

LP24 Ondes progressives, ondes stationnaires

MEIDECK Thomas, LELIEVRE Félix

2013-2014

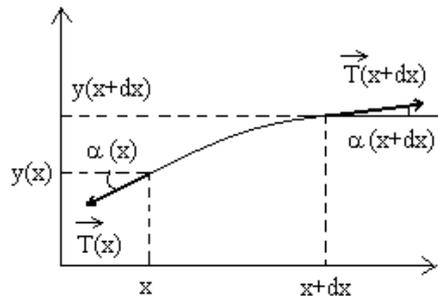
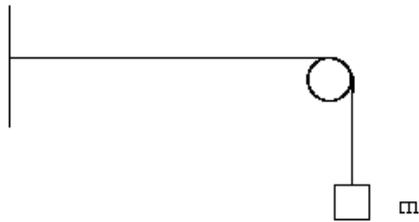
Intro:

La physique des ondes regroupe un grand nombre de phénomènes en physique, que ce soit en électromagnétisme, acoustique, optique ou encore mécanique. Le point intéressant est que des phénomènes à priori très différents possèdent un squelette commun, et qu'on peut donc raisonner sur un phénomène en ayant déjà traité un autre.

C'est ce que nous allons voir dans cette leçon en rentrant directement dans le vif du sujet, en commençant par établir l'équation phare de propagation des ondes, l'équation de d'Alembert, sur l'exemple qui me semble le plus visuel, celui de la corde vibrante.

I) Equation de d'Alembert, exemple de la corde vibrante

1) Modèle



Le modèle est le suivant: une corde est tendue (par exemple grâce à une masse), et donc soumise à une tension $T_0 = mg$.

Les hypothèses sont les suivantes:

On considère que la corde est au repos avec tout point de la corde en $(x,0)$, et que tout point de la corde initialement en $(x,0)$ se retrouve en $(x,y(t))$ à l'instant t .

De plus, on s'intéresse à une portion de la corde comprise entre x et $x+dx$, et on note $\alpha(x)$ l'angle que fait la tangente à la corde par rapport à l'axe Ox .

On se place dans l'approximation des petits angles, et au premier ordre, on aura donc:

$$\cos(\alpha(x)) \simeq 1 \quad \text{et} \quad \sin(\alpha(x)) \simeq \tan(\alpha(x)) \simeq \alpha(x)$$

La corde subit les tensions $\vec{T}(x)$ à gauche et $\vec{T}(x+dx)$ à droite.

On considère que la corde est inélastique, ce qui correspond à considérer que T est indépendante du temps.

De plus on note μ la masse linéique de la corde.

2) Mise en équation

On peut donc écrire le PFD:

$$dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{u}_y = \vec{T}(x) + \vec{T}(x+dx) \quad (1)$$

Or $dm = \mu \sqrt{dx^2 + dy^2} \simeq \mu dx$ car $dy \ll dx$.

$$(1) \cdot \vec{u}_x \Rightarrow 0 = -T(x) \cos \alpha(x) + T(x+dx) \cos \alpha(x+dx)$$

$$0 = T(x+dx) - T(x)$$

d'où T est indépendant de x. $T = T_0$

$$0 = \frac{\partial T}{\partial x} dx$$

$$(1) \cdot \vec{u}_y \Rightarrow \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T(x) \sin \alpha(x) + T(x+dx) \sin \alpha(x+dx)$$

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \alpha(x+dx) - T_0 \alpha(x)$$

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx$$

or: $\tan \alpha(x) \simeq \alpha(x) \simeq \frac{\partial y}{\partial x}$

d'où : $\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

Cette dernière équation, propre à la physique des ondes, est appelée équation de d'Alembert.

On remarque le couplage entre espace et temps, et la linéarité de cette équation.

La grandeur c est appelée « célérité des ondes » et correspond à la vitesse de propagation des ondes.

II) Solution de l'équation de d'Alembert

1) Ondes progressives

a) solution générale

Le premier à avoir mis en équation et résolu une équation d'onde, qui porte maintenant son nom, est d'Alembert en 1747.

On recherche tout d'abord des solutions sous forme d'onde progressive, c'est-à-dire pour lesquelles le temps et l'espace sont couplés.

D'Alembert a montré, et nous allons l'affirmer ici, que la solution générale de propagation des ondes est sous la forme: $y(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$.

On remarque que $G(x + ct) = G(-((-x) - ct))$ qui correspond à une fonction de $x - ct$, avec une convention d'orientation différente de l'axe des x.

On voit donc que la solution générale est la somme de deux fonctions, l'une correspondant à une onde de propagation selon x, et l'autre selon -x.

Vu l'équivalence des deux solutions, nous allons donc désormais considérer uniquement la solution $F(x - ct)$.

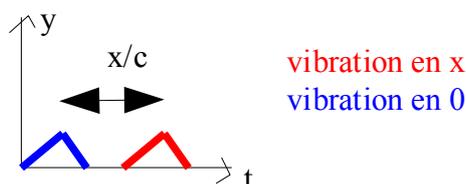
En quoi avons-nous affaire à une onde qui se propage?

On peut procéder à un jeu d'écriture:

$$y(x, t) = F(x - ct) = F\left(0 - c\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) = y\left(0, t - \frac{x}{c}\right)$$

et donc la vibration en un point x à un instant t est la même que celle au point O à un temps

$$t - \frac{x}{c} :$$



On voit donc bien ici le phénomène de propagation.

On peut raisonner de même en écrivant $y(x, t) = F(x - ct - 0) = y(x - ct, 0)$ où cette fois, c'est la connaissance de la vibration en tout point de la corde au moment initial qui détermine, par une translation de ct le long de l'axe x , la vibration en un point x .

b) Ondes progressives harmoniques

On définit une onde progressive harmonique progressive comme suit:

$y(x, t) = y_0 \cos(\omega t - kx + \phi)$ qu'on peut écrire comme ceci:

$$y(x, t) = y_0 \cos\left(2\pi\left(\frac{t}{\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)} - \frac{x}{\left(\frac{2\pi}{k}\right)}\right) + \phi\right) \quad \text{On voit donc apparaître une}$$

double périodicité, spatiale et temporelle.

	ω : pulsation		k : norme du vecteur d'onde
*temporelle:	$T = \frac{2\pi}{\omega}$: période	*spatiale:	$\lambda = \frac{2\pi}{k}$: longueur d'onde (période spatiale)
	$f = \frac{1}{T}$: fréquence		$\sigma = \frac{1}{\lambda}$: fréquence spatiale

Lien entre les deux?

Si on utilise l'équation de d'Alembert appliquée à $y(x, t)$, on obtient alors

$$-k^2 y(x, t) - \frac{1}{c^2} (-\omega^2) y(x, t) = 0 \quad \text{soit} \quad \omega = kc$$

Cette dernière relation est appelée relation de dispersion.

Plan d'onde:

On définit un plan d'onde ainsi: à t fixé, la vibration est la même.

$$\omega t - kx = cste$$

Ceci signifie donc: $x = \frac{\omega}{k}t - \frac{cste}{k}$ On remarque qu'un plan d'onde se déplace à la vitesse

$$\frac{\omega}{k} = v_\phi \quad \text{appelée vitesse de phase. Ici} \quad v_\phi = c$$

Rmq: Ces ondes progressives n'ont pas de réalité physique, car elle sont infinies spatialement et temporellement, mais on peut néanmoins les utilisées grâce à linéarité de l'équation de d'Alembert. En effet, on pourra écrire des ondes « réelles » comme la somme d'ondes progressives.

2) Ondes stationnaires

a) Forme

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à des solutions de l'équation de d'Alembert pour lesquelles le temps et l'espace sont découplés. On cherche donc des vibrations de la forme

$$y(x, t) = f(x)g(t)$$

En réinjectant dans l'équation: $\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{g''(t)}{g(t)}$. Les deux membres dépendant l'un de l'espace, l'autre du temps uniquement, ils sont égaux à une constante C_0 .

Si $C_0 > 0$, $g(t) = A e^{\frac{t}{\tau}} + B e^{-\frac{t}{\tau}}$. Le premier terme, « explosif », n'est pas réel. Le deuxième terme,

correspondant à un régime transitoire, n'est pas intéressant dans le cas d'une onde stationnaire. Le cas $C_0=0$ pose le même problème. On en déduit donc $C_0 < 0$.
 On note $C_0 = -k^2$.

On obtient alors, en notant $\omega = kc$:

$$y(x, t) = y_0 \cos(\omega t + \phi_t) \cos(kx + \phi_x)$$

b) Etude

A t fixé, la vibration forme une sinusoïde.

On remarque qu'il existe des x pour lesquels la vibration est nulle pour tout temps.

$$kx_n + \phi_x = \pi \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Ils sont tels que:

$$x_n = \frac{\pi}{k} \left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{\phi_x}{k}$$

et sont appelés noeuds de vibration.

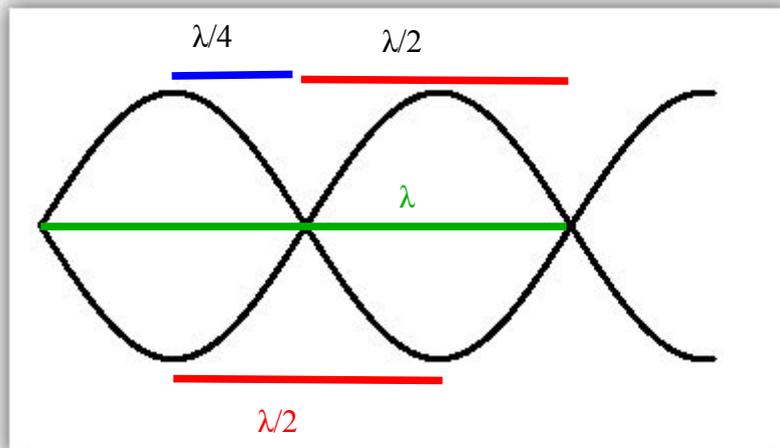
De même il existe des ventres de vibration dont l'amplitude est maximale:

$$kx'_n + \phi_x = \pi n$$

$$x'_n = \frac{\pi}{k} n - \frac{\phi_x}{k}$$

Deux noeuds ou deux ventres sont séparés de $\frac{\pi}{k} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{\lambda}{2}$. De même, un ventre et un noeud

sont séparés de $\frac{\lambda}{4}$.



3) OPH ? OS ?

Nous avons donc vu l'existence de deux types de solutions de l'équation de d'Alembert. La question est la suivante: quand utiliser l'une ou l'autre? Sont-elles équivalentes?

Remarquons alors:

$$A \cos(\omega t - kx + \phi) = A(\cos(\omega t - \phi) \cos(kx) + A \cos(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}) \cos(kx - \frac{\pi}{2}))$$

Onde progressive = Σ ondes stationnaires

$$A \cos(\omega t + \phi_t) \cos(kx + \phi_x) = \frac{A}{2} (\cos(\omega t + kx + \phi_x + \phi_t) + \cos(\omega t - kx + \phi_x - \phi_t))$$

Onde stationnaire = Σ ondes progressives

On peut donc choisir de travailler avec des solutions en ondes stationnaires ou bien progressives, en fonction de la facilité de résolution qui est liée aux conditions du problème.

Généralement:

-système avec conditions aux limites: stationnaires

-système infini, sans C.L : progressives

III) Solution de la corde vibrante

Je ne mets pas de schéma, le problème est celui de la corde vibrante attachée en deux points fixes.

On a des conditions aux limites, on utilise donc les solutions en ondes stationnaires.

$$y(x, t) = y_0 \cos(\omega t + \phi_t) \cos(kx + \phi_x)$$

$$y(0, t) = 0$$

$$\rightarrow \cos(\phi_x) = 0$$

$$\rightarrow \phi_x = \frac{\pi}{2}$$

$$y(L, t) = 0$$

$$\rightarrow \cos(kL + \frac{\pi}{2}) = 0$$

$$\rightarrow \sin(kL) = 0$$

on a donc

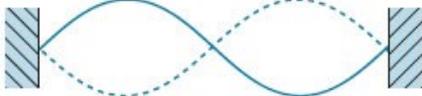
$$kL = n\pi$$

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$$

$$L = n \frac{\lambda}{2}$$

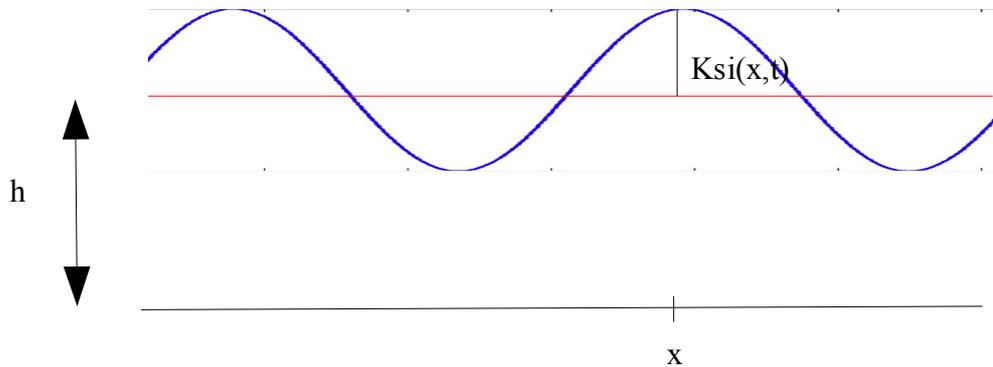
D'où $y_n(x, t) = y_{0n} \cos(\frac{n\pi c}{L}t + \phi_{nt}) \sin(n \frac{\pi}{L}x)$

On possède donc des solutions dépendant de n, appelés modes de vibration.

	mode	wavelength	frequency
	first	$2L$	$\frac{v}{2L}$
	second	L	$\frac{v}{L}$
	third	$\frac{2L}{3}$	$\frac{3v}{2L}$
	fourth	$\frac{L}{2}$	$\frac{2v}{L}$

Bon j'ai mis une image d'internet, à dessiner au tableau (genre les 3 premiers modes).

IV) Application à un domaine différent 1D: Ondes dans un bassin



On considère le problème de la houle.

Un bassin de hauteur h , de largeur L .

On note μ la masse volumique.

On considère une vitesse moyenne selon x : $v(x,t)$. On la suppose faible.

On note $\xi(x,t)$ la différence d'altitude de la surface de l'eau à un instant t , à l'abscisse x .

Bilan de masse entre x et $x+dx$:

$$dm = \mu L dx (h + \xi(x,t))$$

La variation de dm pendant dt est:

$$d^2 m = \mu L dx \frac{\partial \xi}{\partial t} dt$$

Or, pendant dt , les particules franchissant le plan x sont dans le volume $(h + \xi(x,t)) L v dt$

$$\delta^2 m(x) = (h + \xi(x,t)) \mu L v(x,t) dt$$

$$\delta^2 m(x+dx) = (h + \xi(x+dx,t)) \mu L v(x+dx,t) dt$$

Alors:

$$d^2 m = \delta^2 m(x) - \delta^2 m(x+dx)$$

Alors

et si $\xi \ll h$

$$d^2 m = \mu L v(x) dt h - \mu L v(x+dx) dt h$$

$$d^2 m = -\mu L \frac{\partial v}{\partial x} dx dt h$$

D'où, en égalisant les deux équations de $d^2 m$:

$$\mu L dx \frac{\partial \xi}{\partial t} dt = -\mu L \frac{\partial v}{\partial x} dx dt h$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{h} \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0$$

D'autre part, en écrivant l'équation d'Euler:

$$\mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} P + \mu \vec{g}$$

Or, si v est supposée faible (c'est le cas), le terme en v^2 est négligeable.

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} P + \mu \vec{g}$$

*Selon z:

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \mu g$$

$$P(z, t) = -\mu g z + \alpha(x, t)$$

Or: $P_0 = -\mu g (h + \xi(x, t)) + \alpha(x, t)$

Donc: $P(M, t) = -\mu g z + P_0 + \mu g (h + \xi(x, t))$

*Selon x:

$$\mu \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\mu \frac{\partial v}{\partial t} = -\mu g \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -g \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = g h \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (\text{d'après l'équation obtenue avec le bilan de masse}).$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{(\sqrt{gh})^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

On reconnaît une équation de d'Alembert avec $c = \sqrt{gh}$

On peut donc, sans refaire les calculs, faire l'analogie avec ce qu'on avait déjà vu avec la corde vibrante. On peut par exemple calculer la fréquence d'oscillation de la surface dans une baignoire.

On avait vu:

$$L = n \frac{\lambda}{2} = n \frac{c}{2f_n}$$

d'où :

$$f_n = n \frac{c}{2L} = n \frac{\sqrt{gh}}{2D}$$

Par exemple pour le mode 1, on trouve $f=1,1$ Hz, soit la fréquence à laquelle oscille l'eau quand, tel Archimède, on se plonge dans sa baignoire.

V) Conclusion

On a donc vu que dans la physique des ondes, même si les phénomènes sont a priori très différents, ils possèdent les mêmes caractéristiques, et on peut donc transférer l'étude d'un cas vers celui d'un autre cas.

Nous avons également vu que pour résoudre de tels systèmes, on utilisait deux formes de solutions, les stationnaires et les progressives, dont l'utilisation de l'une ou l'autre dépend des conditions du problème .

Commentaires, questions:

-Ne pas autant écrire (utiliser vidéoprojecteur, rétro)
(genre les schémas, les faire sur transparents)

-mode propre: faire la corde de Melde en live pour illustrer

-Pourquoi pas quelques vidéos pour montrer certains phénomènes des ondes

-Bien de faire 2 domaines de la physique (obligé)

-Ne pas faire electromag ou accoustique pour ne pas empiéter sur les autres leçons

-demo de $y(x,t)=F(x+ct) + G(x-ct)$, inutile selon le correcteur

-pour les ondes dans un bassin, pourquoi pas faire les tsunamis ($h=1\text{km}$)

alors $\sqrt{gh} \simeq 500 \text{ km.h}^{-1}$ et voir qu'avec un bateau, on ne « voit » pas la vague, qui grandit aux voisinages des côtes.

– onde qui se propage: couplage entre deux champs, en parler (genre E,B ou v, ξ pour le bassin)

inhomogénéité d'un champ: modification de l'autre champ

- on ne peut pas tout caser, il faut donc faire des choix.