

Niveau L2

- Préquis :
- * milieux polarisés
 - * Propagation d'une onde plane progressive monochromatique dans le vide (OPPM)
 - * Résonance du point : oscillation harmonique (forcé et amorti)

La propagation de ondes dans la matière est un problème crucial dans la vie quotidienne notamment en ce qui concerne la propagation de ondes radio (doivent traverser la mer). Deux cas distincts de matériaux doivent être distingués : les milieux conducteurs et les milieux diélectriques, objet de notre étude. (NB : dans la réalité, les deux caractéristiques, conducteurs et diélectriques doivent être traités simultanément).

I/ Les équations de Maxwell dans les milieux

On introduit ici des rappels essentiels pour la compréhension de la suite de la leçon.

Dans les milieux, les équations de Maxwell écrites avec les champs \vec{E} et \vec{B} font intervenir

la densité totale de charge et la densité de courant totale :

$$\begin{cases} \rho_{\text{total}} = \rho_{\text{libre}} + \rho_{\text{lié}} \\ \vec{J}_{\text{total}} = \vec{J}_{\text{libre}} + \vec{J}_{\text{lié}} \end{cases}$$

où $\begin{cases} \rho_{\text{libre}} \\ \vec{J}_{\text{libre}} \end{cases}$ désigne les charges apportées par le milieu extérieur tandis que $\rho_{\text{lié}}$ correspond

à des charges liées i.e. ne participant pas à la conduction.

→ On souhaite s'affranchir de la contribution de charges et courant liés. On introduit donc

certains vecteurs \vec{D} et \vec{H} définis comme $\begin{cases} \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{K} \end{cases}$ avec $\begin{cases} \rho_{\text{lié}} = -\text{div } \vec{P} \\ \vec{J}_{\text{lié}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \text{rot } \vec{K} \end{cases}$

On réécrit les équations de Maxwell avec \vec{D} et \vec{H}

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{D} = \rho_{\text{libre}} \\ \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{H} = \vec{J}_{\text{libre}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

On n'a plus la contribution de charges et courant liés!

Pour un DLHI (diélectrique linéaire homogène isotrope), \vec{D} et \vec{H} s'expriment finalement en fonction de \vec{E} et \vec{B} :

$$\begin{cases} \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\vec{E}}{\epsilon_0} \\ \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \end{cases}$$

II/ Equation de propagation et relation de dispersion

Outre l'hypothèse DLHI, nous sommes amenés à faire quelques approximations supplémentaires. On considère un milieu non magnétique : $\mu_r \approx 1 \rightarrow \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ et $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$

En outre, on considère un milieu sans charges/courants libres : $\rho_{lib} = \begin{cases} \rho_{lib} = 0 \\ \vec{j}_{lib} = \vec{0} \end{cases}$

Enfin on considère des champs électrostatiques et magnétostatiques complexes : $\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0(\vec{r}) e^{-i\omega t} \\ \vec{D} = \vec{D}_0(\vec{r}) e^{-i\omega t} \end{cases}$. On

reprend avec les champs "habituels" \vec{E} et \vec{B} au sens habituel de la relation de passage entre \vec{D} et \vec{E} d'une part et \vec{B} et \vec{H} d'autre part. \vec{D} et \vec{H} nous ont servi à exprimer les équations de Maxwell en l'absence de ρ_{lib} et \vec{j}_{lib} pour pouvoir ensuite faire $\begin{cases} \rho_{lib} = 0 \\ \vec{j}_{lib} = \vec{0} \end{cases}$. Une

fois cette manipulation effectuée on reprend avec des champs \vec{E} et \vec{B} .

$$\text{Maxwell} \Rightarrow \begin{cases} \text{rot } \vec{E}_0(\vec{r}) = -i\omega \vec{B}_0(\vec{r}) & (1) \\ \text{div } \vec{D}_0(\vec{r}) = 0 & (2) \\ \text{div } \vec{D}_0(\vec{r}) = 0 \Rightarrow \epsilon_r \text{div } \vec{E}_0 = 0 & (3) \\ \text{rot } \vec{H}_0 = -i\omega \vec{D}_0 \Rightarrow \text{rot } \vec{B}_0(\vec{r}) = +i \frac{\omega}{c^2} \epsilon_r \vec{E}_0 & (4) \end{cases}$$

Dans l'éq (3), on a pu écrire ϵ_r de la divergence car le milieu est homogène (ϵ_r ne dépend pas de \vec{r})

A noter (judicieux) que ϵ_r est ici une grandeur complexe ! La partie imaginaire de ϵ_r n'est pas écartée au premier abord. Néanmoins elle-ci apparaît de façon beaucoup plus naturelle lors de l'étalonnage d'un modèle microscopique (partie résonante).

NB: Comme solution de l'équation (3), on pense immédiatement à $\text{div } \vec{E}_0 = 0$. Et pour cause, c'est la solution qui nous intéresse ici. Cependant, la solution $\epsilon_r = 0$ est elle aussi une solution physique - elle correspond au cas d'une onde longitudinale ($\vec{E} // \vec{k}$) purement électrique ($\vec{B} = \vec{0}$). Un tel type d'onde n'obtient dans le milieu conducteur tel que le métal ou encore le fer, mais sort du cadre de cette leçon.

Pour obtenir l'équation d'onde, on utilise $\text{rot rot}(\vec{F}) = \text{grad div}(\vec{F}) - \Delta(\vec{F})$

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{rot rot } \vec{E}_0(\vec{r}) &= \text{rot}(i\omega \vec{B}_0) = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r \vec{E}_0 = \text{grad div } \underbrace{\vec{E}_0}_{=0} - \Delta \vec{E}_0 \\ \Rightarrow \Delta \vec{E}_0 + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r \vec{E}_0 &= \vec{0} \quad \text{et, de même,} \quad \Delta \vec{D}_0 + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r \vec{D}_0 = \vec{0} \end{aligned}$$

approximation supplémentaire: on considère une OPPM: $\vec{E}_0(\vec{r}) = \vec{E}_m e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}}$ 3

La même surface de k est directement reliée à la même surface de ϵ_r : sort de la relation de dispersion que nous déterminons maintenant:

$$\rightarrow \Delta \vec{E}_0(\vec{r}) = -k^2 \vec{E}_0(\vec{r}) \rightarrow k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r = 0 \quad ; \text{ Si } \epsilon_r \text{ est}$$

complexe, k^2 l'est aussi nécessairement!

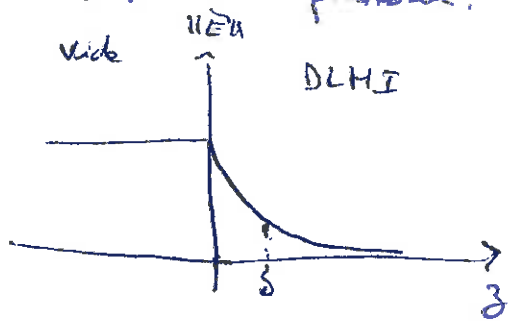
$\Rightarrow k$ et ϵ sont complexes:

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \epsilon_r' + i \epsilon_r'' \\ k &= k' + i k'' \\ &= (k' + i k'') \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_m e^{-k'' z} e^{-i(\omega t - k' z)}$$

atténuation: $e^{-k'' z}$ ou donne un terme de propagation identique à la propagation d'une OPPM dans le vide)
 $S \approx \frac{1}{|\omega|^2}$

δ : profondeur de pénétration:



Autre façon de définir δ : à partir de l'énergie et non de l'amplitude: il faut calculer dans le volume du boîtier.
 → Justification.

n indice optique et lui aussi complexe: $n = \sqrt{\epsilon_r} = n' + i n''$

\swarrow indice de réflexion
 \searrow indice d'extinction

$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r(\omega)$: nécessité d'un modèle microscopique pour préciser la dépendance en ω de $\epsilon_r(\omega)$.

III / Théorie classique de la dispersion

On cherche ici à préciser la dépendance en fréquence de la permittivité. On va modéliser notre milieu diélectrique comme un ensemble d'oscillateurs harmoniques de pulsation ω_0 , amortis avec un coefficient de frottement $\frac{\gamma}{2}$ et soumis à l'action d'une force extérieure. La force de Lorentz (\vec{E} et \vec{B} nat) dans le milieu l'onde qui se propage).

Il est important de noter ici que cette modélisation trouve ses fondements en mécanique quantique où les différents paramètres de notre système correspondent à une réalité physique. Ainsi, ω_0 peut être directement relié à la fréquence de résonance pour passer d'un état quantique à un autre (Énergie de transition $h\omega$). Quant au coefficient d'amortissement, il peut être relié à la largeur de la raie de transition.

→ transparent ici ?

Pg : contribution de la partie magnétique de la force de Lorentz :

$$\vec{F}_{Lorentz} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

$$\frac{F_m}{F_e} = \frac{vB}{E} \text{ et } E \approx BC \quad (h \wedge E = vB \text{ et } v = kc) \Rightarrow \frac{F_m}{F_e} \approx \frac{v}{c} \ll 1$$

(Dans un atome isolé, l'atome d'H par exemple, la vitesse typique des électrons vaut αc avec $\alpha = \frac{1}{137} \Rightarrow \alpha \ll 1$)

1) relation diélectrique : on considère que le déplacement (oscillation) est en phase avec \vec{E} .
 C'est le principe fondamental de la diélectrique pour un oscillateur. On appelle oscillateur le dipôle formé par la répartition de charge due à l'onde EM se propageant dans le milieu (répartition de charge est un nuage électronique déformé, entre un cation et un anion qui vibrent sur une molécule cristalline). C'est le moment dipolaire $\vec{p} = q \vec{u}$ où \vec{u} représente "l'élongation" par rapport à la situation d'équilibre (en l'absence d'onde).
 $\vec{u} = \vec{u}_0 e^{-i\omega t}$ (de la même forme que $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$).
 \vec{u} : vecteur position

RFD $m \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} = \underbrace{q \vec{E}}_{\text{force extérieure}} - \underbrace{\frac{m}{\tau} \frac{d\vec{u}}{dt}}_{\text{force de frottement}} - \underbrace{m \omega_0^2 \vec{u}}_{\text{force de rappel}}$

$$-m\omega^2 \vec{u}_0 = q \vec{E}_0 + i \frac{m}{\tau} \omega \vec{u}_0 - m\omega_0^2 \vec{u}_0 \Rightarrow \vec{u}_0 = \frac{q}{m[(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega/\tau]} \vec{E}_0$$

On remarque à $\underline{\epsilon}$, on parle d'abord à partir à la multiplicité $\underline{\chi}$ ($\underline{\epsilon} = 1 + \underline{\chi}$)

elle nous relie au vecteur polarisation \vec{P} par la relation $\vec{P} = \epsilon_0 \underline{\chi} \vec{E}$

On $\vec{P} \equiv$ nombre de moment dipolaires par unité de volume $\Rightarrow \vec{P} = n_p q \vec{u} = \vec{P}_0 e^{-i\omega t}$

$$\Rightarrow \vec{P}_0 = \frac{n_p q^2}{m[(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega/\tau]} \vec{E}_0$$

↑
sensité volumique de l'oscillation

On $\vec{P}_0 = \epsilon_0 \chi(\omega) \vec{E}_0$ d'où $\chi(\omega) = \chi(\omega) \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega/\tau}$ avec $\chi(\omega) = \frac{nrq^2}{m \epsilon_0 \omega^2}$

$\chi(\omega)$ représente la susceptibilité à pulsation nulle.

Les parties réelles et imaginaires valent :

$$\chi'(\omega) = \chi(\omega) \frac{\omega_0^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2}$$

$$\chi''(\omega) = \chi(\omega) \frac{\omega_0^2 \omega/\tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2}$$

$\epsilon_r = 1 + \chi$

On peut tracer l'évolution de la permittivité en fonction de ω !
 → transparent.

3) Etude de cas

On considère la situation simplifiée où l'on peut négliger l'amortissement (et donc l'absorption) :
 $\omega_0^2 - \omega^2 \gg \omega/\tau$: on se place loin de toute résonance.

la susceptibilité est alors réelle et s'exprime comme $\chi(\omega) = \chi(\omega) \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$
 et $\epsilon_r = \epsilon_r'(\omega) = 1 + \chi(\omega) = 1 + \chi(\omega) \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} + 1$
 où l'on a introduit la pulsation plasma $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m \epsilon_0}$

On peut à nouveau tracer $\epsilon_r(\omega)$ dans la cadre de cette approximation. Ici on a → transparent
 la dispersion à $\omega = \omega_0$ n'est pas physique, elle provient du fait que l'on a négligé l'absorption.
 Néanmoins cela nous indique une forte dispersion (ϵ varie rapidement avec ω).
 Pour des ω très grands $\epsilon_r(\omega) \approx \epsilon_r(\infty) = 1$: on se retrouve dans un cas où la lumière se propage dans le vide (sans dispersion et à la vitesse c).

Pour des ω très faibles $\epsilon_r(\omega) \approx \epsilon_r(0)$, il n'y a ici aucune dispersion, on se retrouve dans un cas de propagation sans dispersion mais cette fois la propagation se fait à la vitesse $v_{ph} = c/n$ ou $n = \sqrt{\epsilon_r(0)}$.
 Pq : la vitesse de phase peut être supérieure à c , mais pas la vitesse de groupe (c'est elle qui transporte l'information).

La pulsation ω_p pour laquelle la permittivité s'annule vaut $\omega_p^2 = \omega_0^2 + \omega^2$

On peut aussi voir les choses différemment et tracer $\omega = f(k)$.
 Pour cela, on utilise de la relation de dispersion:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

$$k^2 c^2 (\omega_0^2 - \omega^2) = \omega^2 (\omega_0^2 - \omega^2) + \omega^2 \omega_p^2$$

$$\omega^4 - \omega^2 (k^2 c^2 + \omega_0^2 + \omega_p^2) + k^2 c^2 \omega_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega_{\pm}^2 = \frac{k^2 c^2 + \omega_0^2 + \omega_p^2}{2} \pm \left[\left(\frac{k^2 c^2 + \omega_0^2 + \omega_p^2}{2} \right)^2 - k^2 c^2 \omega_0^2 \right]^{1/2}$$

→ transparent

On obtient deux couples de dispersion ω_+ et ω_- séparés par une bande interdite = l'onde ne peut se propager pour les pulsations considérées \Rightarrow correspond à une permittivité négative: onde évanescente. Milieu \Rightarrow réflecteur parfait.

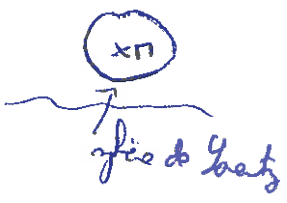
On retrouve ainsi le fait que pour le gaz, ω des modes se propage comme dans le vide (ω_+).
 Quant à ω_- , pour de faibles k , ω_- est une propagation à $v \neq c$.

3) Milieu dense.

Jusqu'à présent, on a considéré des milieux dilués (gaz à basse pression) où les oscillateurs étaient éloignés les uns des autres.

Cependant pour des milieux denses, on ne peut plus assimiler le champ \vec{E} au champ local ressenté au niveau atomique/moléculaire.

→ Nécessité d'établir une correction pour tenir compte du champ créé par les autres oscillateurs. Cette correction est apportée dans le modèle de champ de Lorentz.



$$\vec{E}_{local} = \underbrace{\vec{E}_{applied}}_{\text{champ macroscopique } \vec{E}} + \underbrace{\vec{E}_d}_{\text{champ de polarisation}} + \underbrace{\vec{E}_c}_{\text{champ de Gaetz}} + \underbrace{\vec{E}_{dip}}_{\text{champ de l'interaction et des autres fils, nul dans le cas d'une géométrie cubique.}}$$

Dans le cas d'une spère, argent métallique

$$\vec{P} = -\frac{\rho}{3\epsilon_0}$$

$$\text{d'où } \vec{E}_d = +\frac{\rho}{3\epsilon_0} = \frac{mq}{3\epsilon_0} \vec{u}$$

L'équation du mouvement s'écrit donc :

$$-m\omega^2 \vec{u}_0 = q\vec{E}_0 + \frac{mq^2}{3\epsilon_0} \vec{u}_0 - i\frac{\omega}{\tau} \vec{u}_0 - m\omega_0^2 \vec{u}_0$$

$$= q\vec{E}_0 - i\frac{\omega}{\tau} \vec{u}_0 - m\left(\omega_0^2 - \frac{mq^2}{3m\epsilon_0}\right) \vec{u}_0$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\omega_0'^2}$

→ au final on a juste un déplacement de la pulsation de résonance !

4) Les différents types de polarisation

→ transverse

* électrique

* magnétique

* d'orientation

5) Application: Loi de Cauchy
 $\omega_{visible} \ll \omega_{p,e}$ $\omega_{visible} \gg \omega_{p,e}$

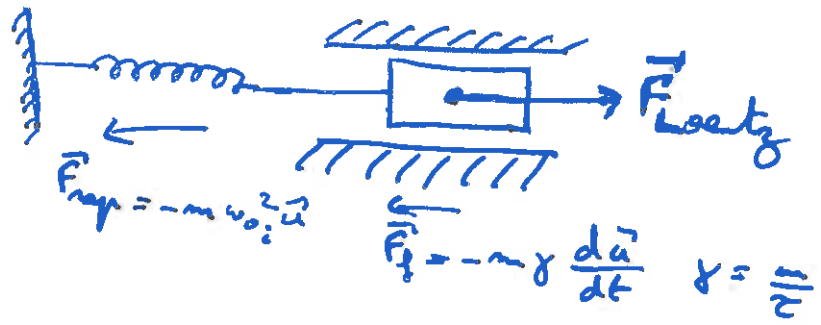
$$\epsilon_r' = n^2 = 1 + \chi_e(\omega) \frac{\omega_{p,e}^2}{\omega_{p,e}^2 - \omega^2} = 1 + \chi_e(\omega) \frac{1}{1 - \omega^2/\omega_{p,e}^2} \approx 1 + \chi_e(\omega) \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_{p,e}^2}\right)$$

$$= 1 + \chi_e(\omega) \left(1 + \frac{1}{\omega_{p,e}^2} \frac{(2\pi c/\lambda)^2}{\lambda^2}\right) \Rightarrow n^2 = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

$$\Rightarrow n = \left(A + \frac{B}{\lambda^2}\right)^{1/2} = A^{1/2} \left(1 + \frac{B}{A\lambda^2}\right)^{1/2}$$

et si $\frac{B}{A\lambda^2} \ll 1$ alors

$$n \approx C + \frac{D}{\lambda^2} \quad \text{Loi de Cauchy}$$



~~longueur caractéristique~~
 τ

