

# LP28 : Ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs

Benjamin Vincent  
Lisa Wild  
12/12/14

Niveau : Classe prépa 2<sup>ème</sup> année

Prérequis : équations de Maxwell, ondes électromagnétiques dans le vide, conduction électrique dans un conducteur ohmique, loi d'Ohm locale, notation complexe

## Contents

I.	Comment se propage une onde électromagnétique dans un plasma ? .....	2
1)	Interaction entre OPPM et plasma .....	2
2)	Relation de dispersion .....	2
3)	Cas où $\omega < \omega_p$ .....	3
4)	Que se passe-t-il si $\omega > \omega_p$ ? .....	3
5)	L'exemple de l'ionosphère .....	4
II.	Propagation dans un métal .....	4
1)	Expression de la conductivité .....	4
2)	Dispersion .....	4
3)	Effet de peau .....	5
4)	Cas des très hautes fréquences .....	6
	Questions .....	7
	Commentaires .....	8
	Bibliographie .....	8

# I. Comment se propage une onde électromagnétique dans un plasma ?

## 1) Interaction entre OPPM et plasma

Hypothèses : plasma peu dense et globalement neutre, ions fixes

L'onde incidente est une OPPM telle que  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - e\vec{v} \times \vec{B}$$

On peut négliger le terme  $-e\vec{v} \times \vec{B}$  devant  $-e\vec{E}$  car les électrons sont non relativistes

En utilisant la dérivée complexe on obtient l'expression de  $\vec{v}$  puis de  $\vec{j}$  car  $\vec{j} = -n_0 e \vec{v}$

On a donc une expression de la forme  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  avec  $\gamma$  imaginaire pur.

- Aspect énergétique :  $\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = 0$  car  $\vec{j}$  et  $\vec{E}$  sont en quadrature de phase.  
Donc dans le cadre des plasmas peu denses l'onde électromagnétique ne cède jamais d'énergie au plasma.

## 2) Relation de dispersion

On utilise la relation  $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}) = \overrightarrow{grad}(\text{div}) - \Delta$  pour trouver la relation de propagation de  $\vec{E}$  puis on utilise la correspondance complexe entre les opérateurs pour obtenir la relation de dispersion :

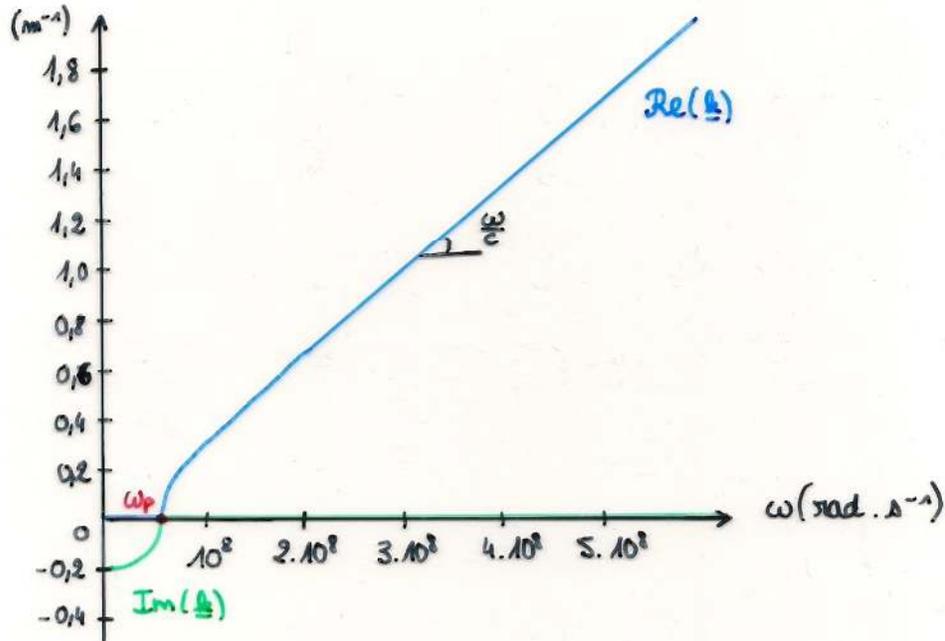
$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

Avec  $\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0}}$

L'indice optique est défini tel que  $k = n \frac{\omega}{c}$

OdG : ionosphère  $n_0 \sim 10^{12} m^{-3}$  donc  $\omega_p \sim 10^8 rad.s^{-1}$

Parties réelle et imaginaire  
du nombre d'onde complexe  
avec  $n_0 \sim 10^{12} \text{ m}^{-3}$



### 3) Cas où $\omega < \omega_p$

$k^2 < 0$  donc  $k$  est imaginaire pur

$$k = \pm \frac{i}{c} \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2} = \pm iK$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{\mp Kz} e^{-i\omega t}$$

On garde  $e^{-Kz}$  car c'est la solution physique.

On a donc :

-atténuation exponentielle de l'onde

-pas de propagation

Une telle onde est dite évanescente.

- Aspect énergétique :  $\langle \vec{\pi} \rangle = \vec{0}$  car  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont en quadrature de phase.  
Le plasma se comporte comme un miroir.

### 4) Que se passe-t-il si $\omega > \omega_p$ ?

$k^2 > 0$  donc  $k$  est réel

$$k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

On a donc :

- pas d'atténuation exponentielle de l'onde

- propagation

- Aspect énergétique :  $\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{kE_0^2}{2\mu_0\epsilon_0}$

Le plasma est « transparent » pour l'onde.

## 5) L'exemple de l'ionosphère

- $\omega > \omega_p$  : communiquer avec un satellite
- $\omega < \omega_p$  : communiquer par radio

## II. Propagation dans un métal

### 1) Expression de la conductivité

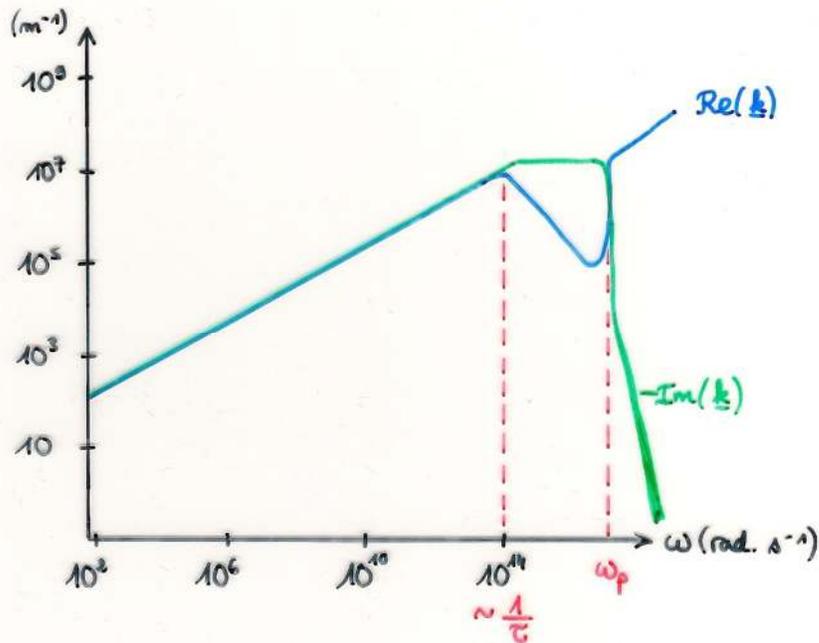
$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{m}{\tau} \vec{v} - e\vec{E} - e\vec{v} \times \vec{B}$$

On refait les mêmes calculs que précédemment et on trouve une conductivité complexe (et non imaginaire pure comme dans le cas du plasma).

### 2) Dispersion

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{i\mu_0\gamma_0\omega}{1 - i\omega\tau}$$

Parties réelle et imaginaire  
du nombre d'onde complexe  $k$   
pour le cuivre (échelle log-log)



$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + i \frac{\mu_0 \gamma_0 \omega}{1 - i\omega\tau}$$

### 3) Effet de peau

$$\omega\tau \ll 1$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\gamma_0\omega$$

Le premier terme est négligeable devant le deuxième car nous sommes dans le domaine de validité de la loi d'Ohm, donc :

$$k = \pm \frac{1+i}{\delta} \text{ avec } \delta \text{ épaisseur de peau}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-z/\delta} e^{i(\frac{z}{\delta} - \omega t)}$$

On a donc :

-atténuation exponentielle de l'onde

-propagation

OdG : (cuivre)

f	$\delta$
50Hz	9mm
1MHz	65 $\mu$ m
5GHz	0.9 $\mu$ m

Aspect énergétique :

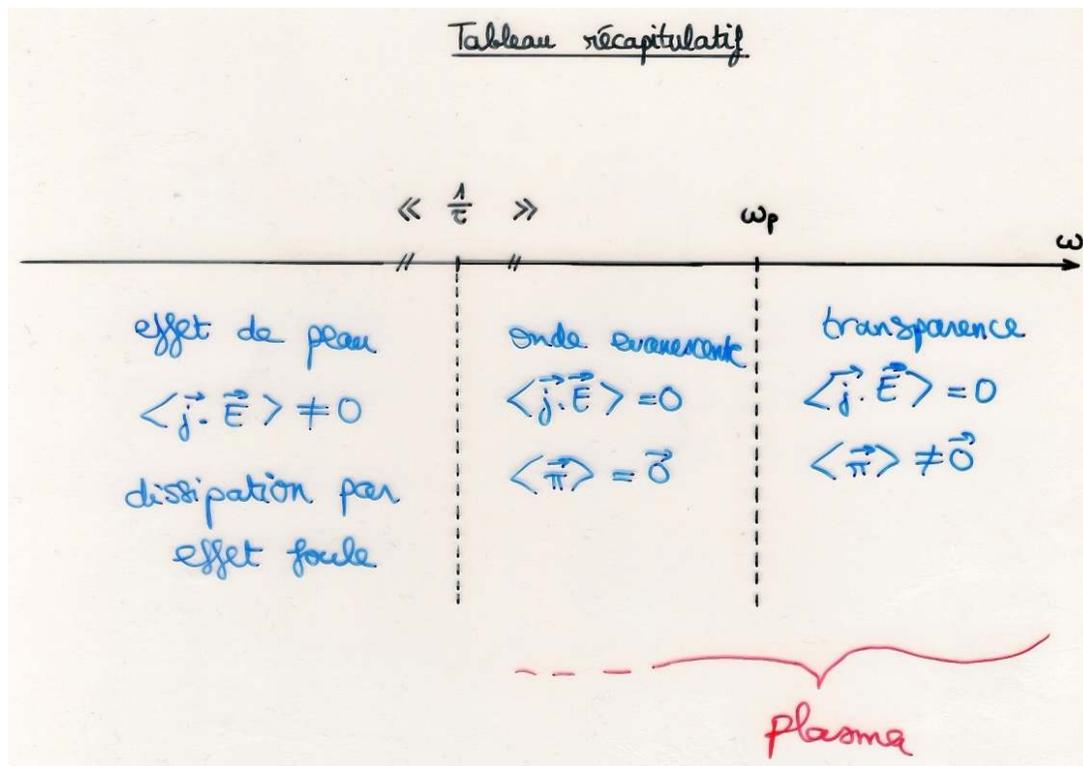
$$\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle \propto \gamma_0 E_0^2 \sim \frac{U^2}{R} = P_{\text{Joule}}$$

AN : quelle fréquence maximale peut-on utiliser dans des fils de cuivre sans perte de section utile (avec  $r_{\text{fil}}=1\text{mm}$ ) ?

On trouve  $f_{\text{max}} \approx 100\text{kHz}$

#### 4) Cas des très hautes fréquences

$\omega\tau \gg 1$  : on retrouve le cas du plasma.



## Questions

- Le PFD s'applique à quel système ?

On isole un volume mésoscopique d'électrons dont les vitesses individuelles valent la vitesse de Fermi ( $\approx 10^6$  m/s)

- D'où vient la force de frottement du modèle de Drude ?

Des interactions entre les électrons et les ions du réseau cristallin

- Quel est le lien entre collisions et frottement ?

Les forces de frottement correspondent à un temps de relaxation (retour à l'équilibre)

- Quel est le domaine de validité de la loi d'Ohm ?

Lorsque l'on peut négliger le courant de déplacement par rapport au courant de conduction

$$T \ll \tau \approx 10^{-14} \text{ s}$$

- Quelle est l'origine physique de  $\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle$  ?

Travail des forces de Lorentz

- Illustrer par un schéma que  $\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = 0$  quand E et B en quadrature
- Peut-on extraire directement les conclusions de l'équation  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{m}{\tau} \vec{v} - e\vec{E}$  sans calcul ?

Basse fréquence :  $\frac{m}{\tau} \vec{v} \gg -e\vec{E} \rightarrow j$  et E en phase (puissance max)

Haute fréquence :  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} \rightarrow j$  et E en quadrature de phase (puissance min)

- Pourquoi on a parfois  $\frac{i\mu_0\gamma_0\omega}{1-i\omega\tau}$  et parfois  $\frac{i\mu_0\gamma_0\omega}{1+i\omega\tau}$  ?

Cela dépend de la convention choisie pour E

- Quel serait le comportement pour un électrolyte ?

Il n'y a que des ions (forte inertie) et pas d'électrons donc compliqué

- Pourquoi les rayons X ne pénètrent pas dans le plomb ?

Interactions noyaux-onde pour des faisceaux très énergétiques non prises en compte dans le modèle de Drude (limites)

## Commentaires

- Bien de donner la température lorsque l'on donne la conductivité
- Plan original (commencer par le cas le plus simple pour bien poser les bases) mais on peut également faire l'inverse.
- OdG et AN bien, inclure une analyse dimensionnelle
- Application possible à une antenne

## Bibliographie

*Ondes électromagnétiques dans le vide et les milieux conducteurs*, Garing

*Ondes 2<sup>ème</sup> année*, Hprépa

*Physique tout-en-un MP-MP\**, J'intègre