

LP 29: Ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs

Géraldine Davis

Niveau L2

Adrien Cavailles

- Prérequis:
- Equations de Maxwell
 - Ondes électromagnétiques dans le vide et les diélectriques
 - Modèle de Drude. Loi d'Ohm locale.
 - Conducteurs en électrostatique.
 - Hydrodynamique.

Introduction: On a déjà étudié les ondes électromagnétiques dans le vide et les conducteurs en statique. On va se demander ce qui se passe à l'interface et dans un milieu conducteur lorsqu'une onde EM pénètre.

I: Protagonistes et enjeux.

A) Cadre de la leçon.

Conducteur $\hat{=}$ matériau dans lequel il existe des charges mobiles.

type de charge mobile

e^-

ions

ions + e^-

conducteur

métal

électrolyte

plasma.

On néglige dans les équations de Maxwell les courants et charges liés. On considère que les contributions aux champs

sont beaucoup plus grandes pour les charges et courants libres.
C'est en fait la raison ce qui distingue les conducteurs des diélectriques.

Les équations de Maxwell deviennent alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \vec{E} = \frac{\rho_{\text{libre}}}{\epsilon_0} \\ \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{\text{libre}} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

On a aussi la loi d'ohm locale établie avec le modèle de Drude:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

B) Un exemple : l'électrolyte.

On va essayer de retrouver le modèle de Drude dans le cas de l'électrolyte (On a vu que dans un métal, $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$)



On considère un ion de l'électrolyte (par exemple K^+)

Il subit : - la force de Lorentz $q\vec{E}$
- force de frottement fluide de Stokes:
 $\vec{f}_v = -6\pi\eta a \vec{v}$

Rq: a n'est pas le rayon de l'ion mais le rayon hydrodynamique.
L'ion est en fait entouré de molécules de solvant.

Une équation du mouvement est donc $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} - 6\pi\eta a \vec{v}$

→ on retrouve le modèle de Drude avec $\frac{m}{\tau} = 6\pi\eta a$.

A.N.: $\eta = 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ ⇒ $\tau_{K^+} \approx 10^{-14} \text{ s}$
 $a \approx 200 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ (à comparer avec $\tau_{Cu} = 1,87 \cdot 10^{-14} \text{ s}$)

On a une justification de la validité d'utiliser le modèle de Drude pour un électrolyte. On admettra qu'il en est de même pour les plasmas.

II Vers la relation de dispersion.

A) Relation constitutive.

On considère un champ \vec{E} et \vec{v} monochromatiques.

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t} \\ \vec{v} = \vec{v}_0 e^{i\omega t} \end{cases}$$

En appliquant dans l'équation du mouvement du modèle de Drude:

$$\vec{v} \left(\frac{1}{\tau} + i\omega \right) = \frac{1}{m} q \vec{E}$$

$$\vec{v} = \frac{q\tau}{m} \frac{1}{1+i\omega\tau} \vec{E}$$

$$\text{et } \vec{j} = nq\vec{v} = \underline{\sigma}(\omega) \vec{E} \quad \text{avec } \underline{\sigma}(\omega) = \frac{\sigma_0}{1+i\omega\tau}$$

$$\text{et } \sigma_0 = \frac{nq^2\tau}{m}$$

$$\text{Où: } \sigma_{0,Cu} = 5,8 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$$

$$\sigma_{0,K^+,Cl^-, \text{moléculaire}} = 15 \text{ mS} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol}^{-1}$$

On a une conductivité complexe. Quelles sont les conséquences pour la relation de dispersion dans le conducteur?

B) Equation de propagation, relation de dispersion.

On part de Maxwell-Faraday: $\vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\Rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{E} = - \vec{\text{rot}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow - \vec{\Delta} \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \underline{\sigma}(\omega) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Si on considère une OPPH on peut obtenir la relation de dispersion: $\vec{E} \propto e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$

$$- \vec{k}^2 = \mu_0 \underline{\underline{\epsilon}}(\omega) i \omega - \frac{\omega^2}{c^2}$$

Par analogie avec la propagation dans le vide et les diélectriques, on définit $\underline{\underline{\epsilon}}(\omega)$ tel que $\vec{k}^2 = \mu_0 \underline{\underline{\epsilon}}(\omega) \omega^2$.

On a donc $\underline{\underline{\epsilon}}(\omega) = \epsilon_0 - i \frac{\sigma(\omega)}{\omega}$

→ \vec{k} peut donc être complexe. Dans la suite, on va considérer différents cas selon la nature de \vec{k} :

$\vec{k} = k' + ik''$: * $k' = 0 \Rightarrow \vec{E} \propto e^{+k''x}$ onde évanescente
onde atténuée.

* $k'' = 0 \Rightarrow \vec{E} \propto e^{-k'x}$
propagation sans atténuation.

* $(k', k'') \neq (0, 0) \Rightarrow$ propagation et atténuation.
onde évanescente

III Deux paramètres, τ et ω_p .

A) Cas $\omega\tau \ll 1$ Effet de peau.

On a $\underline{\underline{\epsilon}}(\omega) = \epsilon_0 - i \frac{\sigma(\omega)}{\omega}$ avec $\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau}$ et $\sigma_0 \in \mathbb{R}$.
 $\omega\tau \ll 1$

A.N.: $\sigma_0 = \frac{nq^2}{m} \approx 5,8 \cdot 10^7 \text{ } \Omega^{-1} \text{ m}^{-1} \text{ cm}$

$\omega\tau \ll 1$ donc $\omega \ll 10^{14} \text{ rad. s}^{-1}$

Donc $\frac{\sigma_0}{\omega} \gg \frac{10^8}{10^{14}} = 10^{-6} \gg \epsilon_0$. On peut négliger ϵ_0 devant $i \frac{\sigma_0}{\omega}$.

On a donc $\underline{\epsilon} = \epsilon_0 - i \frac{\sigma_0}{\omega}$

$$\Rightarrow \underline{k}^2 = -\rho_0 i \omega \sigma_0 \Rightarrow k = \sqrt{\rho_0 \omega \sigma_0} \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)$$

k' et k'' sont tous deux différents de 0. On a propagation dans le conducteur sur une épaisseur caractéristique δ

$$\delta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\rho_0 \sigma_0 \omega}}$$

C'est l'effet de peau.

A.N.: Quelle pulsation maximale peut être utilisée dans des fils de cuivre sans pertes?

$$\delta = a: \text{rayon des fils} = 1 \text{ mm} \Rightarrow \underline{\omega} < 100 \text{ kHz}$$

$$\sigma_{\text{Cu}} = 5,8 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$$

→ début de construction du tableau sur le prochain.

B) $\omega \tau \gg 1$

$$\text{On a } \underline{\sigma}(\omega) \approx -i \frac{\sigma_0}{\omega \tau} \text{ donc } \underline{\epsilon}(\omega) = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \frac{1}{\omega \tau} \right)$$

$$\underline{\epsilon}(\omega) = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$$

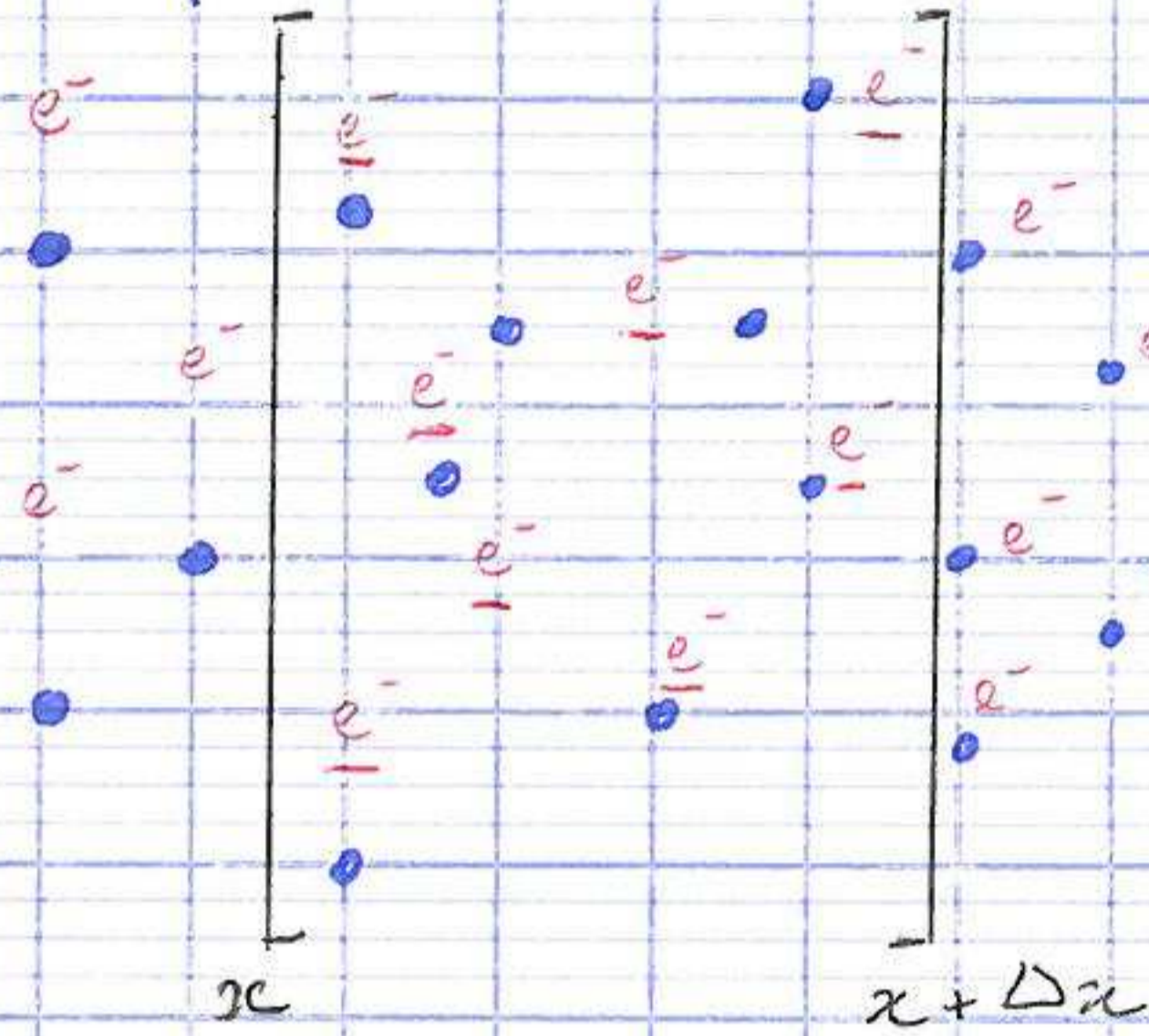
On voit apparaître une pulsation caractéristique ω_p .

On a $\underline{k}^2 = \epsilon_0 \rho_0 (\omega^2 - \omega_p^2)$. On voit que selon le signe de $\omega^2 - \omega_p^2$, on aura différents types de propagation.

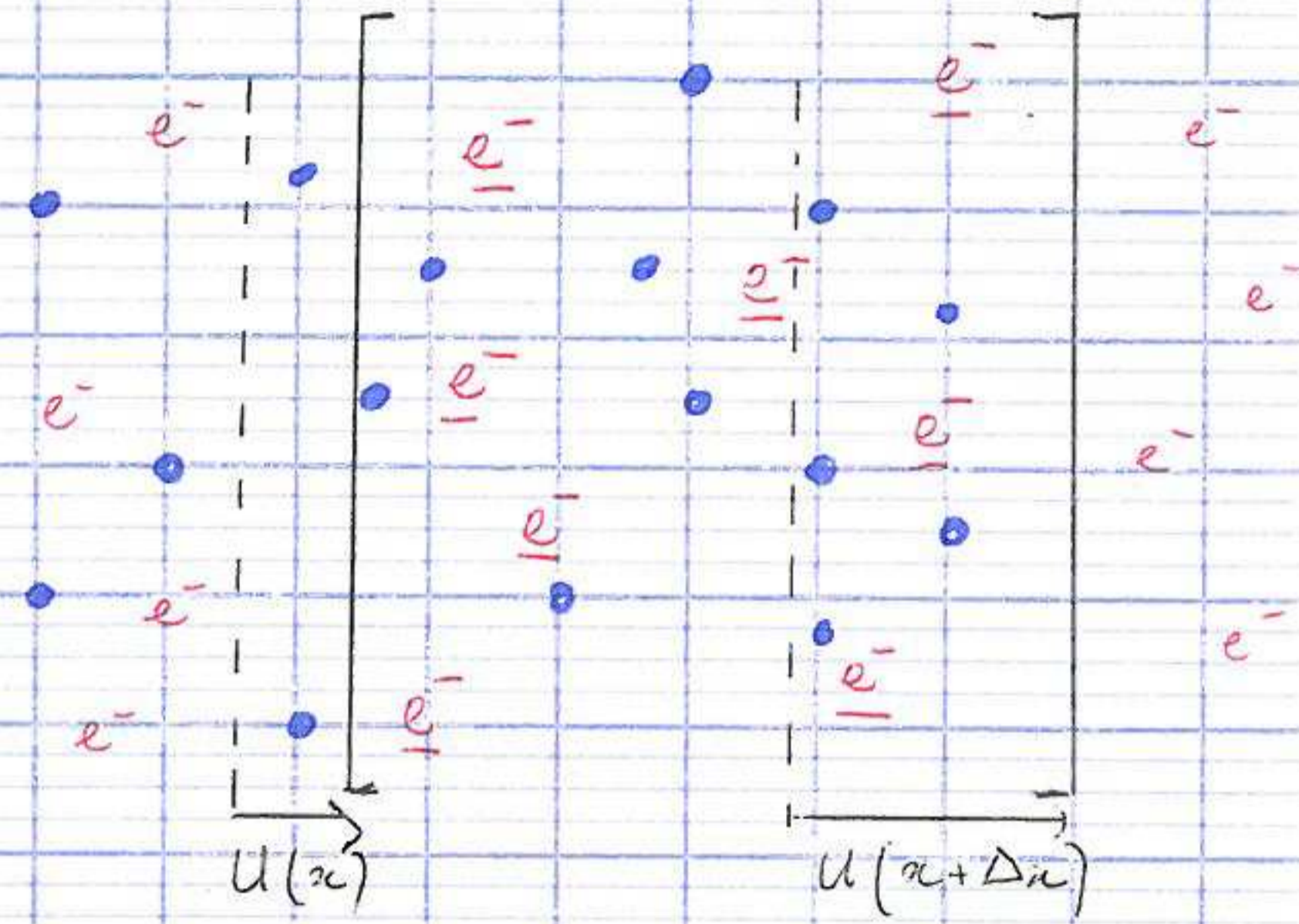
Que représente ω_p , la pulsation plasma? On va en savoir plus en essayant de modéliser la réponse d'un plasma lorsqu'on le met hors équilibre.

Pulsation plasma: (cf Feynman)

À l'équilibre:



Perturbation initiale



• : ions
 e^- : électrons
 $\underline{e^-}$: électrons du système fermé.

Les ions sont supposés fixes, on décale les électrons hors de leur position d'équilibre d'un déplacement $U(x)$.

Soit n_0 la densité d'équilibre.

On a n la densité après perturbation qui vaut

$$n = \frac{\text{NOMBRE D'ÉLECTRONS entre } U(x) \text{ et } U(x+\Delta x) + x + \Delta x}{\text{VOLUME}}$$

$$\text{Soit } n = \frac{n_0 \Delta x}{U(x+\Delta x) + x + \Delta x - (U(x) + x)} = n_0 \frac{1}{1 + \frac{U(x+\Delta x) - U(x)}{\Delta x}}$$

Si on considère une tranche Δx petite devant les variations de U et $\frac{\partial U}{\partial x} \ll 1$, on a alors $n = n_0 \left(1 - \frac{dU}{dx}\right)$

Les ions sont chargés positivement de telle sorte qu'à l'équilibre le plasma est neutre. On a donc $\rho = -(n - n_0)e$
 $\rho = n_0 e \frac{dU}{dx}$

Cherchons maintenant à exprimer le champ électrique \vec{E} résultant.

$$\text{On a } \operatorname{div} \vec{E}' = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Soit, à 1 dimension,

$$\frac{dE_x}{dx} = \frac{n_0 e}{\epsilon_0} \frac{dU}{dx}$$

$$\text{donc } E_x = \frac{n_0 e}{\epsilon_0} U + K \quad \text{avec } K = \text{constante}$$

Mais, initialement $E_x = 0$ donc $K = 0$.

$$\underline{E_x = \frac{n_0 e}{\epsilon_0} U(x)}$$

On va maintenant établir l'équation du mouvement du système.

Soit un électron déplacé de u de sa position d'équilibre. Il subit la force de Lorentz $\|\vec{F}\| = -\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0} U(x)$. C'est une force de rappel.

L'équation du mouvement est $m_e \frac{d^2 u}{dt^2} = -\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0} U$

$$\text{Soit } \underline{\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_p^2 U = 0}$$

On a retrouvé ω_p , pulsation caractéristique du mouvement de relaxation des électrons.

On a donc deux cas à distinguer.

$$* \underline{\omega < \omega_p}$$

$$\text{On a } \underline{k^2 < 0} \quad \text{donc } \underline{k = i \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}} \quad \text{EIR}$$

L'onde est atténuée, on a réflexion de l'onde EM.

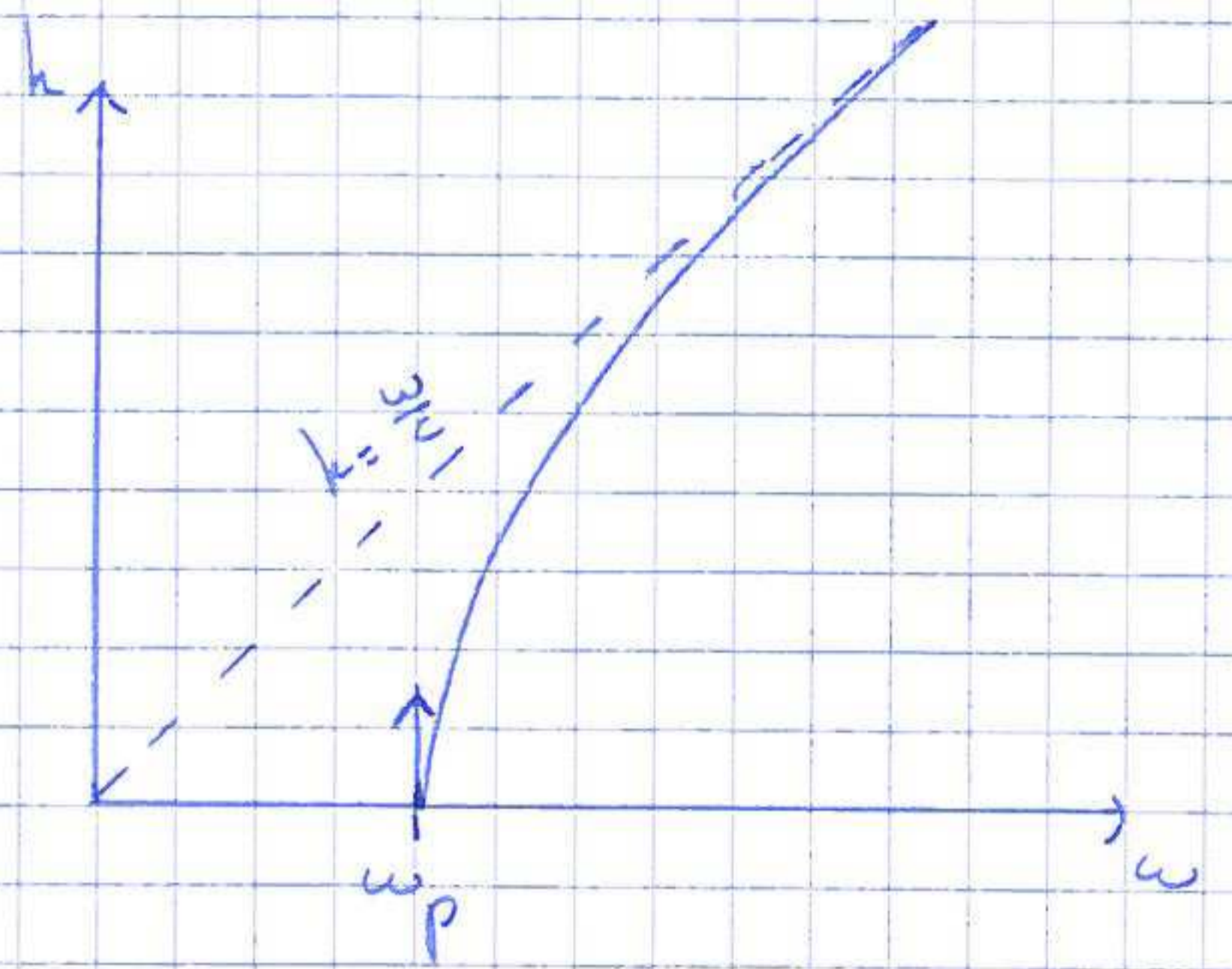
Ordre: Pour le cuivre $\omega_p = 1,6 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1} > \omega \text{ visible}$

Cela explique que les métaux nous apparaissent brillants. On a réflexion dans le visible.

* $\omega > \omega_p$

On a $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$

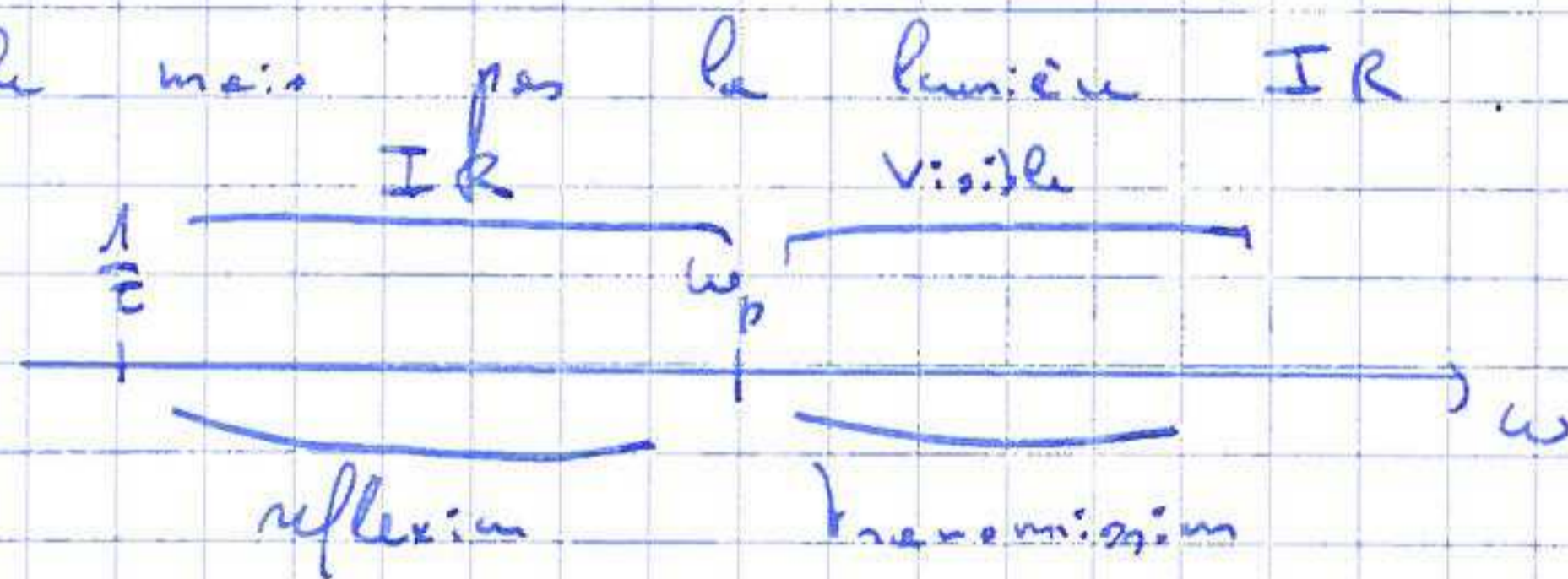
On a propagation sans atténuation.



A haute fréquence on retrouve la relation de dispersion d'une onde EM dans le vide. le milieu est transparent.

C) Exemple d'application.

→ Pour améliorer le chauffage des maisons, on pourrait penser remplacer les vitres par un matériau spécial qui laisserait passer la lumière visible mais pas la lumière IR.



On a pensé au SnO_2 : $N = 2 \cdot 10^{20} \text{ e/cm}^3$

$$\omega_p = 9,4 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$$

Théoriquement ça pourrait marcher mais en pratique il faut appliquer une couche très fine de SnO_2 et dont l'épaisseur est rigoureusement égale sur toute la surface sous peine de voir des irrégularités désagréables.

C'est techniquement très difficile et cher à réaliser.

TABLEAU RECAPITULATIF

\ll //	$\frac{1}{c}$	\gg //	ω_p	ω
$k' \neq 0$ propagation $k'' \neq 0$ atténuation épaisseur du peau $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$ $\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle \neq 0$ dissipation par effet Joule		$k' = 0$ pas de propagation $k'' < 0$ atténuation $\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = 0$ pas de dissipation Onde réfléchie		$k' \neq 0$ propagation $k'' = 0$ pas d'atténuation $\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = 0$ $n = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$

BIBLIOGRAPHIE.

- Ondes électromagnétiques / Relativité / Cours J. BOK, N. HULIN-JUNG
- Feynman cours d'Électromagnétisme 1 FEYNMAN.
- Ondes EM dans le vide et les milieux conducteurs C. GARING.
- Principes de Chimie ATKINS.

Questions: - À l'équilibre dans un conducteur, que vaut \vec{E} ?

→ $\vec{E} = \vec{0}$

- Si on est hors équilibre, quel est le paramètre important ?

→ τ introduit dans le modèle de Drude

- Quelles sont les autres sources de perte d'énergie dans une pièce ?

→ diffusion et convection thermique

- Que représente \vec{v} dans le modèle de Drude ?

→ $\vec{v} = \langle \vec{v}_e \rangle$

- Quelle est la vitesse des électrons ?

→ vitesse de Fermi $\sim 10^6$ m/s. La vitesse d'ensemble \sim mm/s

- Comment distinguer diélectrique et conducteurs ?

- D'où vient la couleur des métaux ?

- Donner un exemple de métaux IR ?

→ OR.

Commentaires: - Bien distinguer le cas $k \ll 0$ (choix de la solution physique)

- Mettre en valeur que le vecteur de Poynting pour une onde évanescente est nul car \vec{E} et \vec{B} sont en quadrature de phase.

- Bien faire la distinction entre interface et intérieur du conducteur.

- Bien sinner.