

LP25 : Propagation dans un milieu dispersif

Niveau : CP

Prérequis : phénomènes ondulatoires et équation de D'Alembert, notions d'électromagnétisme et de mécanique des fluides

Jusqu'à présent, différents phénomènes ondulatoires ont été étudiés dans des domaines variés de la physique conduisant à chaque fois à l'établissement d'une équation d'onde particulière, l'équation de propagation de D'Alembert que l'on rappelle ici :

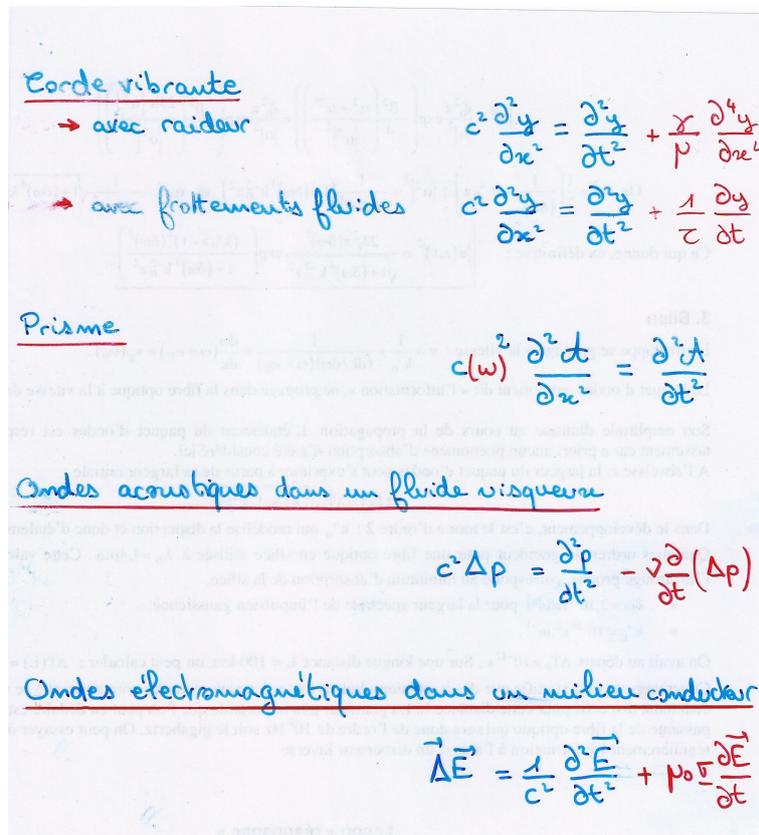
$$c^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} .$$

Mais, par exemple, si cette équation permet de comprendre pourquoi le guitariste pince les cordes de sa guitare, elle n'explique pas le fait qu'il soit obligé de les changer régulièrement. C'est la prise en compte plus précise du milieu traversé lors de la propagation qui le permet avec l'ajout de termes spécifiques à l'équation de D'Alembert qui font alors émerger le phénomène de dispersion.

1 Équation de D'Alembert modifiée

1.1 Prise en compte du milieu

⇒ *transparent*



1.2 Tentative de résolution

On s'intéresse plus particulièrement dans ce paragraphe à la deuxième équation écrite sur le transparent précédent :

$$c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial y}{\partial t} .$$

De manière générale, cette équation rend compte des pertes qui peuvent se produire lors de la propagation d'une onde dans un milieu avec le terme $1/\tau \frac{\partial y}{\partial t}$ qui ne se conserve pas par renversement du temps et qui est donc caractéristique des phénomènes dissipatifs.

Pour résoudre cette équation, on utilise le formalisme des ondes planes progressives harmoniques (OPPH) et on suppose $y(x, t)$ de la forme $y(x, t) = y_0 e^{j(\omega t - kx)}$. On obtient alors :

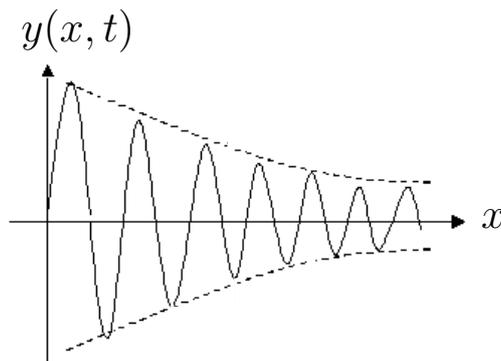
$$c^2 (-jk)^2 = (j\omega)^2 + j \frac{\omega}{\tau} \Rightarrow \boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j \frac{\omega}{\tau}} : \text{c'est la relation de dispersion .}$$

Cette relation de dispersion est complexe. On fait alors le choix de prendre ω réel car c'est usuellement un paramètre réglé par un opérateur ; k est donc complexe et on le note désormais : $\underline{k} = k_1 - jk_2$ ¹ avec k_1 et k_2 des réels. On a alors : $y(x, t) = y_0 e^{j(\omega t - (k_1 - jk_2)x)}$ et

$$y(x, t) = \underbrace{y_0 e^{-k_2 x}}_{\text{enveloppe}} \times \underbrace{e^{j(\omega t - k_1 x)}}_{\text{propagation}} .$$

Si $k_2 > 0$, il y a atténuation² de l'onde au cours de sa propagation (cf. figure ci-dessous) ; si $k_2 < 0$, il y a amplification de l'onde au cours de sa propagation.

$$\boxed{k_2 > 0}$$



L'onde qui se propage n'a plus exactement une forme sinusoïdale, elle apparaît déformée. On parlera alors de pseudo-onde plane progressive harmonique, que l'on notera par la suite OPPH*.

1. Attention! Lors de la présentation de cette leçon, une erreur de signe a été commise sur cette définition de \underline{k} . Elle entraîne par la suite des incohérences avec les notions d'atténuation et d'amplification qui ont été introduites. Dans ce compte-rendu l'erreur est corrigée.

2. L'atténuation de l'onde peut être due à de l'absorption par le milieu traversé mais elle peut également être causée par d'autres phénomènes comme la diffusion (voir la section *Questions*).

1.3 Vitesse de phase

La relation de dispersion à laquelle on vient d'aboutir étant complexe, on ne peut plus définir comme habituellement la vitesse c par la relation $\underline{k} = \frac{\omega}{c}$ car la vitesse c serait alors une grandeur complexe. On introduit donc une nouvelle notion, celle de la **vitesse de phase** définie comme suit :

$$v_\varphi \equiv \frac{\omega}{k_1}.$$

En toute généralité, v_φ peut dépendre de la pulsation ω : $v_\varphi = v_\varphi(\omega)$. Dans ce cas, le milieu est dit « dispersif »³.

2 Ondes réalistes et influence du milieu

2.1 Paquet d'ondes

Rappel :

On peut décomposer les signaux périodiques, quelle que soit leur forme, en série de Fourier :

$$s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c(\omega) e^{j\omega t}.$$

Cette décomposition est généralisable à l'ensemble des signaux, non nécessairement périodiques, et s'écrit dans ce cas :

$$s(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{s}(\omega) e^{j(\omega t - kx)} d\omega.$$

2.2 Propagation du paquet d'onde

En physique, les signaux envoyés se limitent généralement à une certaine gamme de fréquences ou, de manière équivalente, à une certaine gamme de pulsations. Ainsi, $s(x, t)$ se réécrit comme :

$$s(x, t) = \int_{\omega_0 - \frac{d\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{d\omega}{2}} \tilde{s}(\omega) e^{j(\omega t - kx)} d\omega.$$

En écrivant le développement développé de \underline{k} : $\underline{k}(\omega) = k(\omega_0) + \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + O((\omega - \omega_0)^2)$, on obtient :

$$\begin{aligned} s(x, t) &= \int_{\omega_0 - \frac{d\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{d\omega}{2}} \tilde{s}(\omega) e^{j(\omega t - (k_0 + \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0))x)} d\omega \text{ avec } k_0 \equiv k(\omega_0) \\ &= \int_{\omega_0 - \frac{d\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{d\omega}{2}} \tilde{s}(\omega) e^{j((\omega + \omega_0 - \omega_0)t - (k_0 + \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0))x)} d\omega \\ &= \int_{\omega_0 - \frac{d\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{d\omega}{2}} \tilde{s}(\omega) e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} e^{j(\omega - \omega_0)(t - \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} x)} d\omega \\ &= e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} \int_{\omega_0 - \frac{d\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{d\omega}{2}} \tilde{s}(\omega) e^{j(\omega - \omega_0)(t - \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} x)} d\omega. \end{aligned}$$

3. Il est équivalent de dire que le milieu est dispersif lorsque ω et k sont reliés de manière non-linéaire.

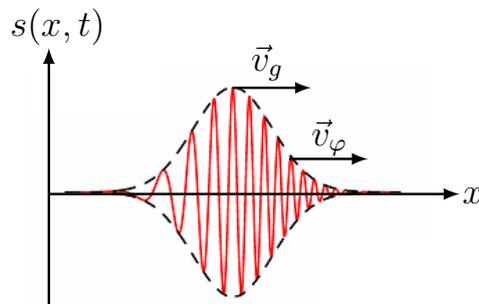
Finalement,

$$s(x, t) = \underbrace{e^{j(\omega_0 t - k_0 x)}}_{\text{propagation}} \times \underbrace{\chi\left(t - \frac{dk}{d\omega}\bigg|_{\omega_0} x\right)}_{\text{enveloppe}}.$$

On remarque ici que la partie « enveloppe » du signal est une fonction de la forme $f(x - v_g t)$ avec $v_g \equiv 1 / \frac{dk}{d\omega}\big|_{\omega_0}$ qui est homogène à une vitesse. On définit alors la **vitesse de groupe** comme⁴ :

$$v_g = \frac{dk}{d\omega}\bigg|_{\omega_0}.$$

La vitesse de groupe, vitesse de déplacement de l'enveloppe (cf. figure ci-dessous), correspond généralement à la vitesse de déplacement de l'énergie et donc de l'information.



Lors de son déplacement, le paquet d'onde peut s'étaler. C'est le cas par exemple dans les fibres optiques où les signaux, initialement d'une durée de 1 fs, peuvent atteindre une durée de 1 ns après un parcours de 100 km. Le débit d'une fibre optique est alors limité autour du GHz.

Remarques :

- les OPPH ont une énergie infinie : elles n'ont donc pas de sens physique contrairement aux paquets d'onde limités spatialement et temporellement ;
- tout le formalisme développé jusqu'ici, notamment la notion de paquet d'onde, est rendu possible par la linéarité des équations de propagation étudiées.

3 Plasma et télécommunications

3.1 Position du problème

Un plasma est un gaz ionisé, constitué d'un ensemble de cations et d'électrons, et qui est globalement neutre : $\rho = 0$. La ionosphère, située à 60 km de la Terre et de 800 km d'épaisseur, est un exemple de plasma. La densité électronique n_e qui y règne est de l'ordre de $10^{10} - 10^{12} m^{-3}$.

Dans la suite, on cherche à faire propager une OPPH*, $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$, dans un plasma, par exemple celui de la ionosphère terrestre.

4. Au vu de la définition de v_g , on comprend bien que si $v_g = v_\phi$ le milieu est non dispersif alors que si $v_g \neq v_\phi$ le milieu est dispersif.

3.2 Établissement de l'équation de propagation

On fait l'approximation que seuls les électrons sont en mouvement, les ions étant fixes⁵. Le courant de charges \vec{j} s'écrit alors $\vec{j} = n_e(-e)\vec{v}_e$, avec n_e que l'on suppose constante.

Le système étudié est un fluide d'électrons dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le bilan des forces appliquées est le suivant :

- on néglige la pesanteur
- on néglige les interactions du type électron/électron et électron/ion
- seule la force de Lorentz entre en jeu : $\vec{F} = -n_e e (\vec{E} + \vec{E} \times \vec{B})$; mais, comme on ne considère que des électrons non-relativistes, on retient uniquement la composante électrique de \vec{F} .

L'équation d'Euler s'écrit alors de la manière suivante :

$$m_e n_e \left\{ \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} + (\vec{v}_e \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_e \right\} = n_e (-e) \vec{E}.$$

Dans cette équation, le terme $(\vec{v}_e \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_e$ induit des non-linéarités. Or, tout le formalisme que l'on a développé en amont pour résoudre le problème de la propagation d'une OPPH* dans un milieu nécessite des équations linéaires. On se propose donc maintenant de déterminer dans quelle mesure on peut négliger le terme non-linéaire $(\vec{v}_e \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_e$ devant le terme linéaire $\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t}$. En ordre de grandeur, on a :

$$\frac{|(\vec{v}_e \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_e|}{|\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t}|} \sim \frac{v_e^2/L}{v_e/t} \Rightarrow \frac{v_e}{\omega} \ll \lambda \Leftrightarrow \boxed{\Delta x_e \ll \lambda}.$$

Ainsi, lorsque l'amplitude du mouvement des électrons est petite devant la longueur d'onde, on obtient la relation linéaire suivante entre \vec{j} et \vec{E} :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{n_e e^2}{m_e} \vec{E}}.$$

Dans le plasma considéré, les équations de Maxwell s'écrivent alors comme suit :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{cases}$$

On obtient finalement l'équation de propagation de l'OPPH* dans le plasma :

$$\boxed{\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{\mu_0 n_e e^2}{m_e} \vec{E}}.$$

Cette équation porte aussi le nom d'équation de « Klein–Gordon ».

5. Cette approximation est justifiée par le fait que les ions, beaucoup plus massifs que les électrons (environ 1800 fois plus lourds), ont une plus grande inertie.

3.3 Relation de dispersion

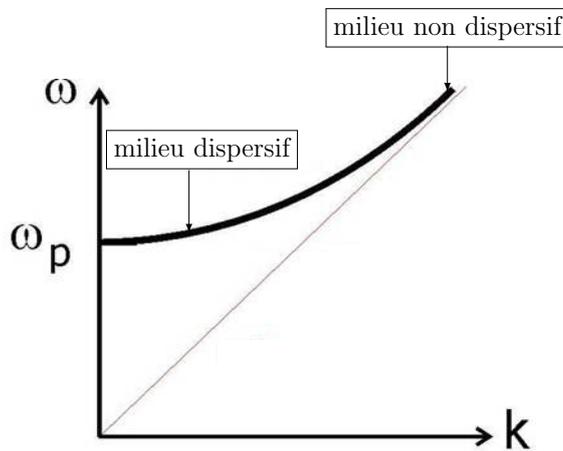
On rappelle que l'OPPH* propagée dans le plasma est de la forme : $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$. On en déduit alors directement la relation de dispersion associée à la propagation de \vec{E} dans le plasma :

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}} \text{ en posant } \omega_p \equiv \sqrt{\frac{\mu_0 n_e e^2 c^2}{m_e}}.$$

On remarque alors que k peut être réel ou imaginaire pur suivant le signe de $\omega^2 - \omega_p^2$.

★ Si $\omega < \omega_p$: k est imaginaire pur, soit $k = jk_2$, et alors $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-k_2 x} e^{j\omega t}$. Il n'y a pas de propagation et on parle alors d'**onde évanescente**.

★ Si $\omega > \omega_p$: k est réel et \vec{E} se propage dans le plasma. La relation de dispersion est représentée ci-dessous dans ce cas de figure⁶.



La fréquence $f_p = \frac{\omega_p}{2\pi}$ délimite les deux régimes de propagation et de non-propagation de l'OPPH* \vec{E} dans le plasma, on parle alors de « **fréquence de coupure** ».

Dans le cas de la ionosphère, f_p est de l'ordre de $10^6 - 10^7$ Hz. Ainsi, la ionosphère sert de réflecteur pour les ondes radio ($f \sim 10^5$ Hz) et est transparente aux fréquences utilisées pour communiquer avec les satellites ($f \sim 10^8$ Hz).

6. On voit bien sur cet exemple que la notion de milieu dispersif est relative et qu'elle dépend du paquet d'onde considéré et tout particulièrement de sa pulsation ω .

Questions

- Qu'est-ce qu'une onde évanescente? *Dans le cas d'une onde évanescente, il n'y a pas de propagation; ce phénomène n'est pas lié à de l'absorption d'énergie par le milieu traversé.*
- Quels autres phénomènes peuvent entrer en jeu dans l'atténuation d'une onde lors de sa propagation en dehors de l'absorption par le milieu traversé? *pavillon acoustique, phénomène de diffusion.*
- Dans quels cas il n'y a pas étalement du paquet d'onde? *pour les solitons et dans les milieux non dispersifs.*
- Qu'est-ce qu'un soliton? *C'est une onde solitaire, solution d'équations aux dérivées partielles non linéaires; un soliton se propage sans déformation.*
- Exemples de soliton? *Les mascarets sont des exemples de solitons hydrodynamiques : ce sont des vagues solitaires qui remontent le courant. Les tsunamis sont également des exemples de solitons hydrodynamiques. Il existe aussi des solitons dans d'autres domaines de la physique, en optique par exemple.*
- Quelle est l'hypothèse sous-jacente qui permet une justification thermique de l'immobilité des ions dans le plasma? *Le plasma envisagé est isotherme.*

Commentaires

- Il y a beaucoup de calculs dans cette leçon, en particulier le calcul de la vitesse de groupe est long. On peut envisager de le mettre sur transparent.
- Il faut donner plus d'ordres de grandeur tout au long de la leçon, par exemple sur la valeur de λ dans un plasma par rapport aux hypothèses faites.
- Inclure des expériences à la leçon et présenter d'autres applications⁷ plus concrètes et qui permettent de souligner le fait que le phénomène de dispersion peut être bénéfique.
- Bonne utilisation des animations du fond de l'agrégation : il faut absolument les utiliser dans cette leçon.
- Propositions d'expérience : les pendules couplés (mise en évidence expérimentale d'une pulsation de coupure), le câble coaxial (mesure d'une vitesse de groupe et mise en évidence de la déformation du paquet d'onde), le prisme (mesure d'une vitesse de phase ou simplement illustration qualitative du phénomène de dispersion en introduction).

Références

- « Ondes mécaniques et diffusion », C.Garing, Ellipses
- « Ondes électromagnétiques dans le vide et les milieux conducteurs », C.Garing, Ellipses
- « Les Mille et une questions de la physique en prépa », C.Garing, Ellipses
- « La Physique par la pratique », B.Portelli et J.Barthes, H&K
- « Ondes », HPrépa, Hachette supérieur
- « La physique des ondes », Les nouveaux précis Bréal, Bréal

7. On peut par exemple développer le cas de la réflexion sur un conducteur qui permet de traiter les différentes formes de k : dispersion et atténuation. La houle est un exemple original