

LP26: Propagation dans un milieu dispersif

Sandra MONTALESCOT et Caroline BOULOC

April 9, 2014

Correcteur: R.Carpentier

Niveau L2

Part I

CE QUI A ETE PRESENTE

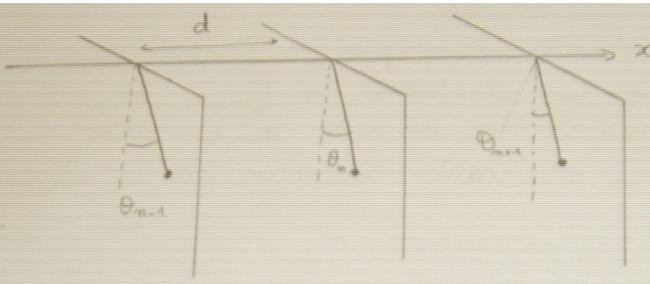
(mais cf nouveau plan à la fin)

Intro: Dans le titre de cette leçon, on entend “propagation” et “milieu dispersif”. Comme on ne sait pas encore ce qu’est la dispersion, intéressons-nous à la propagation.

Expérience: relier un GBF à la voie 1 d’un oscillo par un câble coaxial d’1 m, et à la voie 2 par un câble coaxial de 100 m. Envoyer un créneau. On voit que le créneau qui s’est propagé à travers les 100 m de coaxial est nettement déformé par rapport au créneau qui s’est propagé à travers 1 m de coaxial. Le milieu a “modifié” le signal lors de la propagation. On comprend que cet effet, dit dispersif, va avoir un enjeu crucial dans la transmission d’information.

1 Propagation d'une onde plane progressive harmonique (OPPH) le long d'une chaîne de pendules couplés

1.1 Equation de propagation



hyp chaîne de pendules ∞ (utile pour II)
On impose en $x=0$ un mouvement qgc.

1 pendule = barre homogène
masse m , longueur l
moment d'inertie $J = \frac{ml^2}{3}$ par rapport à son axe de rotation
oscille dans un plan $\perp Ox$
repéré par l'abscisse $x_n = md$
relié à ses voisins par un fil de torsion K

[couple de frottements fluides de l'air de la forme $-f\dot{\theta}_n$] ne pas tenir compte des frott.
 \rightarrow liaison pivot parfaite

TMC $\frac{d\vec{L}_n}{dt} = \Sigma \vec{M}(\vec{F}_n)$

sur Ox $J \frac{d\dot{\theta}_n}{dt} = -K(\theta_n - \theta_{n-1}) - K(\theta_n - \theta_{n+1}) - \frac{mgl}{2} \sin \theta_n - f\dot{\theta}_n$

$\frac{ml^2}{3} \ddot{\theta}_n = -K(2\theta_n - \theta_{n+1} - \theta_{n-1}) - \frac{mgl}{2} \sin \theta_n - f\dot{\theta}_n$

approx des milieux continus : $\theta(x=nd, t) = \theta_n(t)$ (chaîne de pendules
couplées \rightarrow il faut
approx des milieux
continus pour
considérer que
c'est un milieu)
 $d \rightarrow 0$
 \hookrightarrow ie. en tout x on a un oscillateur

Dvpt de Taylor : $\theta_{n+1}(t) = \theta(x+d, t)$
 $\sim \theta(x, t) + d \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{d^2}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$
 $\theta_{n-1}(t) \sim \theta(x, t) - d \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{d^2}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$

L'Eq. du mouvement devient :
 $\frac{ml^2}{3} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{Kd^2}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{mgl}{2} \sin \theta - f \frac{\partial \theta}{\partial t}$
 $\sim \theta$
 approx des petits angles

$$\frac{ml^2}{3} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = Kd^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{mgl}{2} \theta - f \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

Eq. de propagation (+ Eq. de d'Alembert)
 dans le cas où pas de frott. : Eq. de Klein Gordon

Analogie avec la propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma:

Modèle du plasma auquel on applique un champ E :

1. Interactions entre ions négligées
2. Ions immobiles
3. Densité volumique de courant dans le plasma \vec{j}_e
4. électrons non relativistes: La force de Lorentz vaut environ $-e\vec{E}$
5. Mouvement des électrons de faible amplitude \Rightarrow accélération convective des électrons négligée.

Les équations de Maxwell permettent d'obtenir l'équation de propagation:

$$\vec{\Delta E} = \epsilon_0 \mu_0 \left(\frac{m e^2}{m \epsilon_0} \vec{E} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right) \quad (2)$$

Analogie ici =

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{mgl}{2kd^2} \theta + \frac{ml^2}{3kd^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{f}{kd^2} \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

1.2 Relation de dispersion

Equation linéaire à coefficients constants: plus facile à résoudre avec la notation complexe. On cherche une solution de la forme $\theta(x, t) = A e^{j(\omega t - kx)}$ (on choisit cette convention). L'équation de propagation devient:

$$-\frac{ml^2}{3} \omega^2 \theta = -kd^2 k^2 \theta - \frac{mgl}{2} \theta - j f \omega \theta$$

Equation qui relie k et ω : elle est appelée relation de dispersion.

Analogie avec le plasma: $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ avec $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$ la pulsation plasma

1.3 Vitesse de phase

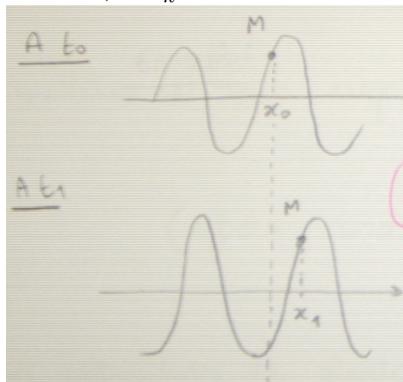
On décompose $k = k' + ik''$

- Partie réelle de k :

$$\theta(x, t) = \text{Re} (\underline{\theta}(x, t)) = \text{Re} (A e^{j(\omega t - k'x - jk''x)})$$

$$\theta(x, t) = A e^{k''x} \cos(\omega t - k'x) \quad (5)$$

Tout se passe comme si on avait une onde plane progressive qui se propageait avec la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega}{k'}$.



En effet:

A t_0 , la phase en M vaut $\varphi = \omega t_0 - k' x_0$

A t_1 , la phase vaut $\varphi = \omega t_1 - k' x_1$. Entre t_0 et t_1 , M s'est déplacé de $x_1 - x_0 = \frac{\omega}{k'}(t_1 - t_0)$ donc M s'est déplacé à la vitesse $\frac{\omega}{k'}$.

On remarque que v_φ peut dépendre de la pulsation (contrairement au cas de l'équation de d'Alembert, où la relation entre k et ω est linéaire. Dans le cas où v_φ dépend de la pulsation, le milieu est dit dispersif. Cela signifie que suivant sa pulsation, l'onde se propagera plus ou moins vite dans le milieu. Remarque importante: $v_\varphi \leq c$: car la vitesse de phase ne représente pas un transport d'information ou d'énergie.

- Remarque: partie imaginaire de k : $e^{k''x}$: si la propagation se fait dans le sens des x croissants et que $k'' > 0$, alors il y a amplification de l'amplitude. Si $k'' < 0$, il y a amortissement de l'amplitude (le milieu est dit absorbant). L'onde est amortie sur une distance caractéristique $\delta = \frac{1}{|k''|}$.

1.4 Interprétation de la relation de dispersion

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_C^2}{c^2}$$

- si $\omega > \omega_C$: k est réel. $k = k' = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_C^2}}{c}$. Dans ce cas, l'onde se propage, il n'y a pas d'absorption, $v_\varphi = f(\omega)$ (milieu dispersif).
- si $\omega < \omega_C$: k est imaginaire pur. $k = jk'' = \pm j \frac{\sqrt{\omega_C^2 - \omega^2}}{c}$ (absorption si -, amplification si +). Dans ce cas, pas de propagation (onde stationnaire), absorption, donc onde évanescente.

Analogie avec le plasma: l'ionosphère: Ionosphère = couche d'atmosphère à 60 km d'altitude.

- si $\omega > \omega_P$: l'ionosphère est transparente. On utilise des fréquences de l'ordre de 10^8 Hz pour communiquer avec les satellites.
- si $\omega < \omega_P$: l'ionosphère se comporte comme un réflecteur. C'est ainsi que Marconi a réalisé la première liaison radio transatlantique en 1901.

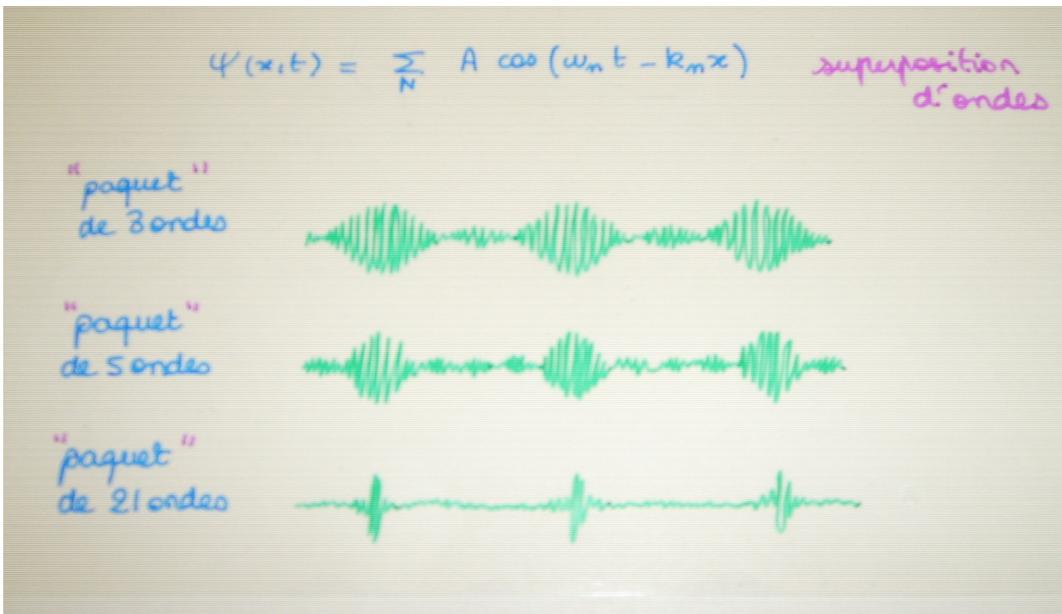
Transition: 1 OPPH: ce n'est pas physique car l'étendue spatiale et temporelle d'une OPPH est infinie. Or les signaux qu'on utilise en physique ont un début et une fin, et n'ont pas une énergie infinie. Le modèle de propagation d'une OPPH n'est donc pas adapté. Solution: superposer plusieurs OPPH. On va étudier la propagation d'un tel paquet d'ondes dans un milieu et voir les conséquences si le milieu est dispersif

2 Propagation d'un paquet d'ondes

On néglige l'absorption. On a donc $k = k'$.

2.1 Superposition d'OPPH

- On impose en $x = 0$ de la chaîne de pendules un mouvement quelconque. But: trouver $\theta(x, t)$. Si $\theta(x, t)$ est périodique, d'après l'analyse de Fourier on peut le décomposer en une somme de signaux sinusoïdaux.



- (on remarque que plus il y d'ondes, plus le paquet est localisé). En fait $\theta(x,t)$ n'est pas périodique, donc $\theta(x,t)$ est périodique de période $T \rightarrow \infty$. Il faut donc superposer une infinité d'OPPH: on effectue une superposition d'OPPH à répartition continue de fréquences, puis on propage les composantes de Fourier: (propagation à la vitesse $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{k} : e^{j\omega(t - \frac{x}{v_\varphi})}$)

$$\theta(x=0,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\theta}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Après avoir propagé les composantes de Fourier:

$$\theta(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\theta}(\omega) e^{j(\omega t - kx)} d\omega$$

- Le signal $\theta(x,t')$ ne reproduit pas le signal $\theta(0,t)$ (à une date $t < t'$) car entre temps les composantes se sont propagées à des vitesses différentes (si le milieu est dispersif). Pour modéliser un système physique, on utilise la notion de paquet d'ondes.
- Un paquet d'ondes est un ensemble d'OPPH de pulsations voisines telles que l'extension temporelle du signal total soit finie et grande devant la période moyenne $\frac{2\pi}{\omega_0}$. Les pulsations des OPPH sont comprises entre $[\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}]$ avec $\Delta\omega \ll \omega_0$. On peut l'écrire comme:

$$\theta(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \hat{\theta}(\omega) e^{j(\omega t - kx)} d\omega$$

- Or ce qui nous intéresse, c'est de pouvoir détecter un signal à un instant précis: plus l'extension temporelle est faible, mieux c'est. Or d'après ce qu'on avait vu avec la superposition de paquets d'ondes, il faut donc un signal avec beaucoup de fréquences donc un large spectre.

2.2 Notion de vitesse de groupe

- On considère un milieu faiblement dispersif (on peut linéariser la relation de dispersion sur l'extension spectrale du paquet d'ondes): développement limité d'ordre 1:

$\omega \approx \omega_0$ et on note $\omega = \omega_0 + (\omega - \omega_0)$

Donc $\theta(x, t)$ devient:

$$k(\omega) = \underbrace{k(\omega_0)}_{k_0} + (\omega - \omega_0) \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} \quad \text{M}$$

Donc $\theta(x, t)$ devient:

$$\theta(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\theta}(\omega) e^{j(\omega t - kx)} d\omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\theta}(\omega) e^{j(\omega_0 t + (\omega - \omega_0)t - k_0 x - \omega \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} + \omega_0 \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} x)} d\omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\theta}(\omega) e^{j(\omega - \omega_0) \left(t - \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} x \right)} e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} d\omega$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j(\omega_0 t - k_0 x)}}_{\text{onde qui se propage à la vitesse } \frac{\omega_0}{k_0} = \text{vitesse de phase}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\theta}(\omega) e^{j(\omega - \omega_0) \left(t - \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} x \right)} d\omega}_{\text{onde enveloppe qui se propage à la vitesse } \frac{d\omega}{dk} = \text{vitesse de groupe } v_g = \frac{d\omega}{dk} < c \text{ (transport d'én)}}$$

- Propageons par exemple un signal de spectre carré:

Propageons par exemple un signal de spectre carré :

$$\Theta(\omega) = \begin{cases} \frac{\Theta_0}{\Delta\omega} & \text{si } \omega \in \left[\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\underline{\Theta}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \frac{\Theta_0}{\Delta\omega} e^{j(\omega - \omega_0) \left(t - \frac{x}{v_g}\right)} d\omega$$

$$\underline{\Theta}(x,t) = \frac{\Theta_0}{\sqrt{2\pi} \Delta\omega} e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \frac{1}{\Delta\omega} \left[\frac{1}{j \left(t - \frac{x}{v_g}\right)} e^{j(\omega - \omega_0) \left(t - \frac{x}{v_g}\right)} \right]_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} d\omega$$

$$\underline{\Theta}(x,t) = \frac{\Theta_0}{\sqrt{2\pi}} e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} \text{sinc} \left(\frac{\Delta\omega}{2} \left(t - \frac{x}{v_g}\right) \right)$$

Soit en réel : $\Theta(x,t) = \frac{\Theta_0}{\sqrt{2\pi}} \cos(\omega_0 t - k_0 x) \text{sinc} \left(\frac{\Delta\omega}{2} \left(t - \frac{x}{v_g}\right) \right)$

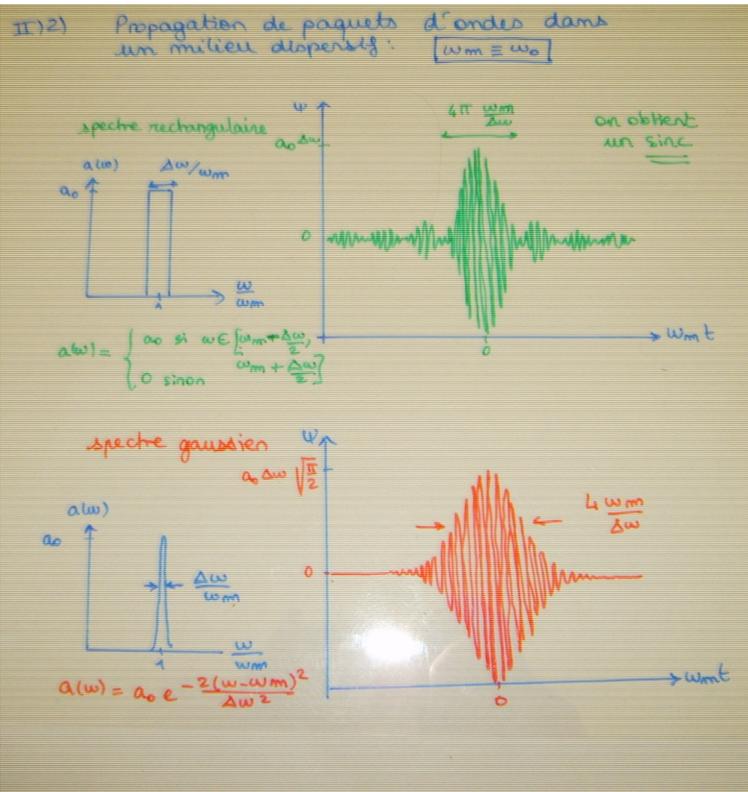
$\Delta x \Delta k = 2\pi$

$\Delta t \Delta \omega = 1$ + le paquet est large spectralement (+ riche en harmoniques), + on le voit défilier rapidement (paquet - large) source pure vs train d'onde long

onde moyenne = cosinus

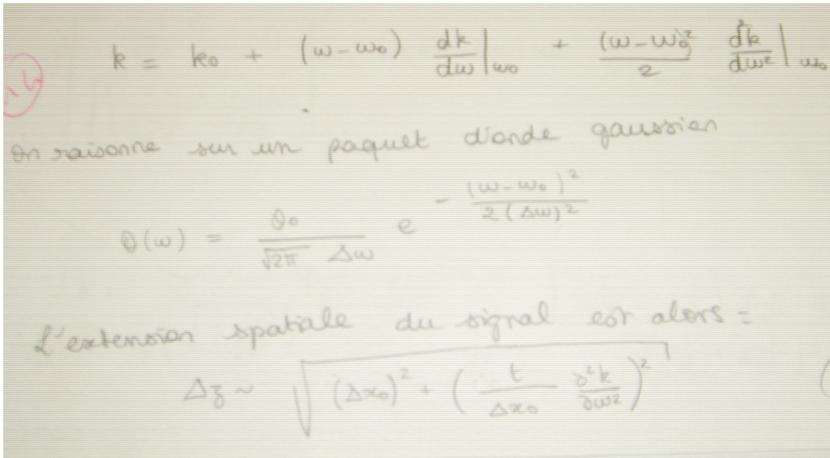
modulée par un sinus cardinal qui se propage à $v_g < c$

- $\Delta x \Delta k = 2\pi$ ou encore $\Delta t \Delta \omega = 1$: Plus le paquet d'ondes est large spectralement (+ riche en harmoniques), moins grande est la dispersion.



2.3 Etallement du paquet d'ondes

- Pour un milieu fortement dispersif (ou pour un onde de large spectre): DL d'ordre 2 pour mieux rendre compte des phénomènes:



$$k = k_0 + (\omega - \omega_0) \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2} \left. \frac{d^2k}{d\omega^2} \right|_{\omega_0}$$

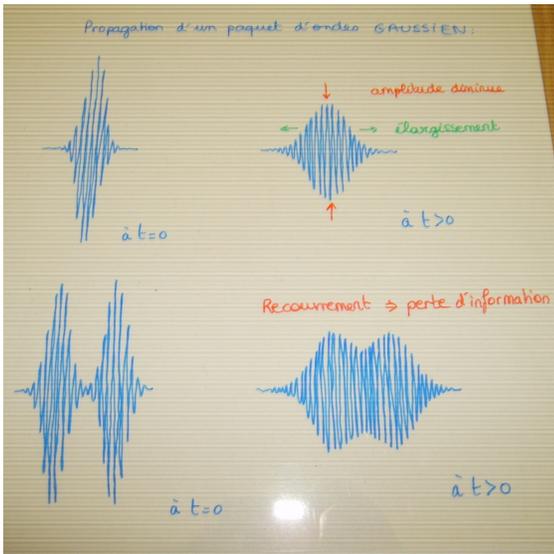
On raisonne sur un paquet d'onde gaussien

$$\theta(\omega) = \frac{\theta_0}{\sqrt{2\pi} \Delta\omega} e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2(\Delta\omega)^2}}$$

l'extension spatiale du signal est alors :

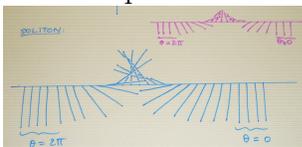
$$\Delta x \sim \sqrt{(\Delta x_0)^2 + \left(\frac{t}{\Delta x_0} \frac{d^2k}{d\omega^2} \right)^2}$$

- Cela est problématique car c'est la crête du paquet d'ondes qu'on utilise pour détecter l'information (c'est elle qu'on détecte) => il faut que l'enveloppe se propage sans se déformer. De plus lorsqu'on transmet une information, on transmet une succession de paquets d'ondes. Or, pour bien les détecter, il ne faut pas qu'ils se superpoient après propagation: il faut donc suffisamment séparer les paquets d'ondes pour éviter un brouillage de l'information.



2.4 Compensation de la relation dispersion: solitons

Equation de propagation non linéaire. Il peut arriver qu'une onde se propage sans se déformer: il y a compensation des effets de la dispersion et de la non linéarité. La vitesse de propagation de ces ondes dépend de leur amplitude. Ce sont des ondes solitaires.



Au passage de l'onde, les pendules font un tour complet.

Première onde solitaire: découverte par Russel en 1834 (passage d'un bateau sur un canal).

Application: transport d'information en évitant l'étalement des paquets d'ondes (fibres optiques).

3 Exemples et applications de la propagation dans un milieu dispersif

3.1 Câble coaxial

- Manipulation: relier un GBF à la voie 1 d'un oscillo par un câble coaxial d'1 m, et à la voie 2 par un câble coaxial de 100 m. Envoyer un créneau. On voit que le créneau qui s'est propagé à travers les 100 m de coaxial est nettement déformé par rapport au créneau qui s'est propagé à travers 1 m de coaxial.
- On considère un tronçon de câble coaxial de longueur dx à l'instant t . L'équation de propagation est obtenue à partir de la loi des mailles, de la loi des noeuds et de la loi d'Ohm.

Modèle adapté: ligne avec une capacité linéique Γ
 une résistance linéique Γ_e
 une inductance linéique Λ

on pourrait montrer que $\Lambda\Gamma = \mu\epsilon$ ($= \frac{1}{c^2}$ si l'isolant du milieu est le vide)
 mais on s'en fait rien.

Pour un tronçon de longueur dx à l'instant t :

• Aux bornes de la capacité:

$$i(t) = \Gamma dx \times \frac{\partial V(x+dx,t)}{\partial t} \quad (i = c \frac{dq}{dt})$$

⊕ loi des noeuds $i(t) + I(x+dx,t) = I(x,t)$

$$\Rightarrow i(t) \approx - \frac{\partial I}{\partial x}(x,t) dx$$

⊙ loi des mailles
$$\Gamma \frac{\partial V}{\partial t}(x,t) = - \frac{\partial I}{\partial x}(x,t) \quad (4)$$

⊕ hypothèse:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x+dx,t) \approx \frac{\partial V}{\partial t}(x,t)$$

 car dx très petit
 de toute façon

• Aux bornes de $\{-mm-\square-\}$

$$u(t) = \Delta dx \frac{\partial I}{\partial t}(x,t) + r_L dx I(x,t) \quad (u = L \frac{di}{dt} + ri)$$

⊕ loi des mailles : $u(t) = V(x,t) - V(x+dx,t)$
 $\approx -\frac{\partial V}{\partial x}(x,t) dx$

D'où $\boxed{-\frac{\partial V}{\partial x}(x,t) = \Delta \frac{\partial I}{\partial t}(x,t) + r_L I(x,t)} \quad (2)$

• Équation de propagation de $V(x,t)$

(2) $\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \Delta \left\{ \frac{\partial I}{\partial x \partial t} + r_L \frac{\partial I}{\partial x} \right\}$

(1) $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial I}{\partial x \partial t} = \frac{\partial I}{\partial x \partial t} = -\Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$

(1) $r_L \frac{\partial I}{\partial x} = -r_L \Gamma \frac{\partial V}{\partial t}$

Relation de dispersion pour $V(x,t) = V_0 \exp(j\omega t - kx)$

$\boxed{-k^2 + \Delta \Gamma \omega^2 = j\omega r_L \Gamma}$ (Δ convention $(\rightarrow j\omega r_L \Gamma)$)

Relation de dispersion pour une solution $V = V_0 e^{j(\omega t - kx)}$:

$$k^2 = \Delta \Gamma \omega^2 - j r_L \Gamma \omega$$

Le milieu est donc dispersif, ce qui explique que l'impulsion envoyée en entrée n'a pas la même forme en sortie. Les fréquences se propagent à des vitesses différentes dans le câble coaxial, et cet effet se fait d'autant plus sentir que le câble est long.

3.2 Ondes de gravité

On considère un étendue d'eau, fluide parfait, incompressible. On applique une perturbation (vague). Ecoulement irrotationnel. Hypothèses:

1. Force de pesanteur et forces de pression s'appliquent
2. On néglige la viscosité, la tension superficielle
3. Déplacement des particules fluides dans xoz
4. Amplitude du mouvement $a \ll \lambda$

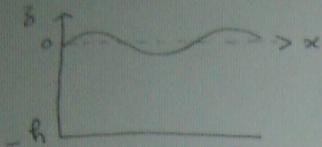
III) Exemples et applications de la propagation dans un milieu dispersif

(5)

2) Ondes de gravité

(ondes de surface $\lambda \gg h$)
 → non dispersif
 (eq. de d'Alembert)
 $v_{\phi} = \sqrt{gh}$

Etendue d'eau. Fluide parfait, incompressible.



Perturbation. Instationnelle.

- hyp =
- forces de pesanteur et forces de pression
 - on néglige = viscosité, tension superficielle
 - déplacement des particules fluides dans xoz
 - amplitude du nut $a \ll \lambda$

$$\text{Eq. d'Euler: } \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \sim \vec{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} P = - \text{grad} \left(gz + \frac{P}{\rho} \right)$$

$$\text{De plus } \text{rot} \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \text{grad} \phi$$

$$\text{On aboutit à } \frac{\partial \phi}{\partial t} + gz + \frac{P}{\rho} = 0$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{div} \vec{v} = 0 \\ \vec{v} = \text{grad} \phi \end{array} \right) \Rightarrow \Delta \phi = 0$$

Comme l'écoulement est incompressible et inrotationnel, on a aussi la loi de Laplace:

$$\Delta \phi = 0$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

Etendue d'eau \Rightarrow on cherche des solutions sous forme d'OPP (pas un bassin = pas stationnaire):

$$\phi = f(z) \cos(kx - \omega t)$$

$$\Delta \phi = 0 \Rightarrow -k^2 f(z) \cos(kx - \omega t) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \cos(kx - \omega t) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - k^2 f(z) = 0$$

$$f = A \text{sh}(kz) + B \text{ch}(kz)$$

Or dans le fond, la vitesse ne peut pas être verticale =

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{-h} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{-h} = 0$$

$$k [A \text{ch}(kh) - B \text{sh}(kh)] = 0$$

$$A = B \text{th}(kh)$$

$$f(z) = B [\text{th}(kh) \text{sh}(kz) + \text{ch}(kz)]$$

Or à la surface = $z = s(x, t)$ (eq de la surface libre)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g s + \frac{P_0}{\rho} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial s}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} \sim \frac{ds}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (\text{vitesse verticale})$$

$$\left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|_s + g \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_s = 0$$

amplitude du mvt petite
(surface d'amplitude $a \ll \lambda$)
 $\rightarrow z = s$ écrit en $z = 0$

$$\left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|_0 + g \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_0 = 0$$

En réinjectant l'expression de ϕ :

$$\phi = f(z) \cos(kx - \omega t)$$

$$-\omega^2 f(0) + g \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_0 = 0$$

$$f(0) = B [0 + \text{ch}(kh)] = B$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_0 = B [k \text{th}(hk) \text{ch}(kh) + k \text{sh}(kh)] \Big|_0$$

$$= B k \text{th}(kh)$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = gk \text{th}(kh)}$$

Relation de dispersion NL \Rightarrow milieu dispersif pour ces ondes

$$\boxed{v_g = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \text{th}(kh)}}$$

Cas 1: la houle $\lambda \ll h$ donc $k \gg h$ donc $\text{th}(hk) \approx 1$. D'où $\omega^2 \approx gk$, soit $v_g \sim \sqrt{\frac{g}{k}}$.

En dérivant la relation de dispersion: $2\omega d\omega = g dk$, on obtient la vitesse de groupe: $v_g = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{v_\phi}{2}$.

ODG: avec $\lambda = 80$ m, $h = 10$ m on obtient $v_g = 11$ m/s

Les vagues de plus grande longueur d'onde se propagent plus vite. Exemple: la houle océanique. Quand il y a une tempête dans l'océan Atlantique, les ondes de grande longueur d'onde arrivent sur les côtes bretonnes bien avant la tempête (elles sont de faible amplitude mais se propagent à 50 m/s environ: elles ont parcouru 4000 km en une journée). A l'approche de la tempête, les vagues

de courte longueur d'onde arrivent sur la côte.

Cas 2: la marée $\lambda \gg h$ donc $th(hk) \approx kh$. D'où $\omega^2 \approx ghk^2$, soit $v_\varphi \sim \sqrt{gh}$. Le milieu n'est pas dispersif.

ODG: avec $h = 1$ m on obtient $v_\varphi = 3\text{m/s}$

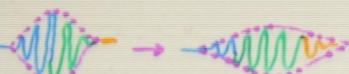
Quand on s'approche de la côte, la hauteur h diminue. Donc la vitesse de phase aussi. Donc l'amplitude des vagues augmente car l'énergie est conservée.

La vitesse diminue quand h diminue: il se produit un déferlement des vagues car le haut de la vague va plus vite. Effet plus spectaculaire: un tremblement de terre engendre une onde de grande longueur d'onde (la hauteur h de l'océan est petite en comparaison). L'onde se propage très vite à la source (environ 200 m/s) mais son amplitude est faible (environ 1m). Comme elle ralentit à l'approche de la côte, son amplitude augmente donc, d'où le raz de marée.

4 Conclusion

- On a ici abordé quelques exemples de propagation dans un milieu dispersif mais il existe d'autres types de dispersion (dispersion modale).
- On cherche souvent à compenser les effets des phénomènes dispersifs pour améliorer le transport d'information (limiter l'étalement du paquet d'ondes). Mais les phénomènes dispersifs peuvent aussi être utiles: dispersion de la lumière blanche par un prisme.

5 Notes

SPECTRE \ MILIEU	ETROIT	LARGE
PEU DISPERSIF	 <ul style="list-style-type: none"> - enveloppe peu déformée (paquet d'ondes peu étalé) - fréq. peu nombreuses autour de f_0: v même vitesse 	 <ul style="list-style-type: none"> - paquet d'ondes étalé - fréq. se propagent à des vitesses \neq
TRES DISPERSIF	 <ul style="list-style-type: none"> - paquet d'ondes étalé - fréq. v même vitesse de propagation 	 <ul style="list-style-type: none"> - paquet d'onde très étalé - fréq. se propagent à des vitesses \neq

Ondes capillaires

Calcul complet en tenant compte de la profondeur =
$$\omega^2 = \left(\frac{T}{\rho} k^3 + gk \right) \tanh(kh)$$

Part II

BIBLIO, COMMENTAIRES, NOUVEAU PLAN

6 Bibliographie

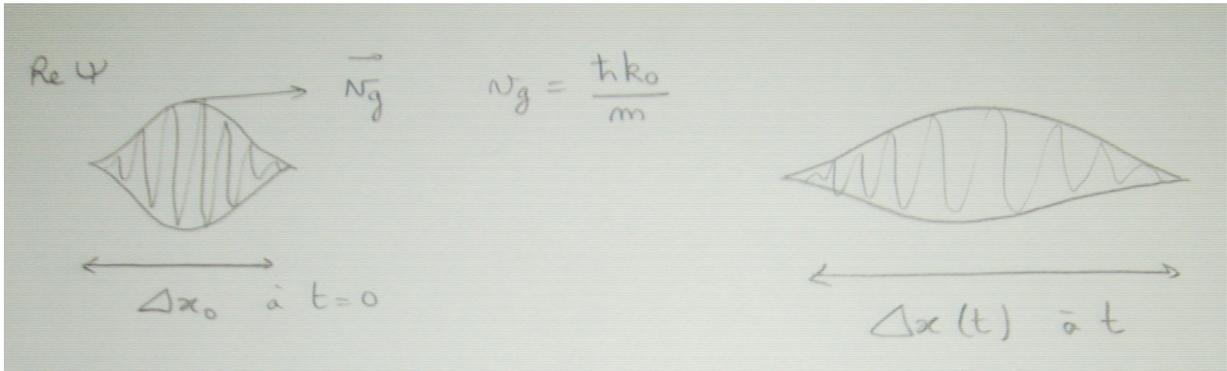
- Ondes mécaniques, Garing (pour les pendules couplés, la houle, la marée)
- Ondes électromagnétiques, Garing (ondes dans un plasma, réflexion ionosphérique, étude d'un guide monomode, câble coaxial, dispersion normale)
- Mauras (dispersion dans un plasma, guide d'onde, dispersion dans un dlhi)
- Physique tout-en-un PC,PSI, Sanz (propagation guidée, paquets d'ondes)
- PT, Sanz (ondes électromagnétiques dans un plasma, dans un conducteur, guide d'ondes)
- HPrépa Ondes (ondes guidées, propagation d'une onde EM dans un dlhi, coaxial, dispersion, paquets d'onde à spectre rectangulaire / gaussien p.209)
- PSI, More et Olivier, Tec et Doc
- PC, More et Olivier, Tec et Doc (chapitre dispersion / absorption: pendules couplés, paquet d'ondes, ondes solitaires, plasma) (c'est à peu près pareil que dans le PSI)
- Vibrations, Ondes (ondes à la surface d'un liquide)

7 Questions et commentaires

- Equation de Klein Gordon: historique? origine du nom? Equation de Klein Gordon: vient de la MQ. A l'époque ils ont essayé de rendre compatible la MQ et la relativité. Klein Gordon: essayé d'écrire une équation qui remplace l'équation de Schrödinger, où l'on voit deux cas limites: (houle/ marée): cas limites pour particule non relativiste, et cas limite où m tend vers zéro on retrouve $w=kc$. En fait l'équ. de Klein Gordon n'est pas l'équation quantique relativiste car ne vérifie pas la relation de continuité, cad la conservation de la densité de probabilité (on ne sait pas trop où la particule est, mais somme proba = 1, elle est qqpart). Equation de Dirac. L'explication est dans l'ouvrage "Physique des solitons" (Peyrard et Dauxois).

- Dans la modélisation plasmas: n est la densité volumique d'électrons. Ionosphère: ODG de la pulsation de coupure? 10^8 Hz Ca sort d'où? On peut en déduire quel paramètre sur la ionosphère? la densité de porteurs, de l'ordre de 10^{12} . Ça aurait été bien de faire l'inverse: déduire la pulsation plasma connaissant n . Comment se fait-il qu'une partie de l'ionosphère se ionise? Pourquoi y a-t-il une couche d'atmosphère ionisée? A cause du rayonnement solaire. D'ailleurs entre la face éclairée de la Terre et la face obscure, la densité de porteurs dans l'ionosphère varie énormément: varie d'un facteur 300 environ. En plein jour: 10^{12} e-par m^3 . En nuit descend à $3 \cdot 10^{10}$ électrons par m^3 . On trouve la valeur dans les livres. Comme la pulsation de coupure est en racine de n , ça diminue l'écart. Il aurait fallu plus exploiter la pulsation de coupure: ondes radio: les deux bandes principales utilisées par le public sont AM (100 kHz) et FM (100 MHz). Avec les ondes FM on est au dessus des autres fréquences de coupure et les ondes radio FM traversent l'atmosphère: on est obligés d'avoir plein d'antennes régionales (qui réémettent) car une grande partie des ondes est perdue dans l'espace. Alors que pour les ondes AM, il n'y a qu'un émetteur nationale. Une seule antenne qui émet la radio. Grâce à la réflexion ionosphérique, ça se propage dans toute la France. D'ailleurs RTL: "L" = Luxembourg, antenne au Luxembourg. En FM: pour éviter les interférences d'une région à l'autre, on change de fréquence FM. Pourquoi la FM alors que l'AM permet d'avoir une seule antenne dans toute la France? Car permet d'avoir un meilleur rapport signal sur bruit, car ce rapport est proportionnel au rapport fréquence du signal audio qu'on transmet sur fréquence de la porteuse. Améliore la qualité du signal audio.
- $k'' > 0$ amplification et $k'' < 0$ amortissement: toujours vrai? non, dépend de la convention de propagation: ici on a pris $e^{j(\omega t - kx)} = e^{j(\omega t - k'x)} e^{k''x}$
- dans le cas de la relation de dispersion pour les pendules couplés: qd $\omega < \omega_C$, on a k imaginaire pur, on n'a pas de propagation mais absorption. Et après tu expliques que la ionosphère se comporte comme un réflecteur pour $\omega < \omega_C$. Est-ce que "réflecteur" et "absorbant" sont compatibles? réflecteur: l'onde est obligée de se réfléchir, sinon toute l'énergie est absorbée. Quelle proportion est absorbée? Est-ce qu'une onde évanescente transporte de l'énergie en moyenne? Non. Donc est-ce qu'on peut qualifier le milieu d'absorbant en dessous de la pulsation de coupure? Ambigü, car pas d'absorption d'énergie, donc terme "absorbant" à éviter.
- transparent avec superposition de n ondes: tracer le spectre du paquet de 3 ondes. 3 pulsations: 3 pics. Amplitudes quelconques? Ici on les as prises égales.
- quand on décompose θ en somme continue de sinusoides, on intègre de $-\infty \rightarrow +\infty$. Or on intègre sur ω , la pulsation. C'est gênant d'intégrer sur des pulsations négatives... Est-ce que dans le spectre il y a des composantes négatives? Pourquoi est-ce qu'on n'intègre pas de $0 \rightarrow +\infty$. ? spectre de $-\infty \rightarrow +\infty$. car on fait une TF. Si le signal au départ est réel (signal dont on veut calculer la TF), alors la partie du spectre en négatif est le complexe conjugué du spectre positif. On peut se limiter à des pulsations positives en disant que: $\int_{-\infty}^{+\infty} = 2 \cdot \text{Re}(\int_0^{+\infty})$.
- Lien entre la durée du paquet d'ondes et la largeur de son spectre? $\Delta x \Delta k = 2\pi$ ou encore $\Delta t \Delta \omega = 1$ (on retrouve les relations d'Heisenberg). Plus le spectre va être riche en fréquences, plus le paquet d'ondes va être étendu temporellement donc signal mieux détectable. Il faut en parler, ne pas oublier.

- Vidéo: il est représenté $|\psi|^2$: car on veut juste avoir l'enveloppe donc s'affranchir de la variation en cosinus sous l'enveloppe. " ψ " car on utilise souvent les paquets d'onde en MQ donc on a noté ici une probabilité de présence. Dans la vidéo, le paquet d'ondes se propage dans le vide. Relation de dispersion dans le vide pour des ondes EM: $\omega = kc$. Mais en MQ il existe d'autres ondes possibles, par forcément EM, il y a par exemple des ondes de matière... elles vérifient quelle relation de dispersion? Cette relation vient de l'équation de Schrödinger. $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$. Pas le choix de la convention en MQ: si on utilise $i\hbar$ dans l'éq. de Schrödinger, on a la fonction d'onde en $e^{-j\omega t \dots}$. Réinjecter cette solution dans l'équation de Schrödinger. On trouve la relation de dispersion. Bilan: le vide est dispersif. C'est pour ça que le paquet d'onde s'étale dans la vidéo.
- Pendules couplés: il n'y a pas la manipulation? elle est cassée, mais peut-être voir en salle de thermo. Dans l'idéal, montrer la chaîne de pendules. Pourquoi avoir détaillé cet exemple? Pourquoi plus représentatif que les autres? Pulsation plasma: classique, cet exercice de mécanique permettait de varier... Les pendules couplés permettent de faire de la mécanique, et on obtient les mêmes équations. On passe du temps à faire l'approximation des milieux continus, ça fait perdre du temps, donc il vaut mieux n'expliquer que le plasma et prendre plus de temps pour l'expliquer. D'un autre côté, il y a des hypothèses à poser sur les plasmas donc ça prend du temps aussi. Dommage qu'on n'exploite pas la chaîne de pendules couplés, et qu'on fasse de la physique sur les plasmas dont on n'a pas détaillé la théorie.
- En quoi la réflexion ionosphérique est caractéristique d'un milieu dispersif? On peut quand même en parler. On élargit la notion de milieu dispersif. Dispersif = le milieu ne se comporte pas de la même façon suivant la fréquence. Dispersion par un prisme: ça rentre aussi dans la définition. On utilise le fait que les rayons ne prennent pas le même chemin (dispersion, ce n'est pas seulement une notion d'étalement du paquet d'ondes, donc ce n'est pas seulement le fait que les rayons ne se propagent pas à la même vitesse.) Ce n'est pas hors-sujet, mais ne pas passer 1h dessus.
- ne pas parler d'absorption. C'est une onde évanescente sans énergie. En régime transitoire. Il y a un peu d'énergie pour former l'onde évanescente, mais en régime permanent, il n'y a plus d'énergie. L'énergie en moyenne reste sur place (rentre/sort). Ça n'absorbe pas, ça ne se propage pas. Il y a un peu d'énergie qui rentre et qui sort. C'est vraiment réflecteur.
- Vidéo bien. Onde non relativiste dans le vide. Lien entre la vitesse de groupe et la vitesse de phase? $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$. $v_g = \frac{d\omega}{dk}$. donc $v_g = 2v_\varphi$ pour une onde de matière dans le vide. On retrouve la relation de de Broglie: on retrouve $mv_g = \hbar k$. Ça devient au programme de MP/PC.
- Leçon qui contient trop d'exemples: 4 (pendules couplés, plasmas, câble coaxial, ondes de gravité), pas le temps en 50 min. Transparent avec les calculs trop chargé. Ne garder que deux exemples, éventuellement 3 mais le troisième doit être light*. On peut évoquer les exemples, sans rentrer dans le détail. * exemple équation de Schrödinger, relation de dispersion, avec la vidéo. On peut proposer de nouvelles vidéos au jury, cf site.
- .Etalement du paquet d'ondes: frustrant car développement à l'ordre 2 de la relation de dispersion formule compliquée, on voit juste la vidéo, mais manque de quantitatif.
- Prenons un paquet d'onde de largeur Δx à $t=0$

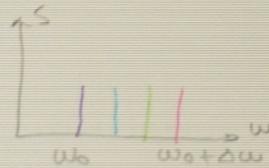


- Concrètement, ça veut dire qu'on a un atome décrit par la fonction d'onde ψ , représenté par sa partie réelle. L'atome, en gros se trouve là. car max de proba, mais il y a une certaine incertitude Δx_0 à $t=0$. A t le paquet d'onde s'est propagé (à la vitesse de groupe). Pourquoi le paquet d'onde s'est étalé? (ie $\Delta x > \Delta x_0$). Calcul simple pour avoir le Δx à une date ultérieure? Quelle allure a le spectre spatial? centré sur k_0 , largeur Δk . Relation $\Delta x_0 \cdot \Delta k = \hbar$. Relation d'incertitude d'Heisenberg. Le paquet d'onde s'étale car les différentes composantes du spectre vont à des vitesses différentes. Signal constitué de deux ondes qui se propagent à des vitesses différentes. Au bout d'un temps t : $\Delta x(t) =$ variation de la vitesse de groupe $\cdot t$. Imaginons que le grand pic soit constitué de deux pics, chaque sous-pic se propage à sa propre vitesse. L'un se propage à $v_g(k_0)$, l'autre $env_g(k_0 + \Delta k)$. Chaque pic se propage à une vitesse différente: donc étalement du paquet d'ondes. La distance parcourue au bout d'un temps $t =$ différence de vitesse $\cdot t$. $\Delta v_g = \frac{\hbar \Delta k}{m}$. Puis $\Delta k = \frac{\hbar}{\Delta x_0}$ d'après Heisenberg. A $t=0$ on a Δx_0 . Les deux pics n'ont pas eu le temps de se séparer. Formule vraie que si $\Delta x \gg \Delta x_0$, pas vrai au début.
- Remarque: ça ressemble à la diffraction. Quand on veut un faisceau super fin, il diffracte beaucoup: sa largeur augmente. Plus on l'affine au début, plus il diverge après. Plus on prend un paquet d'onde étroit, plus il va s'étaler. Si le paquet d'onde est super localisé au début, petit Δx_0 , plus vite il va s'étaler car Δx inversement proportionnel à Δx_0 . On ne peut pas prévoir ensuite où la particule se trouve. Ici on n'a pas fait d'intégrale, on a utilisé de Broglie, Heisenberg. Il faut trouver une AN où l'on quantifie la dispersion.

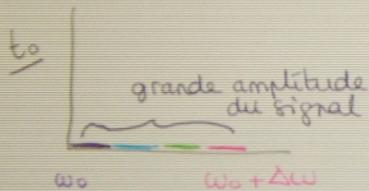
- Comment montrer la relation type incertitude d'Heisenberg ?
 $\Delta\omega \Delta t = 2\pi$

Plan de Fresnel,
 représentation complexe =
 on représente le spectre suivant :

Chaque composante = $Ae^{j(\omega t - kx)}$

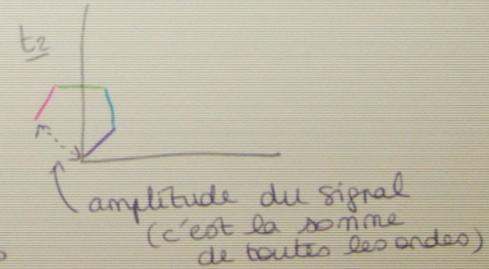
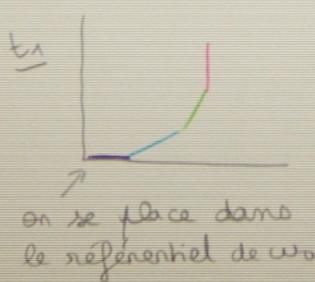
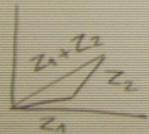


À $t=0$ toutes les composantes sont en phase, donc dans le plan de Fresnel =

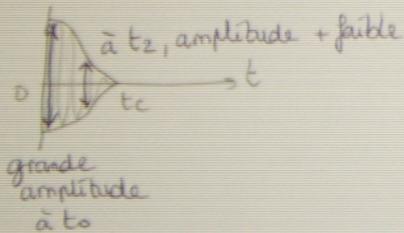


Puis les composantes se déplacent car propagation à des vitesses de phase différentes :

Rappel :
 plan de Fresnel :



on voit que plus le temps passe, plus la boucle se referme sur elle-même. Au bout de t_c , la boucle se referme sur elle-même (déphasage 2π entre $-$ et $-$). Cela correspond à la "fin" du paquets d'ondes =



$$[(\omega_0 + \Delta\omega) - \omega_0] t_c = 2\pi$$

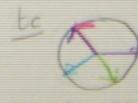
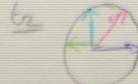
(le déphasage entre $\omega_0 + \Delta\omega$ et ω_0 vaut 2π)

$$\Rightarrow \Delta\omega t_c = 2\pi$$

Autre point de vue :



t_0 en phase (constructif)



phases mélangées (destructif)

+ voir HPrépa Ondes p. 194

- On peut faire le même raisonnement mais avec des fibres optiques. Si on fait de la transmission d'information et que les paquets s'évalent, deux informations consécutives risquent de se chevaucher au cours de la propagation (cf schéma). Limite le débit dans la fibre optique. Si on augmente le débit dans la fibre optique, les impulsions vont se rapprocher. Si la fibre optique est trop longue, les impulsions se vont se chevaucher et on ne va pas pouvoir les lire. C'est pour ça que le débit d'une fibre optique dépend aussi de la longueur sur laquelle on veut faire se propager l'information. Plus on veut faire propager l'information sur une grande longueur, plus le débit est faible. cf ouvrages sur la fibre optique. Paramètre propre à la fibre optique: D dispersion chromatique. Quantifie le pouvoir dispersif d'une fibre optique. Or on veut éviter la dispersion. D apparaît dans la fiche technique. valeur en ps/nm/km. D représente l'étalement temporel de l'impulsion. (s'étalet de tant de picoseconde par km de fibre par nm de largeur spectrale de départ). Spectre en λ . On peut définir une largeur spectrale $\Delta \lambda$. Plus le spectre est large, plus vite va s'évaler l'impulsion. Normal car si spectre large, cela signifie que les deux sous-pics sont éloignés donc ne vont pas à la même vitesse. Plus ils sont éloignés, plus l'écart entre les vitesses est grand donc plus le paquet d'ondes s'étalet plus vite (ça peut sembler contraire à ce qu'on a dit plus haut, mais on parlait du spectre en fréquence: plus le spectre en fréquence est étroit, càd plus le spectre en λ est large, plus le paquet d'ondes s'étalet vite.)
- On n'a fait aucun calcul d'intégral. Pas fan du calcul d'intégrale ave le sinc et le signal rectangulaire. Mieux de faire un ODG comme présenté ci-dessus. Eviter les gros calculs d'intégrale.
- Bien d'étudier la fibre optique, car c'est concret. Prendre un exemple: si on veut propager une information à un débit de 10Gb/s, jusqu'à quelle longueur de fibre peut-on aller? 10 km? 1000 km?
- plus moderne pour la partie ionosphère: le GPS. Géolocalisation par satellite. Les signaux, pour aller du satellite jusqu'au boitier, doivent traverser l'ionosphère, qui est dispersive. La vitesse de groupe est inférieure à c . Du coup les signaux vont moins vite (je croyais que le transport d'info pouvait aller plus vite que $c = c$ 'est v_{phi} qu'on considère normalement, non?) . Or comme la géolocalisation est basée sur la mesure du temps que met l'onde pour aller d'un point à un autre, on se trompe. v_g dépend de la densité électronique, qui varie tout le temps. Solution: on utilise la dispersion. Idée: on géolocalise avec deux fréquences. Comme l'ionosphère est dispersive, la vitesse de groupe n'est pas la même pour les deux bandes de fréquences. On mesure le temps que ça met avec chaque fréquence et on compare le retard entre les 2 fréquences pour en déduire de combien l'ionosphère a retardé le signal du GPS. Important car quand on ne prend pas en compte le retard dû à la dispersion de l'ionosphère, erreur de 30m sur le résultat de la géolocalisation. Delay ionosphérique doit être pris en compte pour être géolocalisé à qq mètres près. cf référence livre.

8 Proposition d'amélioration du plan

Ici, choix de ne traiter que 2 gros exemples (plasma / fibre optique) et un petit (avec l'équation de Schrödinger). Comme on ne traite pas le câble coaxial, est-il encore pertinent de conserver la manipulation d'introduction à la dispersion? Sachant qu'on ne revient pas dessus, il me semble

que non... Remarque: on peut aussi traiter le GPS à la place de la fibre optique, ou en plus s'il reste du temps, mais ne pas faire un catalogue d'exemples.

I) Propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma

1) Modèle et hypothèses

- Idées: origine de l'ionisation de l'atmosphère. Hypothèses pour l'étude du plasma (cf I)1 présenté)
- Contenu: HPrépa Ondes (p.186), Physique tout-en-un PC,PSI, Sanz (p.684)

2) Equation de propagation - Relation de dispersion

- Idées: équations de Maxwell, équation de propagation, solution complexe, relation de dispersion. Définition d'un milieu dispersif. Commentaire: le vide n'est pas dispersif pour des ondes électromagnétiques (car $v_\varphi = c$)
- Contenu: PSI, More et Olivier, Tec et Doc (p.825), HPrépa Ondes (p.188)
- Décomposer le vecteur d'onde $k = k' + ik''$. Est-ce judicieux de définir aussi l'indice du milieu et d'évoquer la dispersion par un prisme?

3) Application à la transmission radio

- Idées: Etude des cas k réel / k imaginaire pur. ODG d'ondes radio, transmises / réfléchies par l'ionosphère. Explication de l'existence des radios FM / AM.

Transition: ici on a étudié la propagation d'une OPPH. Or ce n'est pas physique, il faut envisager la superposition de plusieurs ondes pour donner au signal une certaine largeur temporelle / spectrale.

II) Etalement d'un paquet d'ondes

1) Notion de paquet d'onde

- Idées: définition du paquet d'ondes, notion de vitesse de groupe
- Contenu: PSI, More et Olivier, Tec et Doc (p.798), HPrépa Ondes (p.190), Physique tout-en-un PC,PSI, Sanz (p.696)

2) Etalement d'un paquet d'ondes dans le vide

- Idées: Calcul fait dans les commentaires. Propagation d'une onde de matière dans le vide. Equation de Schrödinger: relation de dispersion. Montrer la vidéo. Relation type incertitude d'Heisenberg.
- Contenu: HPrépa Ondes (p.194)
- Quelle est cette fameuse onde de matière?

Transition: l'étalement du paquet d'ondes peut poser problème dans la transmission d'information. Prenons par exemple les fibres optiques (milieu dispersif): nous allons voir qu'il faut choisir soigneusement les longueurs de fibre et le débit pour une bonne transmission d'information.

III) Application: la fibre optique

1) Position du problème

- Idées: brouillage de l'information à cause de la superposition de paquets d'ondes qui se sont trop étalés.
- Contenu: PSI, More et Olivier, Tec et Doc (p.802)

2) Dispersion chromatique

- Idées: Discuter de la longueur de fibre utilisable en fonction du débit souhaité