

LP25 : Ondes acoustiques

Thomas Jalabert - Nicolas Fabre
5 janvier 2016

Prérequis

- Mécanique des fluides (équation d'Euler, notion de viscosité)
- Équation de d'Alembert, notions d'analyse vectorielle (suite à la séquence d'électromagnétisme)

Messages

Établir dans un premier temps un modèle de propagation des ondes sonores dont les hypothèses seront vérifiées dans un second temps par des considérations énergétiques.

Connaissance des limites au caractère "transparent" des milieux : causes d'atténuation, présence d'interfaces (notion d'impédance acoustique), faible dispersion.

Ordres de grandeurs des vitesses de propagation et des énergies mises en jeu.

D'une part la modélisation regroupe liquides et gaz, mais liquides et solides sont plus proches en pratique notamment vis à vis des ordres de grandeurs.

Exemples d'applications (domaine très riche en exemples divers et variés).

Leçon

Intro :

- Déf : onde de pression se propageant dans un milieu matériel (\neq OEM)
- nombreuses applications : communication (langage, musique,...), sonder la matière (ondes sismiques, échographie, télémétrie, sonar,...)
- quelques faits expérimentaux :
 - . dans l'air, le son audible est compris dans la gamme [20 Hz - 20 kHz]
 - . la plupart des milieux sont dits transparents (peu d'atténuation), et le son se propage plus loin à basse fréquence
 - . une onde sonore se propage à une vitesse fonction de la température et du milieu (en particulier de l'inertie et de la rigidité : ρ, χ_S)

I) Equation d'onde

1) Fluides

Considérer de faibles variations des champs de pression, masse volumique et vitesse (approximation acoustique).

Utiliser l'équation thermodynamique (coefficient de compressibilité isentropique), la conservation de la masse et l'équation d'Euler, on montre que le champ de pression vérifie une équation de d'Alembert. Mise en évidence de la vitesse du son, des solutions en ondes planes progressives,

et du lien entre $p(M,t)$ et $\vec{v}(M,t)$.

Il faut mettre en évidence le fait que p et v sont des grandeurs couplées. De plus, on linéarise les équations (approximation acoustique) dans le but de pouvoir utiliser des transformées de Fourier, afin d'avoir une base (vectorielle), les OPP, des solutions.

Retour sur l'hypothèse d'adiabaticité :

Montrer que la vitesse du son dans l'air s'écrit :

- forte conduction (isotherme) : $c_s = \sqrt{\frac{RT}{M}}$

- faible conduction (isentropique) : $c_s = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$

A température ambiante, c'est le modèle isentropique qui semble fonctionner.

Comparer longueur caractéristique de diffusion et de convection :

$$\frac{x_{diff}}{x_{conv}} = \frac{\sqrt{D_{th}T}}{C_s T} = \sqrt{\frac{D_{th}}{f} \frac{1}{c_s}}$$

Pour l'air, on peut négliger la diffusion devant la convection pour $f \ll 10^{14}$ Hz

2) Solides

Pour une chaîne unidimensionnelle d'atomes, le potentiel harmonique constitue une bonne approximation du potentiel d'interaction : modélisation par des ressorts de raideur K . En cherchant des solutions oscillant autour de leur position d'équilibre, on trouve une relation de dispersion :

$$\omega = 2\sqrt{\frac{K}{m}} \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right|$$

Calcul des vitesses de phase et de groupe :

- aux grandes longueurs d'ondes, le phénomène de dispersion disparaît ($v_g \approx v_\phi$)
- il existe un vecteur d'onde maximal pouvant se propager, ce qui met en évidence le caractère discontinu de la matière ($\lambda > 2a$) : ceci justifiera l'approximation des milieux continus dans la suite

- aux petites longueurs d'onde, la vitesse de groupe s'annule, l'onde ne se propage plus, car les déphasages entre deux atomes consécutifs deviennent importants, il s'agit alors d'une vibration monobloc (énergie dissipée sous forme de chaleur en début de chaîne).

En utilisant l'approximation des milieux continus on montre que le champ des écarts relatifs à la position d'équilibre des atomes vérifie une équation de d'Alembert avec $c_s = \sqrt{\frac{Ka^2}{m}}$. Ceci constitue une onde acoustique élastique longitudinale.

On utilise alors une description continue (module d'Young) : PFD à une tranche de matériau, on retrouve une équation de d'Alembert avec $c_s = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ ($\approx 10^3$ m/s dans les solides).

De plus, par définition du coefficient de Poisson ($\epsilon_\perp = -\mu\epsilon_\parallel$), on peut généraliser la propagation dans les autres directions mais avec des vitesses différentes.

II) Énergie et impédance

1) Puissance sonore

On considère un élément de surface dS . La puissance sonore traversant cette surface est une puissance mécanique due aux forces de pression :

$$dP = d\vec{F} \cdot \vec{V} = p(M, t) d\vec{S} \cdot \vec{v}(M, t) = \vec{R}_s \cdot d\vec{S}$$

On définit ainsi le vecteur de Poynting sonore $\vec{R}_s = p(M, t) \vec{v}(M, t)$, homogène à une puissance surfacique.

En utilisant les équations de la partie I)1) on exprime d'abord l'énergie cinétique volumique et l'énergie potentielle volumique de surpression due à l'onde sonore, puis on montre que $\text{div}(\vec{R}_s) + \frac{\partial e}{\partial t} = 0$.

On définit l'intensité sonore, et le niveau d'intensité sonore en décibels acoustiques :

$$I_s = \langle |\vec{R}_s| \rangle_{temporelle}$$

Pour une OPP, on a $I = \frac{1}{2} \rho c_s v^2$. Ainsi, pour une intensité sonore de 120 dBA dans l'air ($\chi_s = 7.10^{-5} Pa^{-1}$), on vérifie les approximations effectuées plus haut :

$$\begin{aligned} v &\approx 7cm/s \ll c_s \\ p &\approx \rho c_s v \approx 30Pa \ll 1bar \\ \mu &\approx p \chi_s \approx 3.10^{-4} kg.m^{-3} \ll P_0 = 1.3kg.m^{-3} \end{aligned}$$

2) Coefficients de réflexion

On rappelle que pour une OPP : $p \vec{z} = Z \vec{v}$ avec $Z = \pm \rho c_s$ suivant que l'onde se propage suivant $\pm \vec{z}$.

On considère une interface immobile (ou d'amplitude de déplacement petite devant la longueur d'onde) entre deux milieux d'impédance Z_1 et Z_2 . On montre alors grâce à la continuité des champs de vitesse et de pression que les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude s'écrivent :

$$\begin{aligned} r &= \frac{v_r}{v_i} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \\ t &= \frac{v_t}{v_i} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \end{aligned} \quad (1)$$

Ils ne sont pas forcément compris entre 0 et 1, et sont réels : pas de déphasage en transmission et un éventuel déphasage de π si $Z_2 > Z_1$.

On a également vu que $I = \frac{1}{2} \rho c_s v^2$. Il vient donc :

$$\begin{aligned} R &= \frac{I_r}{I_i} = r^2 \\ T &= \frac{I_t}{I_i} = \frac{Z_2}{Z_1} t^2 \end{aligned}$$

On retrouve, puisque la propagation des OPP se fait sans dissipation et que l'on n'a pas considéré d'absorption à l'interface, que $R + T = 1$.

Concept d'adaptation d'impédance : plus Z_1 et Z_2 sont proches, plus le coefficient de réflexion est faible.

Les impédances acoustiques des liquides et solides sont du même ordre de grandeur, contrairement à celles des gaz (réflexion importante) : écho, couche anti reflet pour l'échographie.

Application à un silencieux (d'échappement) :

On considère un conduit de section S_1 , suivi d'un conduit de section $S_2 > S_1$ sur une longueur L , puis à nouveau d'un conduit de section S_1 . Une onde sonore incidente est modélisée par une OPPH.

En décomposant les champs de pression avec des notations adaptées comme étant :

- onde incidente + onde réfléchie pour $x < 0$
- onde incidente + onde réfléchie pour $0 < x < L$
- onde transmise pour $x > L$

En écrivant la continuité de la pression et du débit aux deux changements de section il vient :

$$t = \frac{4S_1S_2}{(S_1 + S_2)^2 - (S_2 - S_1)^2 \exp(-2ikL)}$$

$$T = |t|^2 = \frac{1}{1 + m \sin\left(\frac{\pi f}{f_0}\right)^2}$$

Avec $f_0 = \frac{c_s}{2L}$ et $m = \left(\frac{S_2^2 - S_1^2}{2S_1S_2}\right)^2$

AN :

pour minimiser une fréquence de 200 Hz, il faut $L \approx 40$ cm (à température ambiante, car $c_s(T)$).

pour atténuer un bruit incident de 80 dBA de 20 dBA avec une section S_1 de diamètre 2 cm, il faut une section S_2 de diamètre environ égal à 9 cm.

Conclusion :

Revenir sur les messages de la leçon.

On peut aborder dans un cours suivant la notion de guide d'onde.

Questions du correcteur

- Comment interpréter la manip de la cloche à vide ?
- Pourquoi négliger la viscosité ? La conduction ? Ordres de grandeur le justifient : atténuation due à la viscosité et utilisation du coefficient de diffusion thermique $D_{th} = \frac{\lambda}{\rho c_p}$
- Dans le cas d'une faible conduction thermique, l'entropie est-elle constante ?
- Existe-t-il une équation de continuité sur l'entropie ? avec un terme caractéristique de la diffusion thermique ?
- Pourquoi utiliser une équation thermodynamique ? Isentropique versus isotherme ? Notre étude nous amène à considérer deux champs couplés (pression et vitesse). Néanmoins, ce couplage fait intervenir un troisième champ : celui de la masse volumique. On a donc besoin d'une troisième équation (caractéristique du milieu, comme pour les modèles phénoménologiques en électromagnétisme). On utilise le coefficient de compressibilité (qui caractérise la rigidité, ce qui est pertinent quand on s'intéresse à la propagation d'une onde dans un milieu matériel).

L'étude du milieu (ici l'air) nous amène à considérer le processus de propagation isentropique et non pas isotherme.

- Que traduit la notion d'impédance ? Le couplage entre deux champs, liés par Z .

- Connaissez vous des types d'ondes traduisant l'atténuation ? Les ondes sphériques. Suivant la géométrie du problème et les conditions aux limites, on peut utiliser ce type de solution (plutôt que les ondes planes pour la propagation libre) : changement abrupt de section, pavillon acoustique,...

- Comment mesurer le coefficient γ (exposant adiabatique) ? En mesurant la vitesse du son dans un gaz supposé parfait à température donnée ou avec la méthode de Clément-Desormes.

Remarques du correcteur

- Dire qu'on linéarise pour pouvoir décomposer sur une base les solutions : sans forcément insister sur la transformée de Fourier (surtout en L2).

- Dans cette leçon il faut faire attention à ne pas faire trop de calculs...mais pas non plus trop d'analogies (avec l'électromagnétisme). Ne pas se contenter d'un exposé de résultats, sans trop faire de calculs : motiver les notions présentées.

- Il faut bien motiver chaque équation par des hypothèses et ne pas simplement faire des mathématiques. C'est bien de justifier les hypothèses isentropique (partie I) et des ordres de grandeurs des champs de surpression et de masse volumique (partie II). Il serait peut être même préférable de le faire dès l'écriture des hypothèses, avant la résolution de l'équation de d'Alembert.

- Attention à ne pas sortir l'artillerie lourde d'analyse vectorielle dès le début, on peut commencer par un cas à 1D à généraliser à 3D.

- Si on fait une partie sur les solides, bien insister sur l'approximation des milieux continus, c'est ce qui est attendu, la relation de dispersion est secondaire. Se servir d'une approche macroscopique (module d'Young) pour en tirer des ordres de grandeur contrairement au système masse ressort.

- L'exemple de l'échographie est intéressant, apporter des ordres de grandeurs (de l'impédance, etc...) lui donnerai un aspect moins confidentiel. Avoir une idée de comment fonctionne un tel appareil (diffraction d'ondes acoustiques par un réseau dont le déphasage relatifs des cellules permet de modifier la direction) : voir le Garing.

- Pour le silencieux : expliquer le principe du calcul au tableau, ou utiliser directement le résultat final.

Bibliographie

"Ondes Mécaniques et Diffusion" Ellipses, Christian Garing.

Développements à avoir (ou pas) en tête

Prise en compte de l'amortissement :

En conservant la viscosité dans l'équation de Navier Stokes on montre :

$$\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p - \tau \frac{\partial}{\partial t} \Delta p = 0$$

avec $\tau = \eta \chi_S$ (de l'ordre de $10^{-10} m$ dans l'air)

On en déduit la relation de dispersion, et on fait apparaitre une longueur d'amortissement, de l'ordre de la centaine de km pour le son audible dans l'air, ce qui justifie l'appellation "milieu transparent". Néanmoins, la longueur d'amortissement diminue avec le carré de la fréquence (ultrasons se propagent moins bien).

Application à une cloison :

Cf Garing.

On considère une cloison d'épaisseur a vibrant d'un seul bloc ($a \ll \lambda$). En utilisant le PFD on montre que le coefficient de transmission vaut :

$$t = \frac{1}{1 + \frac{i\sigma\omega}{2\rho_{air}c_s}}$$

avec $\sigma = \rho_{cloison} a$ la masse surfacique de la cloison

La cloison constitue un filtre passe bas, d'autant plus efficace que σ est grand. AN : pour une fréquence de coupure de 2 Hz, on en déduit σ , et pour $\rho_{cloison} \approx 1000 \text{ kg/m}^3$ on en déduit a , qui est bien petit devant λ à 200 Hz.

Principe du sonar.

Impureté dans une chaîne d'atomes :

Cf Garing.

On considère une impureté de masse m_0 dans une chaîne d'atomes unidimensionnelle. Comme précédemment, il y a propagation d'un champ d'oscillations autour de la position d'équilibre des atomes de part et d'autre de l'impureté, avec la même relation de dispersion. On considère la propagation élastique d'ondes incidentes et réfléchies avant l'impureté, et d'ondes transmises après celle-ci, avec U_n l'écart à la position d'équilibre de l'atome positionné en $x = n a$:

$$\begin{aligned} U_{n,i}(x, t) &= A \exp(i(\omega t - kx)) \\ U_{n,r}(x, t) &= r A \exp(i(\omega t + kx)) \\ U_{n,t}(x, t) &= t A \exp(i(\omega t - kx)) \end{aligned}$$

La continuité de l'onde au niveau de l'impureté assure l'égalité des pulsations et l'équation : $1 + r = t$.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'impureté placée en $x=0$ donne :

$$m_0 U_0'' = K(U_{-1} - 2U_0 + U_1)$$

Ce qui donne en remplaçant les champs d'oscillations et la pulsation par leurs expressions :

$$t = \frac{1}{1 - i \left(\frac{m_0}{m} - 1 \right) \tan \left(\frac{ka}{2} \right)} \quad (2)$$

Discussion des cas limites (m_0 grand, m_0 petit et ka proche de π , m_0 petit et ka petit). Applications au contrôle non destructif des matériaux, échographie (compte tenu de la célérité des ondes sonores dans les tissus, travailler avec des fréquences de l'ordre de 1 à 10 MHz permet d'avoir une longueur d'onde de l'ordre du mm).

Manip de la cloche à vide :

On pourrait penser que c'est l'absence d'air dans la cloche qui empêche le son de se propager. En réalité, on peut estimer la distance interparticulaire à l'aide de la loi des gaz parfaits. Celle-ci est bien inférieure à la longueur d'onde de l'onde sonore ($\lambda = \frac{c_s}{f}$ et c_s est indépendant de la pression). Il s'agit donc d'un problème d'adaptation d'impédance air-paroi.

A l'aide d'un sonomètre, on peut montrer que l'intensité sonore augmente lorsque la pression diminue, car le coefficient de réflexion augmente : la cloche joue le rôle de cavité. L'augmentation de l'intensité sonore n'est pas très convaincante (peut être un problème d'adaptation d'impédance air raréfié-sonomètre), mais en tout cas elle ne diminue pas.