

# Ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques

*Émilie Tisserond & Clément Moissard*

## Contexte de la leçon

La leçon se destine à des élèves de classe préparatoire de deuxième année.

Nous supposons comme prérequis :

- Ondes électromagnétiques dans le vide et les milieux conducteurs
- Milieux dispersifs
- Condensateurs
- Dipôles électriques
- Modèle de l'électron élastiquement lié

## Introduction

Nous allons étudier, dans cette leçon, l'électromagnétisme dans les milieux isolants (dits diélectriques). Les différences de propriétés entre milieux conducteurs et milieux isolants sont parfois énormes. Par exemple, la conductivité électrique du cuivre ( $\sigma_{\text{Cuivre}} = 10^7 S/m$ ) est de plusieurs ordres de grandeur supérieure à celle du verre ( $\sigma_{\text{Verre}} = 10^{-17} S/m$ ). Cette différence importante vient simplement du fait que les conducteurs ont des électrons libres tandis que les électrons des milieux isolants sont tous liés.

À première vue, on se demande bien pourquoi on étudierait l'électromagnétisme dans un milieu isolant – que pourrait-il bien s'y passer<sup>1</sup> ?

Essayons donc de réaliser l'expérience suivante :

Prenons un condensateur<sup>2</sup>, et plaçons, entre ses armatures, une plaque de verre<sup>3</sup>. En mesurant la capacité avec un multimètre<sup>4</sup>, on voit immédiatement qu'elle augmente lorsque la plaque de verre est présente. Alors finalement si, le milieu isolant a un effet sur le champ électromagnétique. Et puis finalement, n'était-ce pas évident : sachant que la lumière est une onde électromagnétique, pourquoi porterait-t-on des lunettes à longueur de journée si le verre (isolant), n'avait aucun effet sur ce type d'ondes ?

## 1 Qu'est ce qu'un milieu diélectrique ?

D'abord, pourquoi appelle-t-on les milieux *isolants* des milieux *diélectriques* ? Vous avez appris récemment que le champ électromagnétique ne pénètre pas dans les milieux bons conducteurs, à l'inverse, le champ électromagnétique pénètre dans les milieux isolant (on s'en souvient facilement en pensant par exemple que l'on voit à travers un morceau de verre mais pas à travers un morceau de métal). Il est donc naturel de réaliser que le mot "diélectrique" vient du grec " $\delta\iota\alpha$ " ( $\leftrightarrow$  "à travers") et du mot "électrique".

<sup>1</sup> Pour une très belle introduction aux milieux diélectriques, et en particulier la discussion précise de l'expérience du condensateur présentée plus haut, voir Feynman, Électromagnétisme 1

<sup>2</sup> Grand, pour y voir quelque chose

<sup>3</sup> Ou de plexiglass, selon ce que vous avez à disposition

<sup>4</sup> Si la salle peut voir les chiffres affichés c'est mieux

## 1.1 Du microscopique au macroscopique

### cf *Transparent 1*

Nous avons choisi de présenter cette partie dans la continuité de l'expérience précédente, et d'introduire le formalisme de l'électromagnétisme dans les milieux diélectriques dans l'idée de la comprendre. Ce parti pris est difficilement transcrit par écrit mais il nous paraissait plus fluide.

### polarisation $\vec{P}$

Dans un volume mésoscopique  $V$ , on trouve  $N$  dipôles électriques  $\vec{p}_i$ , qui peuvent avoir 3 origines :

### cf *Transparent 2*

- Déformation du nuage électronique des atomes sous l'effet du champ électrique
- Dipôles permanents plus ou moins alignés avec le champ électrique
- Dipôles ioniques dans un réseau cristallin de type  $NaCl$

La moyenne de ces dipôles est ce qu'on appelle le vecteur polarisation  $\vec{P}$  :

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \frac{1}{V} \cdot N \cdot \langle \vec{p} \rangle = n \langle \vec{p} \rangle$$

Dimensions :

$$\vec{P} (C.m^{-2}) = n (m^{-3}) \langle \vec{p} \rangle (C.m)$$

#### Remarque :

- Ferroélectricité : Intrinsèquement  $\vec{P}$  (pas besoin de  $\vec{E}$  extérieur) (découverte en 1950)
- Piézoélectricité :  $\vec{P}$  dû à des contraintes mécaniques (découverte en 1880 par Pierre et Jacques Curie)

### Courant de polarisation $\vec{j}_{pol}$ et densité de charges de polarisation $\rho_{pol}$

Le déplacement des charges donne lieu à une densité de courant volumique :

$$\vec{j}_{pol} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N q_i \vec{v}_i = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

$$\vec{j}_{pol} = \frac{1}{V} N \frac{\partial \langle \vec{p} \rangle}{\partial t}$$

$$\vec{j}_{pol} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} (A.m^{-1})$$

En utilisant l'équation de conservation de la charge, on voit que ce courant est nécessairement associé à une densité volumique de charge  $\rho_{pol}$  :

$$\frac{\partial \rho_{pol}}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}_{pol}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{pol} + \text{div}(\vec{P})) = 0, \forall t$$

$$\rho_{pol} = -\text{div}(\vec{P}) (C.m^{-3})$$

**Remarque :**  $\rho_{pol}$  représente une vraie densité de charge et n'est pas qu'un objet mathématique fictif. La séparation des charges induites par la polarisation de la matière crée des densités de charges plus ou moins élevées en certains endroits.

## 1.2 Les équations de Maxwell dans les isolants

### Cas général

En supposant que les seul(e)s charges et courants sont dû(e)s à la réponse du milieu :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho_{pol}}{\epsilon_0} \\ \operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}_{pol} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

On peut rassembler certains termes :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\underbrace{\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}_{\vec{D}}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\underbrace{\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}_{\vec{D}}) \end{cases}$$

Où on pose  $\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} (C.m^{-2})$

Le vecteur  $\vec{D}$  est le plus souvent simplement appelé  $\vec{D}$ , ou parfois vecteur induction électrique par analogie avec le magnétisme.

♠ On a ajouté une inconnue  $\vec{P}$ , il faut donc ajouter une équation pour pouvoir résoudre le problème. Cette relation, qui lie  $\vec{E}$  et  $\vec{P}$ , est appelé relation constitutive.

### Les diélectriques linéaires, homogènes et isotropes (DLHI)

★ Relation linéaire entre  $\vec{E}$  et  $\vec{P}$  :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \left[ \chi_e \right] \vec{E}$$

où  $\left[ \chi_e \right]$  est la matrice représentative d'un opérateur linéaire, appelée matrice des susceptibilités.

★ homogène :  $\left[ \chi_e \right]$  indépendante du point considéré.

★ isotrope : aucune direction n'est privilégiée

→  $\left[ \chi_e \right] \propto I$  on le notera donc  $\underline{\chi}_e$

Au final : (dans les DLHI)  $\vec{P} = \epsilon_0 \underline{\chi}_e \vec{E}$

**Remarque :** -  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$  dans la même direction - Expérimentalement, on constate qu'ils sont également dans le même sens, c'est à dire  $\operatorname{Re}(\underline{\chi}_e) > 0$

### Équations de Maxwell dans les DLHI

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\epsilon_0(1 + \underline{\chi}_e)\vec{E}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 (1 + \underline{\chi}_e) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

On pose  $\epsilon_r$  la permittivité relative  $\epsilon_r \equiv 1 + \underline{\chi}_e$

★  $\epsilon_r$  est sans dimension

★ dans le vide  $\epsilon_r = 1$

★ OdG :

eau(20°C)  $\epsilon_r \sim 80$  (milieu polaire)

verres  $\epsilon_r \sim 4$  à 7

plexiglas  $\epsilon_r \sim 3$  à 4

titanate de Baryum  $\epsilon_r \sim 1500$  (ferroélectrique)

On pose parfois  $\epsilon$  la permittivité du milieu  $\epsilon \equiv \epsilon_0 \epsilon_r$ <sup>5</sup>

<sup>5</sup> Ce sont les travaux de Lorentz (le même que les transformations de Lorentz) sur l'électromagnétisme dans les milieux qui ont permis de clarifier la situation. Avant lui, on écrivait toujours les équations de Maxwell avec  $\epsilon$  et on pensait que le vide était un cas particulier où  $\epsilon$  valait  $\epsilon_0$ . Depuis Lorentz, on sait que les équations de Maxwell écrites avec  $\epsilon_0$  et les termes de sources sont toujours vraies : c'est ce que l'on comprend de l'électromagnétisme au niveau le plus fondamental. Ensuite, une fois écrites, on cherche quelles sont les charges et les courants, et éventuellement, sous certaines conditions, on retrouve les équations de Maxwell sans sources, avec

## 2 La propagation des ondes électromagnétiques dans les DLHI

Maintenant que l'on a compris que les milieux diélectriques avaient un effet non négligeable sur le champ électromagnétique et que l'on a mis en place les concepts permettant de les décrire mathématiquement, on peut naturellement se demander quel serait l'effet d'un tel milieu sur la propagation d'une onde électromagnétique.

### 2.1 Réponse du milieu DLHI

Dans un DLHI dilué,

$$\vec{P}(\omega) = \epsilon_0 \underline{\chi}_e(\omega) \vec{E}(\omega)$$

$\vec{P}$  peut être assimilé à la réponse du milieu et  $\vec{E}$  à l'excitation.

*cf Transparent 3*

### 2.2 Équation de propagation et relation de dispersion

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$$

$$\begin{aligned} \vec{\Delta} \vec{E} &= \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E})) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})) \\ &= \overrightarrow{\text{rot}} \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \mu_0 \epsilon (1 + \underline{\chi}_e) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

⇒ Équation de propagation :

$$\vec{\Delta}(\vec{E}) - \frac{1}{c^2} \epsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

⇒ Relation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\epsilon_r \omega^2}{c^2}$$

$$\vec{k} = \vec{k}_1 - j \vec{k}_2$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \underbrace{e^{-\vec{k}_2 \cdot \vec{r}}}_{\text{absorption}} \underbrace{e^{j(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})}}_{\text{propagation}}$$

### 2.3 Permittivité relative et indice du milieu

$\epsilon_r$  réel – indice optique réel

Quand  $\epsilon_r$  est réel.

★

$$k = \sqrt{\epsilon_r} \frac{\omega}{c}$$

---

une permittivité modifiée  $\epsilon$ . Ceci est très bien expliqué dans le Feynman à la fin du chapitre sur les diélectrique, ou au tout début du B.F.R., Electromagnétisme 4.

★ vitesse de phase :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} \longrightarrow \boxed{v_\phi = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}}$$

Optique : indice optique

$$n(\omega) = \frac{c}{v_\phi}$$

$$\longrightarrow \boxed{n(\omega) = \sqrt{\epsilon_r(\omega)}}$$

C'est donc l'étude des milieux diélectriques qui permet (enfin) de comprendre d'où vient l'indice optique, tant utilisé depuis le début de la classe préparatoire<sup>6</sup>.

★ zones de transparence

*cf Transparent 4*

$\epsilon_r$  complexe – indice optique complexe

★

$$\underline{\epsilon_r} = \epsilon_1 - j.\epsilon_2$$

★

$$\underline{n} = n_1 - j.n_2 \ ; \ n_1, n_2 > 0$$

$n_1$  = indice de réfraction,  $n_2$  = indice d'extinction

★

$$\underline{k} = k_1 - j.k_2$$

★ zones d'absorption

*cf Transparent 4*

exemples

*cf Transparent 5*

★ verre : zone d'absorption dans UV (protection solaire)

★ effet de serre : molécules  $H_2O$ ,  $CO_2$  dans l'atmosphère absorbent le rayonnement IR ce qui provoque l'échauffement de celle-ci

## Conclusion

Au cours de cette leçon, on a vu que les milieux "isolants" avaient un effet prononcé sur les champs électromagnétiques qui les traversaient, et en particulier sur les ondes électromagnétiques. On peut également retourner en quelque sorte le problème, et considérer l'effet que peut avoir un champ électromagnétique sur le milieu : l'application la plus connue étant le four à micro-ondes, où on force l'oscillation des dipôles dans le milieu pour échauffer celui-ci.

## Questions

- Qu'est ce que la dispersion normale, anormale ?

*Aller voir dans le Portelli "La physique par la pratique"*

- Signe de  $k_2$  ? Quel argument peut-on donner pour justifier ce signe ?

*A priori, pour un diélectrique, on a toujours absorption : le champ EM fournit de l'énergie à la matière, il est donc tentant de répondre que  $k_2 > 0$ . Cependant, comme l'a subtilement fait remarquer Antoine, on peut très bien avoir*

<sup>6</sup> Il peut être particulièrement jouissif ici de lire le chapitre sur l'indice de réfraction dans les leçons de physique de Feynman (Mécanique 2), et de ce rendre compte que ce dont il parle comme de "quelque chose de compliqué", on sait le faire.

absorption sans atténuation, dans le cas, par exemple d'une onde sphérique convergente.

- Au début de la leçon, vous donnez  $\epsilon_r(\text{eau}) \sim 80$  puis plus tard, on apprend que  $n = \sqrt{\epsilon_r}$ , ce qui donnerait une valeur aberrante pour l'indice optique de l'eau. D'où vient la subtilité ?

*La valeur  $\epsilon_r(\text{eau}) \sim 80$  est valable en statique. Au fur et à mesure de l'augmentation de la pulsation d'excitation  $\omega$  certains processus de polarisation sont gelés. Pour l'eau par exemple, les molécules n'ont plus le temps de se tourner avec le champ électrique, et seul le nuage électronique "a le temps" de se déformer, ce qui conduit à une diminution significative de  $\epsilon_r$*

- Justification physique de  $\epsilon_r$  complexe ?
- Dans le modèle de l'électron élastiquement lié, qu'est ce qui nous donne le droit d'utiliser une force harmonique ?
- Pouvez-vous lier votre transparent sur l'absorption à des phénomènes quantiques d'absorption ?
- Vous dites que  $\epsilon_r$  dépend de  $\omega$ , donnez des exemples physiques ? *Prismes, arcs en ciel*
- Avez-vous entendu parler de notion d'accord de phase ?
- Qu'est ce que l'effet Faraday ?
- Exemples de matériaux présentant une polarisation de type ionique ?

## Commentaires

- Pas certain que ce soit une bonne idée de passer les 30 premières minutes à introduire/définir les milieux diélectriques et pense préférable de placer la notion en prérequis pour ne s'intéresser par la suite qu'aux phénomènes ondulatoires dans ce type de milieu.

- Le modèle de l'électron élastiquement lié est central dans la compréhension car c'est le modèle microscopique de l'effet d'une onde sur le milieu.

- Expérience intéressante pour illustrer cette leçon :

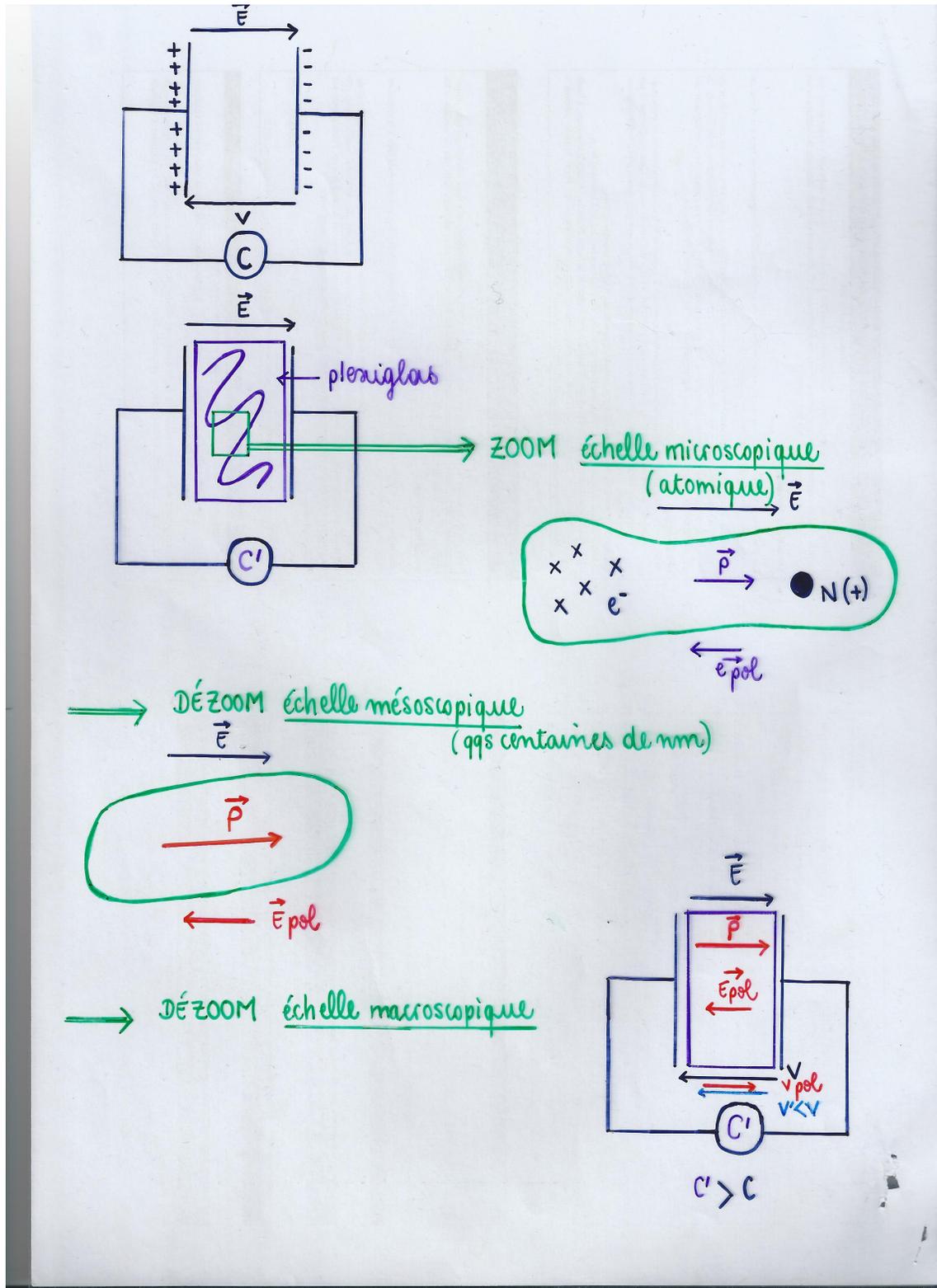
Envoyer un faisceau de lumière blanche sur un prisme : illustre la notion de dispersion. Puis placer, avant le prisme, une cuve de  $KMnO_4$  (Permanganate de potassium), qui absorbe entre le bleu et le rouge. On ne voit alors plus tout le spectre de la lumière blanche : illustre la notion d'absorption.

## 3 References

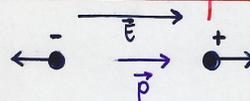
- [1] Ondes Hprepa
- [2] Milieux diélectriques, Garing
- [3] Electromagnétisme 2, BFR
- [4] Physique des ondes Précis de Bréal
- [5] Electromagnétisme 1 Feynman

# 4 Annexe : Transparents

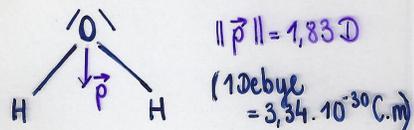
## Transparent 1



\* polarisation ionique



\* polarisation d'orientation



**POLARISATION ÉLECTRONIQUE**

Transparent 3

\* oscillateur harmonique amorti :

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{q\vec{E}}{m} \leftarrow \text{interaction champ/milieu}$$

$$\begin{cases} Q = \omega\tau \equiv \text{facteur de qualité} \quad (Q \sim 10^3 - 10^4) \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \equiv \text{pulsation propre} \end{cases}$$

\*  $\vec{r} = \vec{r}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$

$$\vec{r} = \frac{q}{m\omega_0^2} \frac{1}{(1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2) + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}} \vec{E}$$

\*  $\begin{cases} \text{moment dipolaire élémentaire : } \vec{p} = q\vec{r} \\ \text{vecteur polarisation : } \vec{P} = N\vec{p} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \end{cases}$

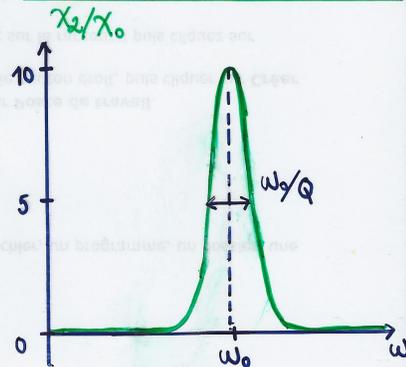
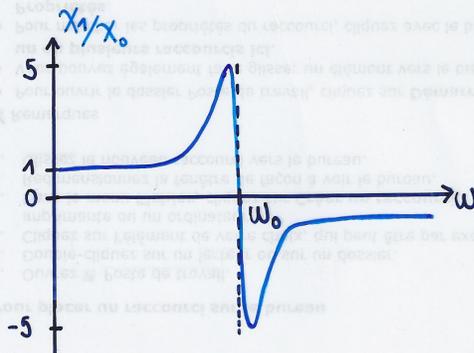
$$\chi_e = \chi_0 \frac{1}{(1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2) + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}$$

avec  $\chi_0 \equiv \frac{Nq^2}{m\epsilon_0 \omega_0^2}$

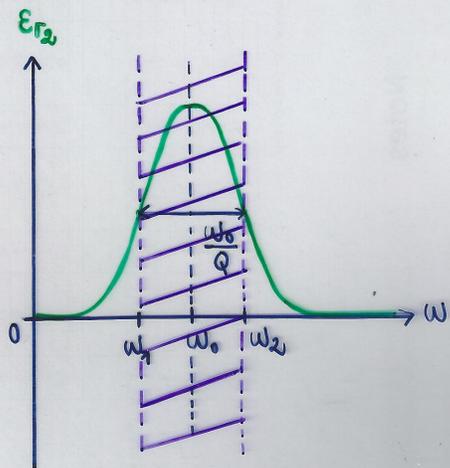
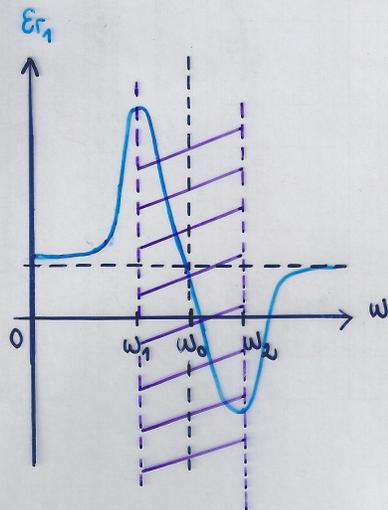
$$\chi_e = \chi_1 - j\chi_2$$

$$\chi_1 = \chi_0 \frac{1 - (\omega/\omega_0)^2}{(1 - (\omega/\omega_0)^2)^2 + (\omega/\omega_0 Q)^2}$$

$$\chi_2 = \chi_0 \frac{\omega/\omega_0 Q}{(1 - (\omega/\omega_0)^2)^2 + (\omega/\omega_0 Q)^2}$$



Transparent 4



-  zone de transparence
-  zone d'absorption

Transparent 5

