

Florent Plouy
Loïc Robert

LP 30

Rayonnement dipolaire électrique et applications.

Niveau: L2

Prérequis: -Electromagnétisme
-Milieux diélectriques
-Optique géométrique et ondulatoire

Introduction:

Nous avons déjà réalisé l'étude des lois de l'optique géométrique et ondulatoire, dès lors nous pouvons porter notre regard sur chaque objet qui nous entoure et comprendre ce que nous percevons. Mais très rapidement une question nous brûle les lèvres: pourquoi le ciel est-il bleu? Cela nous paraît évident car nous le voyons bleu depuis notre naissance et pourtant malgré de nombreux efforts, aucune loi connue de la réflexion, de la réfraction ou autre ne nous permet de comprendre. Deux possibilités alors: soit certaines lois de l'optique nous sont mal connues, soit nous effectuons une approximation en optique qui n'est pas valable. La bonne réponse est la seconde, il ne faut pas utiliser l'approximation du champ scalaire pour traiter la question de la couleur du ciel.

I Calculs généraux sur le Rayonnement dipolaire électrique

1) Conditions d'étude et premières approximations

Pour rester le plus général possible, considérons un ensemble de points notés C_i possédant une charge q_i étudiés dans un repère galiléen de centre O qui est au voisinage de l'ensemble de charges. Nous allons commencer par calculer le potentiel $A(M,t)$, potentiel calculé à l'instant t à partir d'un point fixe M éloigné de O . Nous appellerons $OM=r$ et on suppose que $r \gg OC_i$ (1), quelque soit i , cette hypothèse est valable en général, dans le cas du rayonnement d'un électron autour de son noyau, l'observateur se trouve à une distance

de l'ordre du mètre tandis que le dipôle est d'une taille voisinant l'ångström.

On ne souhaite pas aborder ici des charges en mouvement relativiste, ainsi nous allons considérer :

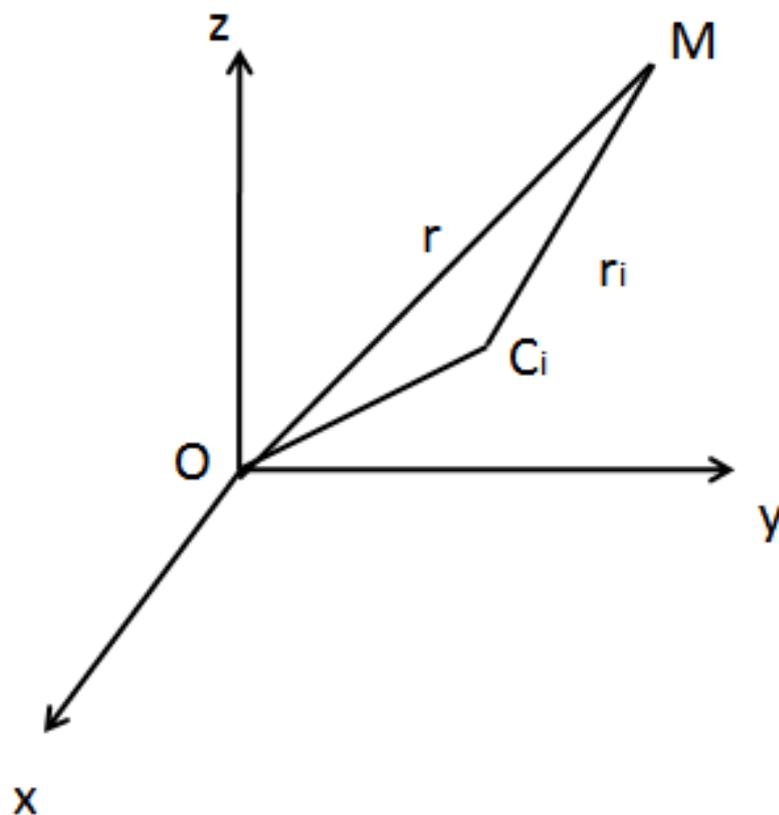
$$v_i \ll c \quad (2)$$

Ce qui équivaut à:

$a \ll cT$ (avec l'ordre de grandeur de la taille de la distribution de charges et T celui du temps d'évolution de cette distribution)

Ou encore :

$a \ll \lambda$ (λ la longueur d'onde du rayonnement émis par le système)



2) Potentiel vecteur

Nous ne pouvons pas ici utiliser simplement la formule :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \frac{\vec{v}_i(t) q_i}{r_i(t)}$$

En effet ici les charges sont en mouvement et l'information met un certain temps pour arriver jusqu'au point M, le potentiel observé à l'instant t est donc appelé " potentiel retardé" et s'écrit comme suit:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \frac{\vec{v}_i(t - r_i/c) q_i}{r_i(t) - \vec{v}_i(t - r_i/c) \cdot \vec{r}_i(t - r_i/c)/c}$$

Le calcul dans le cas général de ce potentiel vecteur est très compliqué, nous allons ainsi utiliser les approximations posées précédemment.

D'après (1), on peut dire que quelque soit i, $r_i \approx r$.

D'après (2), $r_i(t) - \vec{v}_i(t - r_i/c) \cdot \vec{r}_i(t - r_i/c)/c \ll 1$

D'où, en posant $t'=t-r/c$:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \frac{\vec{v}_i(t') q_i}{r}$$

Utilisons le moment dipolaire de la distribution:

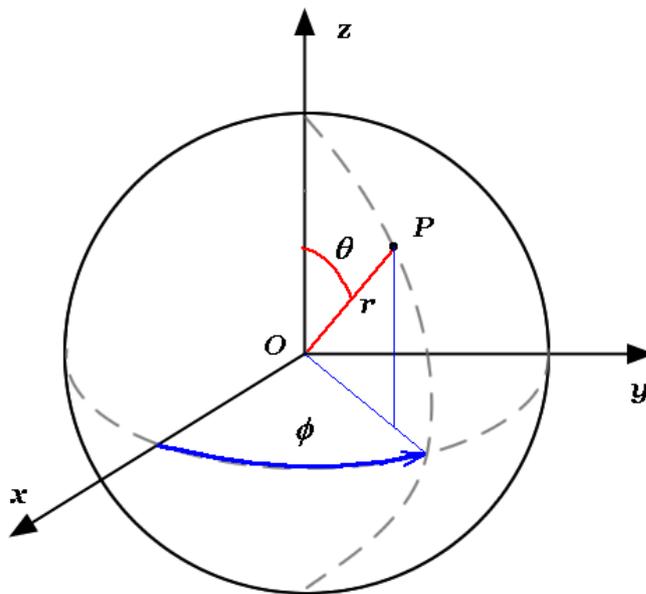
$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{p}(t')}{r}$$

3) Champ électrique et magnétique

Pour simplifier les calculs nous allons supposer que le vecteur moment dipolaire est porté par Oz et centré en O. On trouve ensuite les champs $\vec{B}(\vec{r}, t)$ et $\vec{E}(\vec{r}, t)$ en utilisant la définition du potentiel vecteur et l'équation de Maxwell-Faraday:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \overrightarrow{rot}\vec{A}(\vec{r}, t)$$
$$\overrightarrow{rot}\vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t)$$

On trouve ainsi les formules suivantes en coordonnées sphériques:



$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \sin(\theta)}{4\pi} \left(\frac{\dot{p}(t')}{r^2} + \frac{\ddot{p}(t')}{rc} \right) \vec{e}_\phi$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{2\cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{p(t')}{r^3} + \frac{\dot{p}(t')}{r^2c} \right) \vec{e}_r$$

$$+ \frac{\sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{p(t')}{r^3} + \frac{\dot{p}(t')}{r^2c} + \frac{\ddot{p}(t')}{rc^2} \right) \vec{e}_\theta$$

Pour pouvoir savoir si des termes peuvent être négligés devant d'autres, supposons $p(t') = p_0 \cos(\omega t')$, ainsi nous avons:

$$\frac{p(t')}{r^3} \approx \frac{p_0}{r^3}$$

$$\frac{\dot{p}(t')}{r^2c} \approx 2\pi \frac{p_0}{r^2\lambda}$$

$$\frac{\ddot{p}(t')}{rc^2} \approx 4\pi^2 \frac{p_0}{r\lambda^2}$$

On remarque que si $r \gg \lambda$ alors les termes en \ddot{p} dominant sur les autres termes. Ainsi on définit la zone de rayonnement telle que $r \gg \lambda$, on se placera toujours dans ces conditions par la suite pour simplifier les calculs.

Nous avons donc finalement:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \sin(\theta)}{4\pi} \frac{\ddot{p}(t')}{rc} \vec{e}_\phi$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \sin(\theta)}{4\pi} \frac{\ddot{p}(t')}{r} \vec{e}_\theta$$

Il y a alors plusieurs remarques importantes à réaliser:

-l'onde est polarisée rectilignement

-l'onde a les mêmes propriétés qu'une onde plane:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{r}, t) \wedge \vec{e}_r c$$

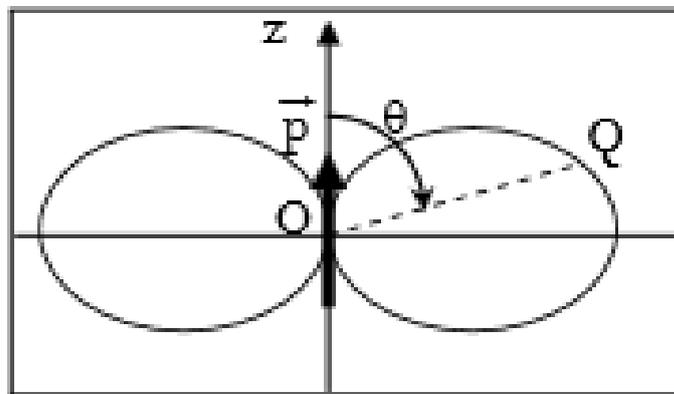
-Les champs électriques et magnétiques varient en $1/r$, nouveau par rapport au dipôle statique.

4) Puissance rayonnée

Intéressons nous maintenant à la puissance de l'onde émise, pour cela utilisons la formule de Poynting, on arrive à l'expression suivante:

$$\vec{R} = \mu_0 \sin^2(\theta) \frac{\ddot{p}^2}{16\pi^2 r^2 c} \vec{e}_r$$

L'allure de l'énergie diffusée en fonction de θ est la suivante:



On constate qu'il n'y a pas d'émission d'énergie électromagnétique dans l'axe du dipôle, cette remarque est très importante pour comprendre de nombreux phénomènes dont ceux que nous allons aborder par la suite.

II Applications du rayonnement dipolaire électrique

1) Diffusion de Rayleigh, couleur du ciel

Ici nous allons étudier la diffusion du rayonnement solaire par les molécules de l'atmosphère, celle-ci s'effectue par les électrons qui sont mis au mouvement sous l'action du champ électrique (l'action du champ magnétique est négligée). Nous allons ici nous intéresser à la puissance moyenne rayonnée pour les différentes longueurs d'onde afin de savoir si nous pouvons expliquer la couleur du ciel.

Nous allons nous resservir de l'expression du vecteur de Poynting, néanmoins cette expression est très générale et indépendante des dipôles étudiés. Il nous faut en définitive calculer la polarisation induite par le rayonnement électrique qui sera pris sous la forme $\vec{E} = E \cos(\omega t) \vec{u}_z$ (on néglige tout terme de phase car la longueur d'onde de cette onde est très grande devant la taille des dipôles).

Utilisons la relation fondamentale de la dynamique sur les électrons pour trouver la polarisation, les forces s'exerçant sur les électrons sont:

-La force électrique : $\vec{F} = -e\vec{E}$

-La force de rappel (proportionnelle par rapport à l'écart à l'équilibre) : $\vec{F} = -m\omega_0^2 z \vec{e}_z$

On peut négliger les termes d'amortissement car $\omega_0 \gg \omega$.

Physiquement, cela signifie que le temps de réponse du dipôle est

très inférieur aux variations de champs électrique, il n'y a donc pas d'amortissement.

ODG: Pour le visible $\omega \approx 3.10^{15} \text{ rad/s}$ tandis que

$\omega_0 \approx 2.3.10^{16} \text{ rad/s}$

En régime permanent, on trouve:

$$\overrightarrow{p}(t) = -ez(t)\overrightarrow{e}_z = \frac{e^2 E_0 \cos(\omega t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \overrightarrow{e}_z$$

En utilisant cette expression, en la remplaçant dans celle du vecteur de Poynting et en intégrant sa valeur moyenne sur toutes les directions, on trouve la puissance totale rayonnée:

$$P = \frac{e^4 E_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3 m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2}$$

Comme nous l'avons déjà remarqué, $\omega_0^2 \gg \omega^2$ d'où, en posant

$P_0 = \frac{e^4 E_0^2}{12\pi \epsilon_0 c^3 m^2}$, on a:

$$P = P_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4$$

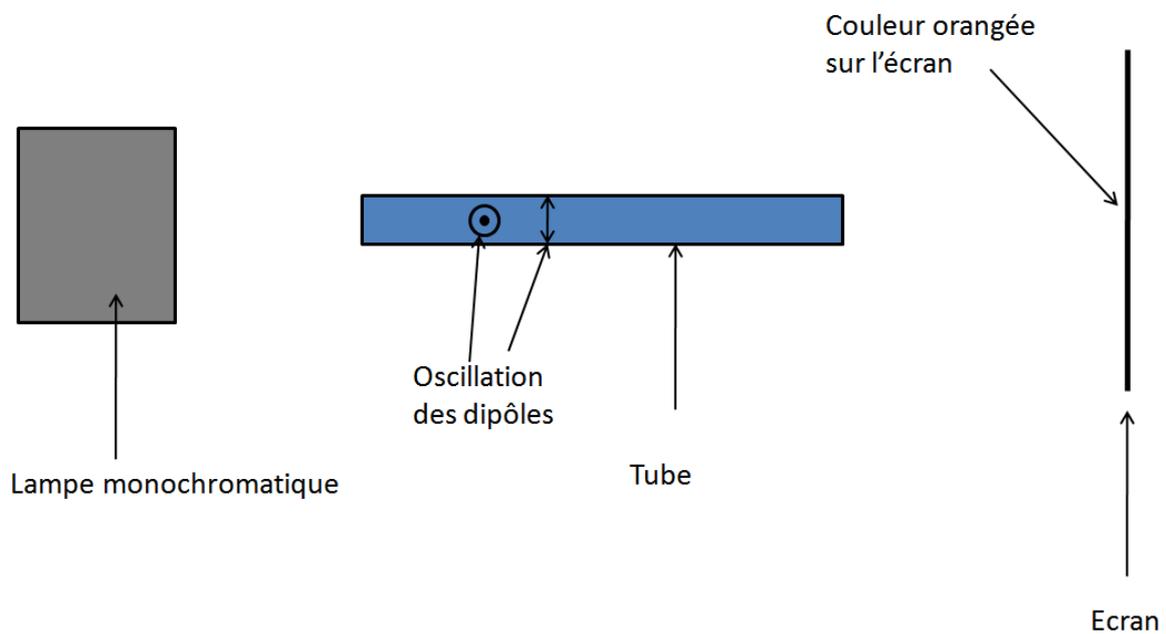
Cherchons maintenant à calculer le rapport entre la puissance rayonnée dans le bleu et celle dans le rouge:

$$\frac{P_B}{P_R} = \left(\frac{\lambda_R}{\lambda_B} \right)^4 \approx 16$$

Nous arrivons donc au résultat escompté, le bleu diffuse 16 fois plus que le rouge, le ciel est donc bleu. En revanche au soleil couchant, on en regardant en direction du soleil, on aperçoit de la lumière non diffusée qui apparaît donc rouge orangé.

Nous pouvons effectuer une petite expérience pour illustrer ce phénomène: éclairons en lumière blanche un tube rempli d'un

liquide contenant des molécules diffusantes (pour mieux voir il vaut mieux éteindre les lumières environnantes). On observe que la lumière diffusée est bleue et celle qui est émise en sortie du tube (que l'on peut projeter sur un écran) est orange. Notons que la lumière diffusée est polarisée, nous pouvons donc utiliser un polariseur pour illustrer plusieurs phénomènes intéressants:



Dans le tube, les dipôles oscillent parallèlement au plan de propagation de l'onde, les dipôles ne rayonnant pas selon leur axe de d'oscillation, la lumière observée est polarisée.. Pour le constater expérimentalement, nous pouvons utiliser un polariseur en entrée du tube et constater qu'il y a des extinctions, ou bien regarder le tube à travers le polariseur. Il est également possible de placer un polariseur en sortie du tube et constater que la lumière sortant du tube n'est pas rayonnée et n'est donc pas polarisée.

2) L'incidence de Brewster

Si l'on étudie la réflexion et la transmission d'une onde électromagnétique envoyée à l'interface entre deux diélectriques, on trouve les expressions suivantes pour les coefficients de réflexion et de transmission:

$$R_{\parallel} = \frac{\sin^2(i - r)}{\sin^2(i + r)}$$

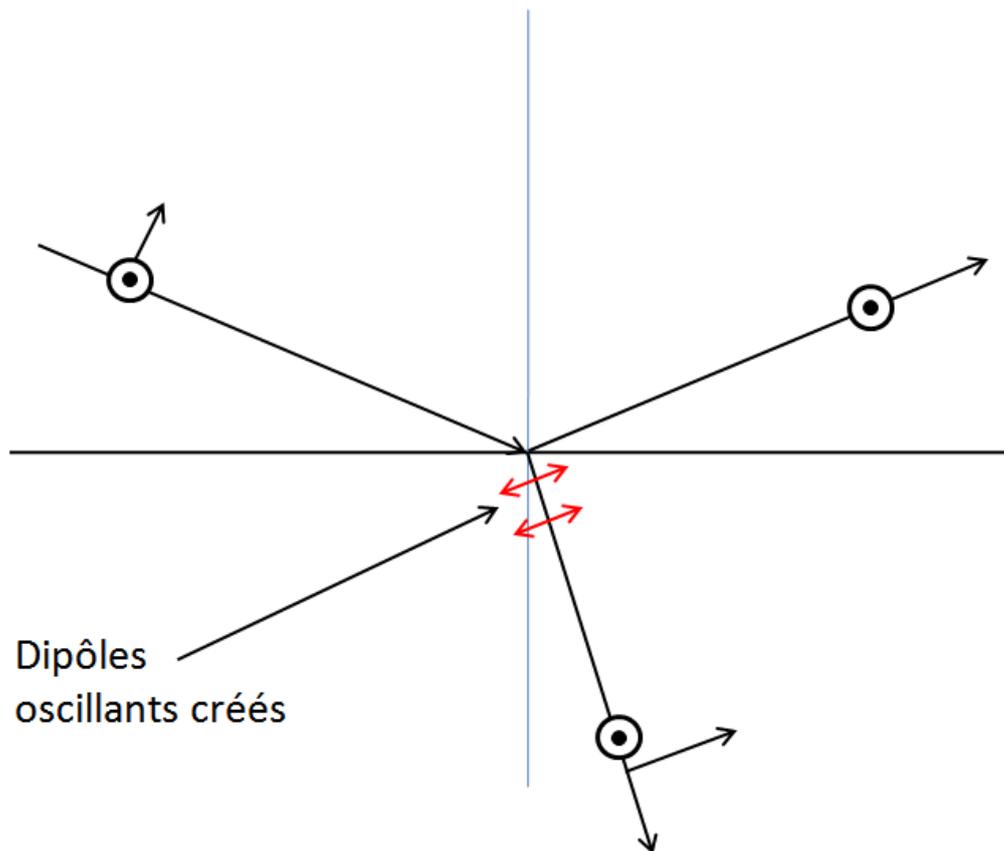
$$R_{\perp} = \frac{\tan^2(i - r)}{\tan^2(i + r)}$$

Avec R_{\parallel} le coefficient de réflexion de la composante du champ électrique parallèle à l'interface entre les diélectriques et R_{\perp} le coefficient de réflexion de la composante complémentaire du champ électrique.

Mathématiquement, on trouve qu'il existe un angle de Brewster selon lequel $R_{\perp}=0$. Mais physiquement, on n'arrive pas à comprendre pourquoi, le milieu est anisotrope il n'y a donc pas de raisons de voir cette extinction. Analysons l'angle entre les rayons transmis et réfléchis pour essayer de comprendre.

Pour avoir $R_{\perp}=0$, il faut prendre $\tan(i-r)=0$, ce qui mène à $i=r$, ce qui est impossible si $n_1 \neq n_2$, on doit alors choisir $\tan^2(i+r) \rightarrow +\infty$ ce qui conduit à $i+r=\pi/2$. Une fois cette constatation réalisée, on peut voir le lien avec le rayonnement dipolaire électrique. En effet si $i+r=\pi/2$ alors l'angle entre le rayon réfléchi et le rayon transmis est de $\pi/2$. En observant le schéma suivant et en se rappelant que les dipôles n'émettent aucun rayonnement selon leur axe de vibration,

on peut expliquer l'origine physique de l'angle de Brewster grâce au rayonnement dipolaire électrique.



Cette interprétation permet également de trouver l'angle de Brewster très rapidement sans avoir à effectuer tous les calculs sur la réflexion et la réfraction des ondes électromagnétiques. Notons que l'angle de Brewster est très utilisé pour polariser une onde ou bien pour éviter des réflexions non désirées dans une cavité laser par exemple.

On peut être émerveillé de cette constatation, en effet le rayonnement dipolaire électrique explique l'angle de Brewster et on retrouve mathématiquement la même expression avec le calcul de la

réflexion/transmission à l'interface entre deux diélectrique qui ne comporte aucunement de considérations du rayonnement dipolaire électrique.

En conclusions nous avons compris ce qu'était le rayonnement dipolaire électrique, sa contribution dans la couleur du soleil et de l'angle de Brewster. Notons qu'il y a des domaines variés dans lesquels elle entre en jeu tels que la diffusion par rayon X par exemple.

Bibliographie : -Ondes électromagnétiques , Christian Garing

-Electromagnétisme 3, M. Bertin, J.P. Faroux, J. Renault

-Leçons d'électromagnétisme, Bruno Latour

-Polarisation de la lumière, Serge Huard

Questions: - Connaissez vous d'autres applications au rayonnement dipolaire électrique? les antennes, création des rayons X

-

Commentaires: - Cette leçon est très portée sur les applications, néanmoins comme la partie cours avec ses calculs est assez longue, on a en général pas le temps d'aborder plus d'une ou deux applications. En conclusion il est donc intéressant d'énoncer les différentes applications pour montrer qu'on aurait pu l'aborder dans la leçon.