

LP28 : Ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs

Benjamin Vincent
Lisa Wild
12/12/14

Niveau : Classe prépa 2^{ème} année

Prérequis : équations de Maxwell, ondes électromagnétiques dans le vide, conduction électrique dans un conducteur ohmique, loi d'Ohm locale, notation complexe

Contents

I.	Comment se propage une onde électromagnétique dans un plasma ?	2
1)	Interaction entre OPPM et plasma	2
2)	Relation de dispersion	2
3)	Cas où $\omega < \omega_p$	3
4)	Que se passe-t-il si $\omega > \omega_p$?	3
5)	L'exemple de l'ionosphère	4
II.	Propagation dans un métal	4
1)	Expression de la conductivité	4
2)	Dispersion	4
3)	Effet de peau	5
4)	Cas des très hautes fréquences	6
	Questions	7
	Commentaires	8
	Bibliographie	8

I. Comment se propage une onde électromagnétique dans un plasma ?

1) Interaction entre OPPM et plasma

Hypothèses : plasma peu dense et globalement neutre, ions fixes

L'onde incidente est une OPPM telle que $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - e\vec{v} \times \vec{B}$$

On peut négliger le terme $-e\vec{v} \times \vec{B}$ devant $-e\vec{E}$ car les électrons sont non relativistes

En utilisant la dérivée complexe on obtient l'expression de \vec{v} puis de \vec{j} car $\vec{j} = -n_0 e \vec{v}$

On a donc une expression de la forme $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ avec γ imaginaire pur.

- Aspect énergétique : $\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = 0$ car \vec{j} et \vec{E} sont en quadrature de phase.
Donc dans le cadre des plasmas peu denses l'onde électromagnétique ne cède jamais d'énergie au plasma.

2) Relation de dispersion

On utilise la relation $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}) = \overrightarrow{grad}(\text{div}) - \Delta$ pour trouver la relation de propagation de \vec{E} puis on utilise la correspondance complexe entre les opérateurs pour obtenir la relation de dispersion :

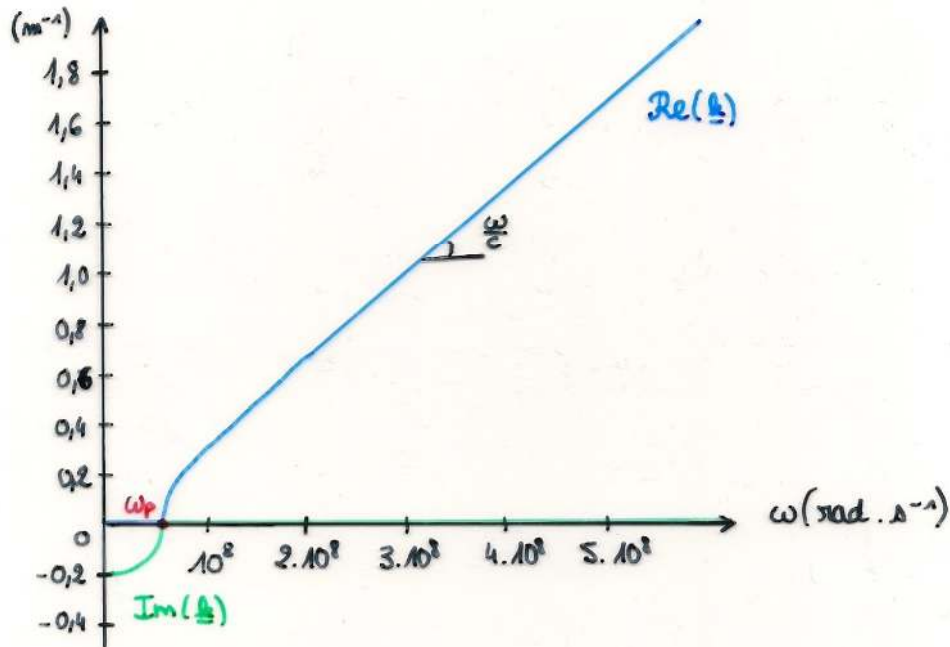
$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

Avec $\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0}}$

L'indice optique est défini tel que $k = n \frac{\omega}{c}$

OdG : ionosphère $n_0 \sim 10^{12} m^{-3}$ donc $\omega_p \sim 10^8 rad.s^{-1}$

Parties réelle et imaginaire
du nombre d'onde complexe
avec $n_0 \sim 10^{12} \text{ m}^{-3}$



3) Cas où $\omega < \omega_p$

$k^2 < 0$ donc k est imaginaire pur

$$k = \pm \frac{i}{c} \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2} = \pm iK$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{\mp Kz} e^{-i\omega t}$$

On garde e^{-Kz} car c'est la solution physique.

On a donc :

-atténuation exponentielle de l'onde

-pas de propagation

Une telle onde est dite évanescente.

- Aspect énergétique : $\langle \vec{\pi} \rangle = \vec{0}$ car \vec{E} et \vec{B} sont en quadrature de phase.
Le plasma se comporte comme un miroir.

4) Que se passe-t-il si $\omega > \omega_p$?

$k^2 > 0$ donc k est réel

$$k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

On a donc :

- pas d'atténuation exponentielle de l'onde

- propagation

- Aspect énergétique : $\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{kE_0^2}{2\mu_0\varepsilon_0}$

Le plasma est « transparent » pour l'onde.

5) L'exemple de l'ionosphère

- $\omega > \omega_p$: communiquer avec un satellite
- $\omega < \omega_p$: communiquer par radio

II. Propagation dans un métal

1) Expression de la conductivité

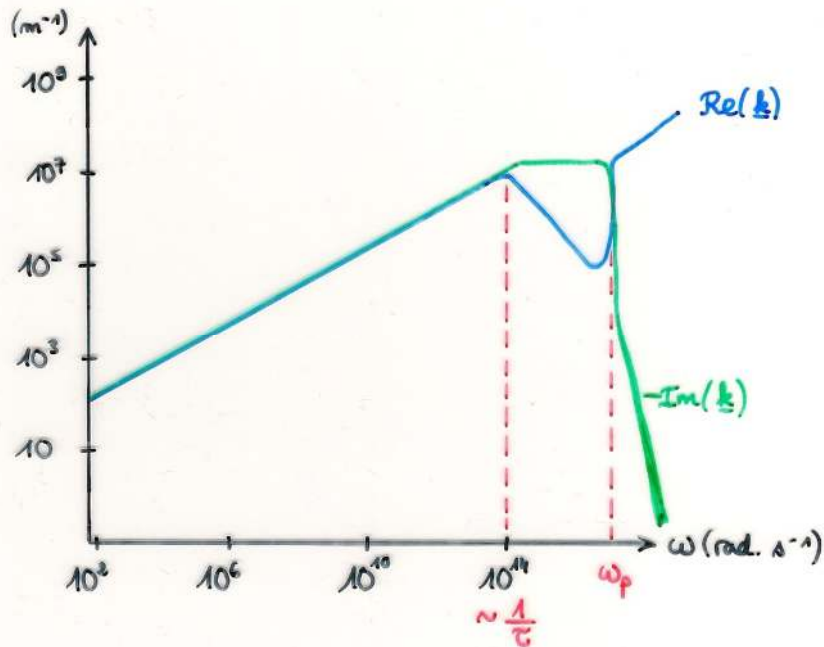
$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{m}{\tau} \vec{v} - e\vec{E} - e\vec{v} \times \vec{B}$$

On refait les mêmes calculs que précédemment et on trouve une conductivité complexe (et non imaginaire pure comme dans le cas du plasma).

2) Dispersion

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{i\mu_0\gamma_0\omega}{1 - i\omega\tau}$$

Parties réelle et imaginaire
du nombre d'onde complexe k
pour le cuivre (échelle log-log)



$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + i \frac{\mu_0 \gamma_0 \omega}{1 - i\omega\tau}$$

3) Effet de peau

$$\omega\tau \ll 1$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\gamma_0\omega$$

Le premier terme est négligeable devant le deuxième car nous sommes dans le domaine de validité de la loi d'Ohm, donc :

$$k = \pm \frac{1+i}{\delta} \text{ avec } \delta \text{ épaisseur de peau}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-z/\delta} e^{i(\frac{z}{\delta} - \omega t)}$$

On a donc :

-atténuation exponentielle de l'onde

-propagation

OdG : (cuivre)

f	δ
50Hz	9mm
1MHz	65 μ m
5GHz	0.9 μ m

Aspect énergétique :

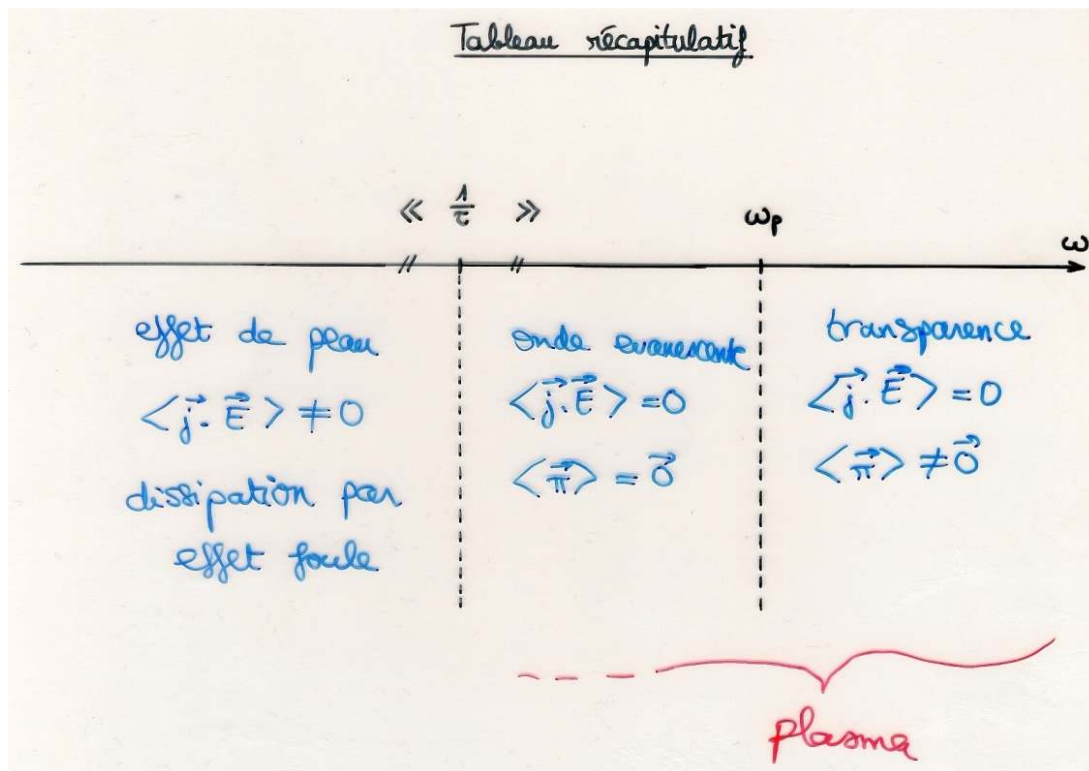
$$\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle \propto \gamma_0 E_0^2 \sim \frac{U^2}{R} = P_{\text{Joule}}$$

AN : quelle fréquence maximale peut-on utiliser dans des fils de cuivre sans perte de section utile (avec $r_{\text{fil}}=1\text{mm}$) ?

On trouve $f_{\text{max}} \approx 100\text{kHz}$

4) Cas des très hautes fréquences

$\omega\tau \gg 1$: on retrouve le cas du plasma.



Questions

- Le PFD s'applique à quel système ?

On isole un volume mésoscopique d'électrons dont les vitesses individuelles valent la vitesse de Fermi ($\approx 10^6$ m/s)

- D'où vient la force de frottement du modèle de Drude ?

Des interactions entre les électrons et les ions du réseau cristallin

- Quel est le lien entre collisions et frottement ?

Les forces de frottement correspondent à un temps de relaxation (retour à l'équilibre)

- Quel est le domaine de validité de la loi d'Ohm ?

Lorsque l'on peut négliger le courant de déplacement par rapport au courant de conduction

$$T \ll \tau \approx 10^{-14} \text{ s}$$

- Quelle est l'origine physique de $\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle$?

Travail des forces de Lorentz

- Illustrer par un schéma que $\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = 0$ quand E et B en quadrature
- Peut-on extraire directement les conclusions de l'équation $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{m}{\tau} \vec{v} - e\vec{E}$ sans calcul ?

Basse fréquence : $\frac{m}{\tau} \vec{v} \approx -e\vec{E} \rightarrow j$ et E en phase (puissance max)

Haute fréquence : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} \rightarrow j$ et E en quadrature de phase (puissance min)

- Pourquoi on a parfois $\frac{i\mu_0\gamma_0\omega}{1-i\omega\tau}$ et parfois $\frac{i\mu_0\gamma_0\omega}{1+i\omega\tau}$?

Cela dépend de la convention choisie pour E

- Quel serait le comportement pour un électrolyte ?

Il n'y a que des ions (forte inertie) et pas d'électrons donc compliqué

- Pourquoi les rayons X ne pénètrent pas dans le plomb ?

Interactions noyaux-onde pour des faisceaux très énergétiques non prises en compte dans le modèle de Drude (limites)

Commentaires

- Bien de donner la température lorsque l'on donne la conductivité
- Plan original (commencer par le cas le plus simple pour bien poser les bases) mais on peut également faire l'inverse.
- OdG et AN bien, inclure une analyse dimensionnelle
- Application possible à une antenne

Bibliographie

Ondes électromagnétiques dans le vide et les milieux conducteurs, Garing

Ondes 2^{ème} année, Hprépa

*Physique tout-en-un MP-MP**, J'intègre