\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ et que $dn = \overrightarrow{\text{grad}}(n).d\vec{r}$ donc :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(n).d\vec{r} = a'.\overrightarrow{\text{grad}}(n).\frac{d\vec{r}}{ds} \quad (9)$$

Finalement, on trouve que $a' = ds$. D'après les équations (6) et (7), on obtient :

$$\frac{d(n.\vec{u})}{ds} = \overrightarrow{\text{grad}}(n) \quad (10)$$

Cette relation est appelée principe fondamental de l'optique géométrique. On retrouve bien une loi mathématique semblable à la mécanique. Pour cela, on associe l'impulsion à l'indice n et le gradient d'indice à la somme des forces divisée par la vitesse. Cette loi permet de retrouver toutes les formules précédentes.

3 Applications

3.1 Mirages

Maintenant que l'on dispose d'une loi très générale, on va l'appliquer à des phénomènes que l'on ne pouvait pas traiter auparavant, notamment en ce qui concerne les variations d'indice. Notre premier exemple sera le mirage.

Cet effet apparait lorsque une couche d'air est en contact avec un sol qui présente une forte différence de température : air frais au-dessus d'une route chauffée par le soleil, air tiède au-dessus de sols gelés en Sibérie... Cette différence de température va entraîner une variation forte de l'indice de l'air. On découpe donc l'atmosphère en couches horizontales d'indices différents.

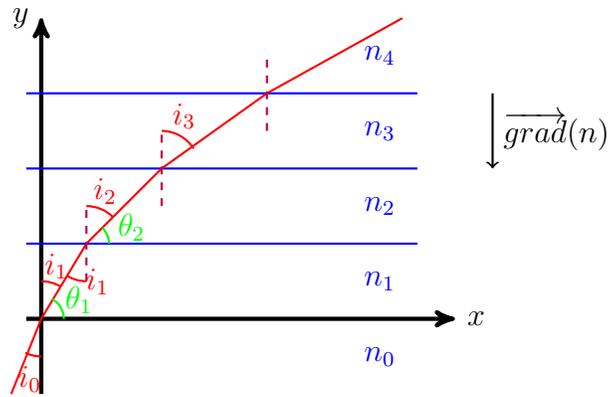


Figure 4 – Schéma du problème

Ici $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + y'^2}$. On applique le principe fondamentale de l'optique géométrique, projeté selon \vec{u}_y :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} \frac{d}{dx} \left(n \frac{dy}{\sqrt{1 + y'^2} dx} \right) = \frac{dn}{dy} \quad (11)$$

On pose $a = n \sin i$, quantité constante dans tous les milieux. On a donc :

$$a = n \cos \theta \quad (12)$$

$$= \frac{n}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} \quad (13)$$

$$= \frac{n}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad (14)$$

On inverse cette relation et on obtient $y' = \pm \sqrt{\frac{n^2}{a^2} - 1}$. On peut alors séparer les variables et obtenir l'équation de propagation en intégrant :

$$x - x_A = \pm \int_{y_A}^y \frac{dy}{\sqrt{\frac{n^2}{a^2} - 1}} \quad (15)$$

On voit que y' peut s'annuler et changer de signe, donc les rayons lumineux vont changer de sens de propagation selon l'axe vertical. C'est ce changement de signe qui est à l'origine des mirages. Dans le cas d'un mirage supérieur, ce sont donc des rayons provenant du ciel qui vont nous arriver selon un angle correspondant au sol.

Notre cerveau, étant habitué à une propagation rectiligne de la lumière, va considérer que l'on observe bien le sol. On voit donc l'image du ciel au sol, d'où cet effet d'eau et de réflexion. Le même principe est à l'œuvre pour les mirages inférieurs où l'on peut voir des bateaux voguer dans le ciel.

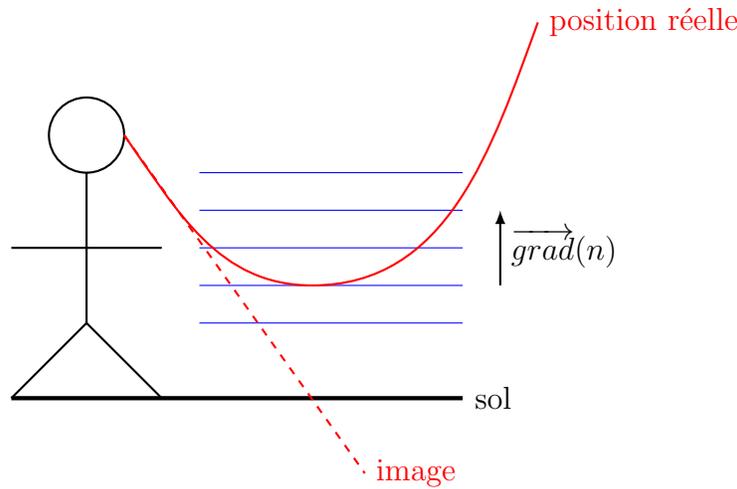


Figure 5 – Parcours des rayons lumineux

3.2 Aberrations solaires

Des effets semblables sont à l'origine de la déformation du Soleil dans le ciel en fonction de l'heure de la journée. En effet, lorsque le Soleil est bas sur l'horizon, il nous apparaît plus aplati. Nous allons expliquer ce phénomène.

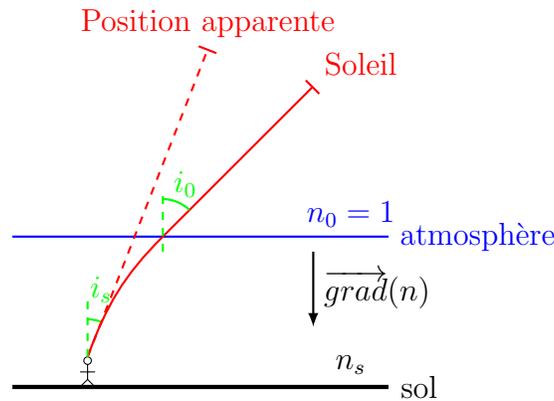


Figure 6 – Schéma du problème

Cette fois-ci, l'indice de l'atmosphère est modifiée à cause de la masse volumique de l'air selon la loi de Gladstone : $\frac{n-1}{m_V} = \text{constante}$. On a la relation $\sin i_s = \frac{\sin i_0}{n_s}$ où l'indice 0 correspond au vide et s correspond au sol. On a $n_s = 1,00029$. Le diamètre du Soleil vu depuis la Terre est :

$$\alpha = \frac{2 \times R_S}{D_{TS}} \tag{16}$$

$$= \frac{2 \times 6,95 \cdot 10^8}{1,496 \cdot 10^{11}} = 0,533^\circ \tag{17}$$

Et son diamètre apparent au sol est donc :

$$\alpha_s = \arcsin\left(\frac{\sin(i_0 + \alpha/2)}{n_s}\right) - \arcsin\left(\frac{\sin(i_0 - \alpha/2)}{n_s}\right) \quad (18)$$

Quand le Soleil est à son zénith, l'effet de cette variation est minime. En revanche, lorsque le Soleil est bas sur l'horizon, la différence des angles devient importante : si le centre du Soleil est à 89° de la verticale, alors α_s vaut $0,31^\circ$. Le Soleil apparait donc plus petit seulement sur la verticale, car les rayons arrivant avec des angles différents sur l'horizontale ne sont pas affectés.

3.3 Fibre optique à gradient d'indice

Non traité lors de la présentation par manque de temps.

Dans une fibre à gradient d'indice, on utilise un matériau dont l'indice varie en fonction de la distance au centre de la fibre.

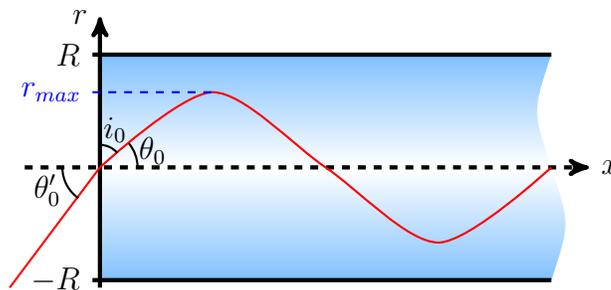


Figure 7 – Schéma du problème

On posera pour l'indice cette équation : $n = n_0\sqrt{1 - \alpha^2 r^2}$, avec $\alpha < \frac{1}{R}$. On pose à nouveau $a = n_0 \sin i_0$. Le rayon maximal accessible correspond à une propagation parallèle à la fibre, donc à $a = n$ ce qui donne :

$$r_{max} = \frac{\cos i_0}{\alpha} < R \quad (19)$$

On peut reprendre l'équation des rayons lumineux trouvée dans la partie 3.1 :

$$\begin{aligned} x &= a \int_0^r \frac{dy}{\sqrt{n_0^2 - \alpha^2 n_0^2 y^2 - a^2}} \\ &= \frac{a}{n_0 \alpha} \arcsin\left(\frac{n_0 \alpha r}{\sqrt{n_0^2 - a^2}}\right) \end{aligned} \quad (20)$$

Finalement on obtient $r = \frac{\sin \theta_0}{n_0 \alpha} \sin\left(\frac{n_0 \alpha x}{a}\right)$. De plus, on utilise ces fibres avec de très petits angles d'entrée donc on peut simplifier $a = \sqrt{n_0^2 - \sin^2 \theta_0} \approx n_0$.

Conclusion

Nous avons vu que l'on peut retrouver toutes les relations de l'optique géométrique à l'aide du principe de Fermat, qui permet ainsi d'exprimer de manière condensée toute la physique de ces problèmes. Il ne permet pas en revanche de traiter de l'optique ondulatoire.

Références

- [1] *Optique et physique ondulatoire*
Bertin, Faroux, Renault
DUNOD
- [2] *Optique géométrique*
Bécherrawy
De Boeck
- [3] *Optique géométrique et ondulatoire*
Pérez
MASSON

Questions

- A propos de la dernière phrase, quel est le lien du principe de Fermat avec l'optique ondulatoire? Il dérive de l'optique ondulatoire, à cause d'un effet d'interférence qui permet d'aboutir à la notion de rayon lumineux.
- Donner un exemple où on se place dans un maximum pour le principe de Fermat, et un où ce n'est pas un extremum. Le cas limite est l'ellipse où tous les chemins optiques sont possibles. Pour une courbure plus forte, on trouvera un maximum, comme pour la parabole, et pour une courbure plus faible comme le miroir plan, on trouvera un minimum. Comme exemple qui ne soit ni un minimum, ni un maximum, on peut prendre un miroir plan-parabolique. Selon une direction, on obtient un minimum local et selon l'autre direction, un maximum local. Cette situation s'apparente au passage de col cité plus haut.
- Pourquoi construire l'optique géométrique à l'aide du principe de Fermat et non de la loi fondamentale de l'optique géométrique?
- le principe de Fermat s'applique-t-il aussi à d'autres types d'onde? Oui, à condition d'avoir des systèmes grands devant la longueur d'onde (par exemple pour l'acoustique).
- Est-ce que le principe de Fermat s'applique à des objets virtuels? Oui, à condition de considérer l'indice du milieu négatif.

Remarques

- Les deux premières parties sont bonnes, les exemples sont bien traités.
- Les illustrations de la dernière partie n'ont pas été bien abordées, elles n'ont pas permis de revenir sur le principe de Fermat de façon qualitative.
- Redéfinir le lien entre temps de propagation et chemin optique au lieu de le mettre en prérequis.
- Pour la fibre optique, on peut mettre en parallèle un saut d'indice et un gradient d'indice et montrer que les dispersions sont plus faibles dans le deuxième cas.
- Le niveau L1 est un peu bas pour traiter de gradient et d'abscisse curviligne, préférer un niveau L2.
- Idée de manipulation : illustrer la notion de rayon lumineux avec un laser et une fente, pour montrer la limite de la diffraction.
- Le principe de Fermat permet d'expliquer le stigmatisme des instruments d'optique.