

Compte rendu LP22 : Traitement d'un signal. Etude spectrale

J'ai estimé que cette leçon devait être placée au niveau L1, du coup le plan ne va pas faire rêver (découverte des filtres avec étude pour la première fois des diagrammes de Bode, et l'archi classique modulation/démodulation d'amplitude). Le correcteur a donc trouvé la leçon peu inspirée, l'estimant à un niveau plus élevé, et voulant aborder le traitement du signal par une approche beaucoup plus générale. Il a trouvé aussi que la logique de mon plan ne s'est révélée qu'à la fin de la présentation, il aurait fallu guider l'auditoire dès le début. Ce compte rendu tient compte des remarques pour rendre la logique du plan plus explicite. Je signalerai les propositions du correcteur quant à une approche plus générale du traitement de signal dans la partie remarques.

Niveau : L1

Prérequis : Impédances des dipôles usuels, évolution temporelle des circuits en électrocinétique, régime sinusoïdal forcé, notation complexe, diviseur de tension avec les impédances.

Introduction : Nous nous sommes attachés à écrire les équations différentielles régissant l'évolution temporelle des grandeurs (tension, courant) d'un circuit électrique. En particulier, nous avons vu qu'au bout d'un régime transitoire, lorsque le générateur impose une tension sinusoïdale, on retrouve aussi dans le circuit cette tension sinusoïdale, c'est le régime sinusoïdal forcé. Dans cette leçon nous allons travailler sous ce régime, et voir comment le système peut modifier le signal.

1 Etude fréquentielle d'un système

1.1 Description fréquentielle du signal

Il s'agit dans cette partie de décrire la décomposition en série de Fourier. On trouvera dans le *HPrépa Electronique PSI/PSI** l'expression des coefficients de la série. J'ai travaillé sur l'expression :

$$s(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \phi_n)$$

avec $\omega = 2\pi/T$ et T la période du signal. Bien insister sur le fait que donner les C_n et les ϕ_n est équivalent à donner $s(t)$.

Il faut définir ce qu'est le fondamental et les harmoniques (j'ai utilisé les mots sans les définir), puis j'ai montré deux exemples de spectres grâce au module FFT de l'oscilloscope, ceux du créneau et du triangle. J'ai essayé de faire sentir ce que représentait physiquement C_n , le "poids" de l'harmonique n , en faisant remarquer que plus le signal varie brusquement (cas du créneau), plus on a besoin de signaux qui varient rapidement pour le représenter, donc de hautes fréquences, donc les C_n décroissent moins vite avec n pour le créneau que pour le triangle, les hautes harmoniques ont plus de poids pour le créneau.

1.2 Fonction de transfert

J'ai explicité ici le lien entre l'équation différentielle linéaire entre l'entrée et la sortie, et comment cette dernière pouvait s'écrire comme une fraction de polynômes en régime sinusoïdal forcé. Cette fraction est bien sûr la fonction de transfert. Le lien est bien fait dans *HPrépa Electronique PSI/PSI**.

Le correcteur aurait mis la définition de la fonction de transfert en prérequis, et trouve que j'ai passé trop de temps dessus. J'ai surtout insisté (peut être mon message n'était pas assez clair) sur le fait que comme l'équation différentielle est linéaire, on peut décomposer l'entrée en sinusoides de différentes fréquences (série de Fourier), étudier la réponse du système pour chaque fréquence grâce à la fonction de transfert, sommer ces réponses (par linéarité) pour obtenir le signal de sortie total. L'importance de la linéarité est signalée dans tous les bouquins (principe de superposition), pour l'étude des circuits électriques je l'ai trouvée dans *J'intègre PCSI*.

1.3 Etude de la fonction de transfert

J'ai mis en évidence que la fonction de transfert, étant une quantité complexe, contient deux informations. Son module renseigne sur le rapport des amplitudes entre l'entrée et la sortie, son argument renseigne sur le déphasage entre la sortie et l'entrée (voir *HPrépa Electronique PSI/PSI**).

Présentation des diagrammes de Bode, en échelle semi logarithmique (expliquer l'intérêt de sonder une plage étendue de fréquences). On ne trace pas le module de la fonction de transfert mais une quantité là aussi logarithmique, le gain (dont on trouvera la définition dans *HPrépa Electronique PSI/PSI**).

Ce qui manque à cette partie, c'est une définition du signal et une annonce de ce que nous allons faire après. Un signal est la grandeur physique que l'on mesure. On travaille ici avec des signaux continus, analogiques. On a vu la décomposition du signal en série de pics (décomposition en série de Fourier). Le filtrage que nous allons présenter dans la deuxième partie va consister à sélectionner certains pics par rapport à d'autres, grâce à l'action de la fonction de transfert. La multiplication de signaux vue à la troisième partie consistera à translater les pics (opération non linéaire car apparition d'autres fréquences).

2 Le filtrage

On va étudier en détails deux filtres, le passe-bas et le passe-bande. Je ne vais pas retracer tous les calculs que j'ai faits au tableau, puisqu'ils sont simples et qu'on les trouve dans tous les bouquins !

2.1 Le filtre passe-bas d'ordre 1

Après le schéma du montage électrique, on établit la fonction de transfert grâce à un diviseur de tension. Comme c'est la première fois qu'on étudie une fonction de transfert et les diagrammes de Bode, on insiste bien sur le fait qu'on s'intéresse pour tracer ces derniers aux comportements

asymptotiques (ce genre d'étude est très bien faite dans le *J'intègre PCSI*, c'est ma référence pour cette partie). On explique la pente de -20 dB/décade, et la bande passante (pulsation de coupure à -3 dB). Voir surtout l'effet du filtre sur le signal créneau, avec si le temps le caractère intégrateur du filtre au delà de la pulsation de coupure (le créneau se transforme alors en triangle). Je n'ai pas eu le temps malheureusement de montrer en direct l'effet du filtre.

2.2 Le filtre passe bande d'ordre 2

On suit la même démarche grâce au même bouquin *J'intègre PCSI*. J'ai insisté ici sur le facteur de qualité Q , qui permet de juger de la sélectivité du filtre. Pour un passe bande d'ordre 2, le gain est nul à la pulsation de résonance. Or les asymptotes se coupent au gain $20 \log(1/Q)$, donc plus Q est grand, plus ce point d'intersection est bas, donc plus la courbe de gain est piqué sur la pulsation de résonance, donc il est plus sélectif. J'ai aussi précisé la formule liant Q à la bande passante $\Delta\omega$, mais je ne l'ai pas montré car le calcul est un peu long.

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

2.3 Les différents filtres

Pour résumer, j'ai tracé les diagrammes de Bode en gain asymptotiques des quatre types de filtres : passe haut, passe bas, passe bande et coupe bande.

3 Traitement non linéaire du signal : modulation/démodulation d'amplitude

Dans cette dernière partie, il s'agit d'aborder un traitement non linéaire du signal, la multiplication de signaux, pour l'appliquer à une technique de transmission de l'information.

3.1 Multiplication de deux signaux

Faire le calcul dans le cas de deux sinusoïdes (voir *HPrépa Electronique PSI/PSI**) et constater l'apparition de nouvelles fréquences (signe d'un traitement non linéaire).

3.2 Spectre du signal modulé

Toujours dans le *HPrépa Electronique PSI/PSI**, il y a des schémas où cette fois-ci le signal n'est plus une simple sinusoïde mais un ensemble de signal dont les fréquences sont comprises dans le domaine de l'audible (le signal que l'on souhaite transmettre à la radio par exemple). On fait les schémas des spectres du signal modulé, avec porteuse conservée.

Intérêt de la modulation : la haute fréquence de la porteuse est plus facilement transmise dans l'air (onde radio). De plus, en utilisant différentes fréquences pour des porteuses, on peut transmettre différents signaux en même temps, c'est le multiplexage.

3.3 Récupération de l'information

Il suffit de multiplier par la fréquence de la porteuse pour opérer comme précédemment à une translation de fréquence. On peut le montrer en faisant le calcul grâce à une expression simple du signal modulé (cf *HPrépa Electronique PSI/PSI**)

$$s(t) = s_0 (1 + m \cos(2\pi f_s t)) \cos(2\pi f_p t)$$

On montre ensuite le spectre du démodulé, ou on utilisera enfin un passe-bas et un passe-haut pour récupérer le signal.

On peut faire remarquer que la translation de fréquence est utile pour la détection d'un signal bruité (parler du principe de la détection synchrone). Le signal intéressant étant de fréquence nulle, il suffit d'utiliser un filtre passe pas à fréquence de coupure très basse pour avoir une faible puissance due au bruit.

4 Questions

Que réalise l'oscilloscope ? C'est une conversion d'un signal analogique (continu) en un signal numérique. C'est un autre type de traitement du signal dont je n'ai pas parlé ici.

Un petit mot sur la FFT ? On parle de fréquence d'échantillonnage, l'influence de la durée d'acquisition sur la résolution spectrale, du critère de Shannon, repliement de spectre...

Sur le filtre passe bande, vous n'avez pas parlé de résonance ? J'ai plutôt parlé de la sélectivité en fréquence que de la résonance (qui elle décrit l'amplification de la réponse). On a ensuite parlé des filtres passe bas et passe haut du second ordre, qui font eux aussi apparaître des résonances. Quel est le lien entre la surtension et Q ?

Parlons du produit de convolution Si dans l'espace des fréquences la réponse du filtre correspond à une multiplication, fréquence après fréquence, de l'entrée et de la fonction de transfert, en temporelle elle correspond au produit de convolution de l'entrée et de la réponse à une impulsion du système. Ce lien est assez bien expliqué dans *Boussié, Electronique*

5 Remarques et bibliographie

Comme je le disais en introduction, le correcteur voit un plan plus ambitieux pour cette leçon, en parlant de traitement du signal au sens large. Déjà, en définissant signal comme une grandeur évoluant dans le temps (signal électrique ou sonore), dans l'espace (une photo) ou même les deux (la télévision). Ensuite, en gardant en tête l'idée de faire une étude spectrale, on peut énumérer les opérations qu'on peut faire subir aux différents pics : les amplifier, les réduire, n'en garder que quelques uns, les translater. Pour aller plus loin dans les filtres, on peut parler de mise en cascade, de filtres actifs, pour faire des filtres de plus en plus performants.

Sur les signaux visuels, il y aussi des tas de choses à dire. Finalement, la formation d'une image par une lentille et là aussi du traitement du signal. On peut parler d'opérations de

convolution pour comparer deux photos (à la base de la reconnaissance faciale). Ou de filtrage spatial, pourquoi pas!

Enfin, il serait de bon ton de parler du traitement numérique des données, car de toute façon, on y aura droit pendant les questions.

J'ai beaucoup utilisé pour cette leçon le *HPrépa Electronique PSI/PSI** et le *J'intègre PCSI*. Le correcteur m'a conseillé le *Boussié Electronique*, qui bien qu'un peu vieux renferme de nombreuses idées générales et simples d'accès sur le traitement du signal.