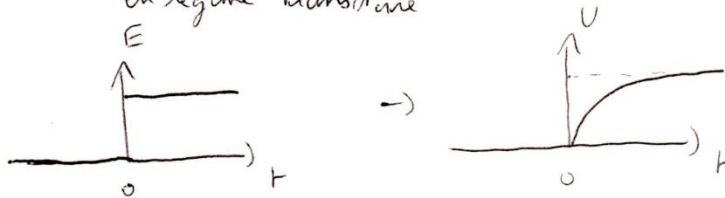


LP23

Traitement analogique du signal électrique Étude spectrale

Préquis: L2, étude des circuits RLC en régime transitoire.

Intro: Nous avons déjà étudié la réponse d'un circuit linéaire en régime transitoire



Que se passerait-il si tension et courant d'entrée évoluent dans le temps? Quels en seraient les intérêts?

Éléments de réponse: en régime stationnaire, bobine et condensateur présentent peu d'intérêt, ceux-ci résident dans les variations de courant ou de tension.

Le but de cette leçon est de montrer comment se servir des régimes variables et comment les étudier.

I) Du temporel au fréquentiel

Lors des études des régimes transitoire, le paramètre d'étude est le temps (période d'oscillations, temps de réponse...). Nous verrons lors de ce chapitre que le paramètre influent dans l'étude des régimes permanents est la fréquence

a) Régime harmonique

Toute fonction périodique peut être écrite en somme de fonctions sinusoïdales d'après Fourier.

$$\text{Soit: } f(t) = \sum_{i=1}^m A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) \quad \begin{array}{l} \omega_i = m \omega_0 \\ \text{avec } \omega_0 \text{ la pulsation} \end{array}$$

Donc si j'étudie la réponse d'un SLI à une tension et un courant d'entrée sinusoïdale, je pourrais en déduire celle due à toute tensions et courants périodiques.

b) Notation complexe

Lors de l'étude d'un SLI, on est amenés à additionner ou dériver des tensions ou courants. Or ces opérations sont fastidieuses à réaliser sur des fonctions cosinus ou sinus et les expressions finales ne sont pas agréables. On utilise donc la notation complexe:

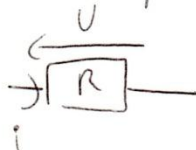
$$\operatorname{Re}(A_0 e^{j(\omega t + \varphi)}) = A_0 \cos(\omega t + \varphi) = A(t)$$

$$\text{On pourra noter: } \underline{A}(t) = A_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{A_0} e^{j\omega t}$$

$$\text{avec } \underline{A_0} = A_0 e^{j\varphi}$$

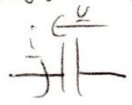
c) Impédance

La notation complexe simplifie les calculs de manière significative et introduit la notion d'impédance. Pour mieux comprendre, étudions trois exemples classiques:



$$U = Ri \Rightarrow \underline{U} = R \underline{i}$$

La résistance a une caractéristique qui n'est pas dépendante de ω , la notation complexe n'est donc pas utile ici.

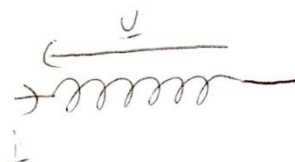


$$C \frac{dU(t)}{dt} = i(t) \Rightarrow C \frac{d\underline{U}}{dt} = \underline{i}$$

$$\Rightarrow C \cdot \omega \frac{d e^{j\omega t}}{dt} = \underline{i}$$

$$\Rightarrow C j\omega \underline{U} = \underline{i}$$

$$\Rightarrow \underline{U} = \frac{\underline{i}}{jC\omega}$$



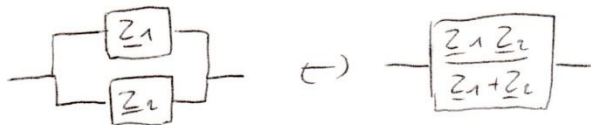
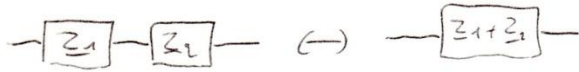
$$L \frac{di(t)}{dt} = U(t)$$

$$\Rightarrow \underline{U} = L \omega \frac{d e^{j\omega t}}{dt}$$

$$\Rightarrow \underline{U} = jL\omega \underline{i}$$

On remarque qu'avec la bobine et le condensateur, le coefficient de proportionnalité entre U et i dépend de ω , la pulsation du signal. Par analogie avec la résistance ($R = \frac{U}{i}$), on définit l'impédance d'un composant par

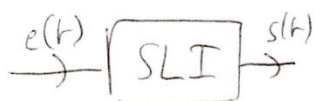
$Z(\omega) = \frac{U}{i}$. On remarque que l'on peut ainsi additionner des impédances en série ou en parallèle:



On verra par la suite que le pont diviseur de tension et de courant sont aussi utilisables.

II Filtrage spectral

a) Système linéaire invariant



Système linéaire si:
$$\sum_{i=1}^m D_i \frac{d^i s}{dt^i} = \sum_{j=1}^m N_j \frac{d^j e}{dt^j}$$

Invariant si $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\frac{dD_i}{dt} = 0$ et $\frac{dN_j}{dt} = 0$

b) Fonction de transfert

Si je passe le SLI en notation complexe: 

Comment connaître v_s en fonction de v_e ? Pour cela, j'utilise la fonction de transfert qui a pour définition:

$$\frac{v_s}{v_e} = H(\omega)$$

Si $\underline{H}(\omega)$ n'est pas une constante, le SLI amplifie, diminue ou déphase le signal différemment en fonction de la fréquence, il s'agit donc d'un filtre.

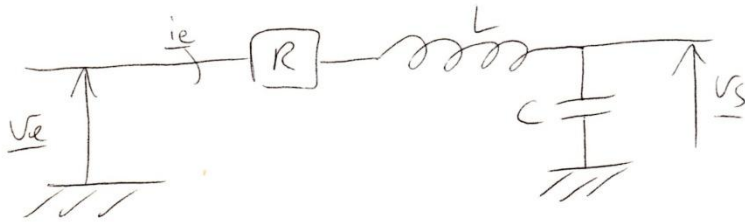
On peut démontrer que l'on peut écrire la fonction de transfert de filtres réels comme un quotient de polynômes :

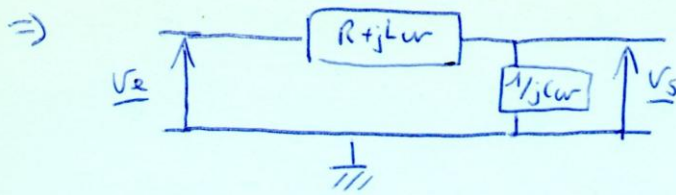
$$\underline{H}(\omega) = \frac{\sum_{i=1}^m N_i(j\omega)^{a_i}}{\sum_{k=1}^n D_k(j\omega)^{b_k}}$$

On définit l'ordre du filtre comme étant le degré du polynôme au dénominateur.

On distinguera les filtres passifs (dans lesquels il n'y a que des récepteurs de courant) et les filtres actifs (dans lesquels il y a au moins une source comme un AO).

c) Calcul de la fonction de transfert d'un circuit RLC





Pont diviseur de courant:

$$\underline{V_3} = \frac{\frac{1}{jCw}}{\frac{1}{jCw} + R + jLw} \underline{V_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(w) = \frac{1}{1 - LCw^2 + jRCw}}$$

* Diagramme de Bode, caractéristiques du système

La fonction de transfert pose quelques difficultés à tracer, d'une part elle a une partie réelle et imaginaire et de plus on voudrait

étudier la réponse du système sur un large domaine de fréquence.

Une des solutions est d'utiliser un diagramme de Bode, il consiste à tracer $G_{dB}(w)$ en fonction de $\log(w)$ et $\varphi(w)$ en fonction de $\log(w)$ appelées gain en décibel et phase respectivement.

Avec $G_{dB}(w) = -20 \log G(w)$ et $G(w) = \| \underline{H}(w) \|$

$$\varphi(w) = \arg(\underline{H}(w))$$

Dans notre exemple de circuit, cela donne :

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1+LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}} ; \varphi(\omega) = -\arg(1+LC\omega^2 + jRC\omega)$$

Cherchons les limites de G et φ en $\omega \rightarrow 0$ (BF) et $\omega \rightarrow +\infty$ (HF)

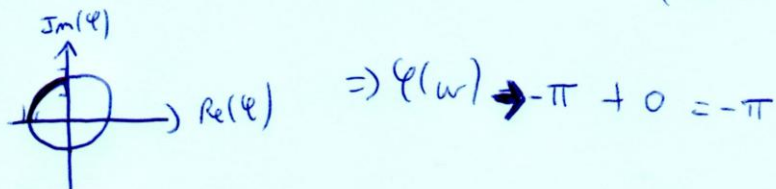
$$\text{BF: } G(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow G_{dB}(\omega) \rightarrow 0$$

$$RC\omega > 0 ; 1 - LC\omega^2 > 0$$

$$\text{donc je peux écrire: } \varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{RC\omega}{1-LC\omega^2}\right) \rightarrow 0$$

$$\text{HF: } G(\omega) \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{LC\omega^2} \rightarrow 0^+ \Rightarrow G_{dB}(\omega) \rightarrow -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 - LC\omega^2 < 0 \\ jRC\omega > 0 \end{array} \right\} \text{ donc } \varphi(\omega) = -\left(\pi - \arctan\left(\frac{RC\omega}{LC\omega^2 - 1}\right)\right)$$



On remarque qu'il y a des asymptotes pour φ en $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow +\infty$.

Cherchons à voir s'il y en a pour $G_{dB}(\omega)$.

$$\begin{aligned} \text{HF: } G_{dB}(\omega) &\rightarrow 20 \log \frac{1}{LC\omega^2} = -20 \log LC - 20 \log(\omega^2) \\ &= -20 \log LC - 40 \log(\omega) \end{aligned}$$

$$\text{BF: } G_{dB}(\omega) \rightarrow 0$$

Pour savoir comment évoluent b et φ entre leurs asymptotes, cherchons des points caractéristiques de b et φ .

• φ passe de 0 à $-\pi$, cherchons la pulsation à laquelle φ vaut $-\frac{\pi}{2}$ notée ω_0 .

$$\varphi(\omega_0) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \arg(1 - LC\omega_0^2 + jR C\omega_0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 1 - LC\omega_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

• Sous quelles conditions G possède un maximum? S'il en a un en quelle pulsation se situe-il?

$$G(\omega)_{\max} \text{ si } \sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2 C^2 \omega^2} \text{ minimal}$$

$$\Rightarrow (1 - LC\omega^2)^2 + R^2 C^2 \omega^2 \text{ minimal (avec } W = \omega^2)$$

$$\Rightarrow 1 + LC^2 W^2 - 2LCW + R^2 C^2 W \text{ minimal}$$

$$\Rightarrow 2LC^2 W - 2LC + R^2 C^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2W}{\omega_0^4} = \frac{2}{\omega_0^2} - R^2 C^2$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{1}{L} \sqrt{2\omega_0^2 - R^2 C^2 \omega_0^4}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{\omega_0}{L} \sqrt{2 - R^2 C^2 \omega_0^2}$$

G présente un maximum si $2 - R^2 C^2 \omega_0^2 > 0$

$$\Rightarrow R^2 C^2 \omega_0^2 < 2$$

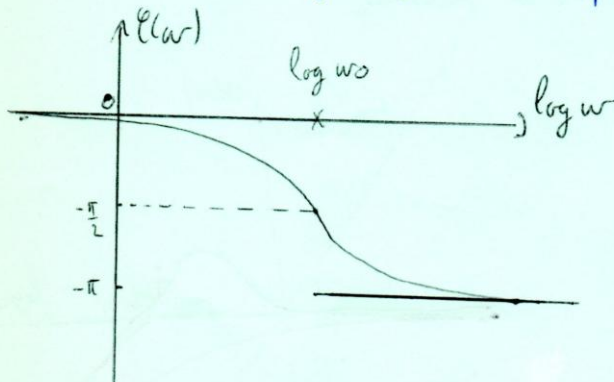
$$\text{Notons } Q = \frac{1}{RC\omega_0}$$

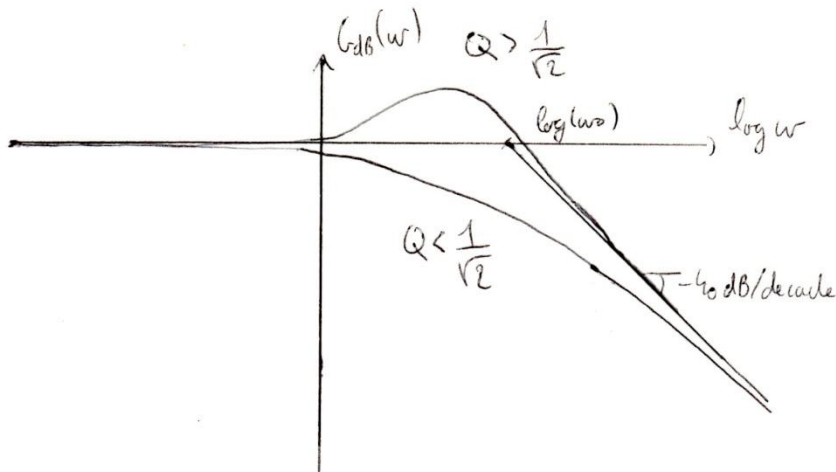
$$Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{si } G \text{ a un maximum.}$$

Le maximum de G se trouve en $\omega < \omega_0$ et la pulsation où G est maximal dépend de Q .
On appelle ω_0 la pulsation propre et Q le facteur de qualité.

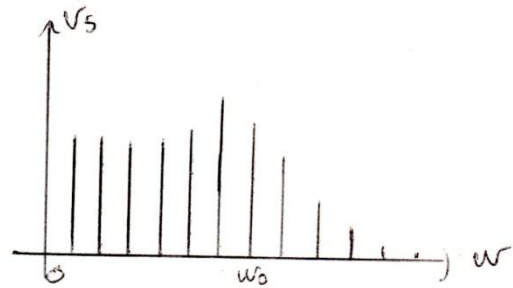
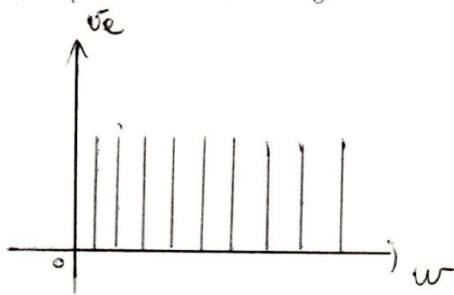
$$\text{On peut réécrire } H: \quad \underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}} = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

Cette notation est appelée forme canonique.





Observons l'action de ce filtre en gain sur une fonction d'entrée quelconque. Pour ce, traçons un diagramme spectral:



En conclusion, ce filtre est un passe bas d'ordre 2, on remarque que plus Q est grand, plus le signal de fréquence w_0 est amplifié et plus cette amplification est sélective d'où son nom: facteur de qualité.

Avoir un écart de pente entre les asymptotes de G de ± 40 dB/decade et avoir $\Delta\varphi = \pm\pi$ entre les asymptotes de φ caractéristique d'un filtre d'ordre 2.

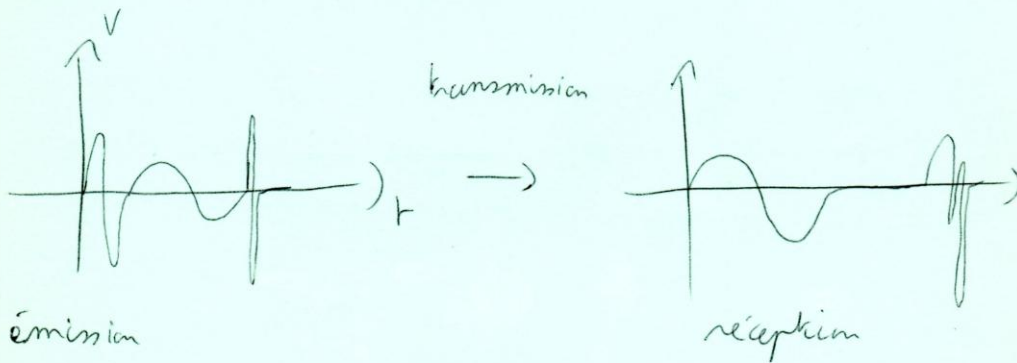
III Application dans le cas de systèmes non linéaires

Pour transmettre un signal par le biais d'un canal, je dois connaître les fréquences des signaux transmissibles par ce canal.

ex: ligne électrique; (0 - 10 Hz)

supertérahertz; (10¹⁴ Hz - 100¹⁶ Hz)

Il se peut que mon signal soit à la bonne fréquence mais même si c'est le cas, il doit être composé de fréquences différentes si je veux transmettre une information (une fonction sinusoïdale me donne seulement deux informations: son amplitude et sa fréquence). Or ces fréquences ont des vitesses de propagation différentes dans le milieu et ne peuvent donc pas être séparées à l'arrivée.



a) Modulation

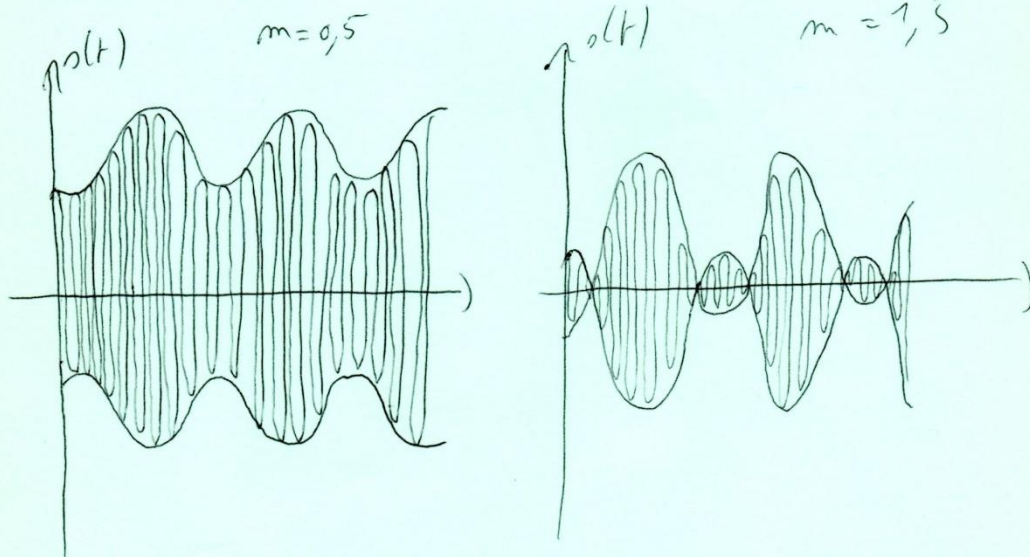
L'idée est d'utiliser un signal $p(t)$ (appelé porteuse) dont la fréquence appartient au domaine qui m'intéresse et de le moduler par le signal analogique $i(t)$ (appelé signal informatif) que je veux transmettre.

Preons $i(t) = \cos(2\pi f_m t)$ (l'amplitude a été réduite à 1)

$$p(t) = A_p \cos(2\pi f_p t + \phi_p)$$

$$\text{Signal modulé : } s(t) = A_p (1 + m i(t)) \cos(2\pi f_p t + \phi_p)$$

m est appelé taux de modulation, il doit être choisi judicieusement :

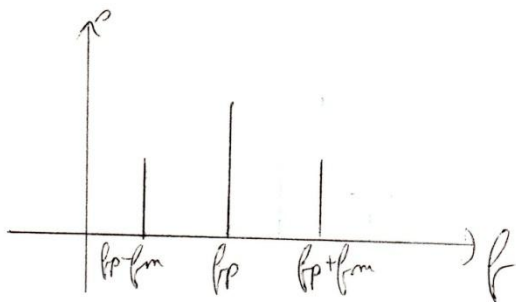


L'intérêt de cette modulation est de faciliter la démodulation, les cas intéressants sont donc $m < 1$

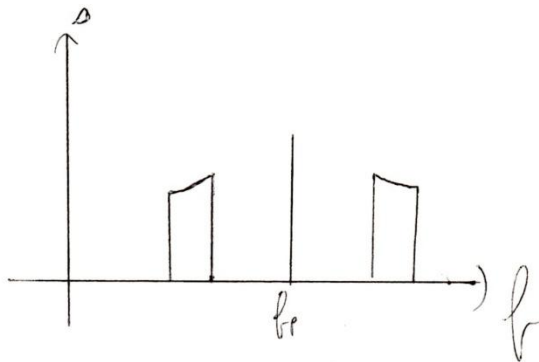
$$s(t) = A_p \cos(2\pi f_p t + \varphi_p) + m A_p \cos(2\pi f_m t) \times \cos(2\pi f_p t + \varphi_p)$$

$$s(t) = A_p \cos(2\pi f_p t + \varphi_p) + \frac{m A_p}{2} \left(\cos(2\pi(f_m + f_p)t + \varphi_p) + \cos(2\pi(f_m - f_p)t - \varphi_p) \right)$$

Je peux donc tracer le diagramme spectral de $s(t)$:



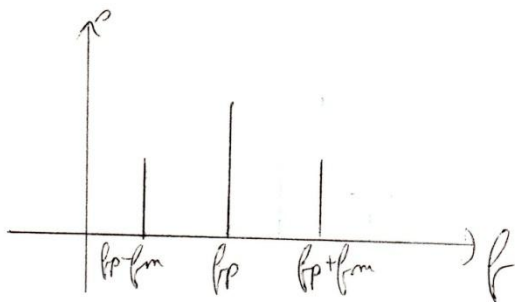
Si le signal n'est pas composé que d'une fréquence (ce qui est le cas en général), alors le diagramme devient:



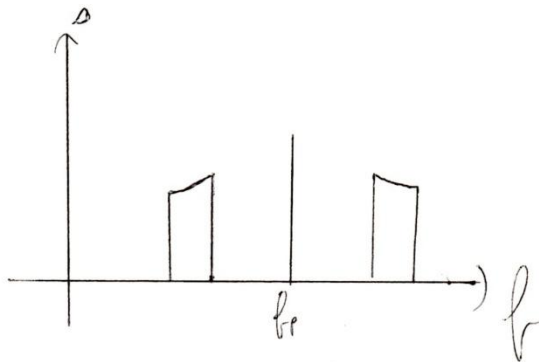
$$s(t) = A_p \cos(2\pi f_p t + \varphi_p) + m A_p \cos(2\pi f_m t) \times \cos(2\pi f_p t + \varphi_p)$$

$$s(t) = A_p \cos(2\pi f_p t + \varphi_p) + \frac{m A_p}{2} \left(\cos(2\pi(f_m + f_p)t + \varphi_p) + \cos(2\pi(f_m - f_p)t - \varphi_p) \right)$$

Je peux donc tracer le diagramme spectral de $s(t)$:



Si le signal n'est pas composé que d'une fréquence (ce qui est le cas en général), alors le diagramme devient:



Entre $t=0$ et t_1 , v_s suit les évolutions de v_e , à t_1 , la diode se bloque et le condensateur se décharge dans la résistance jusqu'à t_2 à v_s suit les évolutions de v_e etc...

Le but étant de bien choisir RC afin de suivre les évolutions de l'enveloppe tout en supprimant la porteuse.

* Démodulation synchrone.

Par cette méthode de démodulation, on multiplie le signal à démoduler par un signal de fréquence égale à celle de la porteuse.

$$v_e(t) = A(1 + m \cos(2\pi f_m t + \phi_m)) \cos(2\pi f_p t)$$

$$v_e'(t) = A' \cos(2\pi f_p t)$$

$$v_s(t) = v_e(t) \times v_e'(t) = AA' \cos(2\pi f_p t) \cos(2\pi f_p t)$$

$$+ \frac{m AA'}{2} \cos(2\pi (f_m + f_p) t) \cos(2\pi f_p t)$$

$$+ \frac{m AA'}{2} \cos(2\pi (f_m - f_p) t) \cos(2\pi f_p t)$$

$$= \frac{AA'}{2} \left(1 + \cos(4\pi f_p t) \right) + \frac{m AA'}{4} \times \left(\cos(2\pi (f_m + 2f_p) t) \right)$$

$$+ \left(\cos(2\pi (f_m + f_p - f_p) t) \right) + \cos(2\pi (f_m - 2f_p) t)$$

Le signal $s(t)$ est donc composé de plusieurs signaux de fréquence $2f_p$, f_m et $2f_p - f_m$.

Il me suffit d'utiliser un filtre passe bas dont la fréquence de coupure est comprise entre f_m et $2f_p - f_m$ pour récupérer le signal désiré.

Pour conclure nous avons compris comment étudier un circuit linéaire invariant spectralement et comment se servir de systèmes non linéaires dans le cadre de la transmission de données.

Remarques

- * Se placer au niveau L3
- * Ne pas distinguer régime harmonique et transitoire
- * Utiliser plutôt un passe bande et illustrer par le montage.
- * Placer les définitions d'impédance, notation complexe etc... du chapitre I en prérequis et plutôt définir les différents signaux (bruit blanc, signal informatif...) et les manières de les représenter.
- * Pour le III, commencer par expliquer le décalage spectral et l'appliquer par la transmission de données par exemple.

Questions : * Intérêt de la modulation ? - taille de l'émetteur/récepteur
- Emission sur plusieurs canaux (multiplexage)

- * Peut-on toujours utiliser un détecteur d'enveloppe ? - Pas si $m > 1$
- * Que se passe-t-il à $Q = 1/\sqrt{2}$?

Biblio : Agrégation de sciences physique expériences d'électronique - Breal.