

Systemes bouclés : oscillateurs.

Introduction:

2 catégories de système :

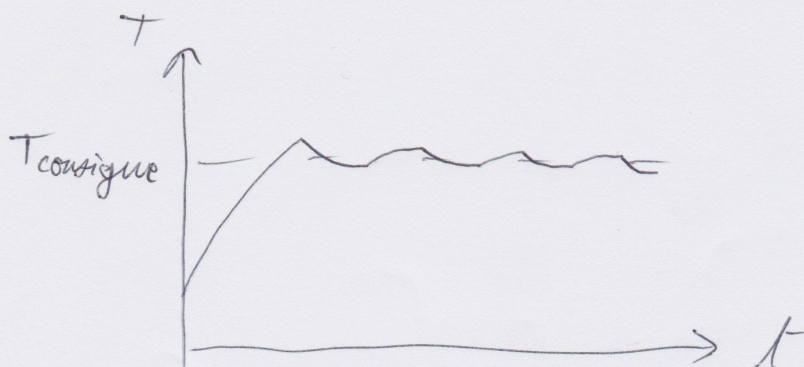
- Boucle ouverte : ignorant les effets de leurs actions.
- Boucle fermée : considérant ces effets pour corriger leur comportement de manière à réaliser les actions désirées, le plus fidèlement possible.

Souvent on ne peut commander un système à l'aide d'un programme figé \Rightarrow Boucle fermée.

Un exemple connu de tous est l'exemple du four. Si on est sûr que les caractéristiques du four restent fixes au cours du temps, on peut utiliser un système en boucle ouverte qui va nous donner en sortie la température qu'on lui demande. Dans la plupart des cas, on ne connaît pas ces caractéristiques. On place alors un capteur de température dans le four et on compare la température mesurée par ce capteur à la consigne.

Si $T_{\text{capteur}} > T_{\text{consigne}}$, on coupe le chauffage.

Si $T_{\text{capteur}} < T_{\text{consigne}}$, on chauffe plus.



Il s'agit ici d'un système bouclé asservi.

Dans ce cours, on s'intéressera aux systèmes linéaires, invariants, continus, causaux en boucle fermée ou ouverte, aux conditions de stabilité de ces systèmes et enfin à une application des systèmes bouclés autres que les asservissements, les oscillateurs.

± / les systèmes bouclés :

1) Cadre de l'étude :

- Systèmes linéaires : entrée $u_1(t) \rightarrow$ sortie $y_1(t)$
entrée $c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$
 \rightarrow sortie $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$.
- Systèmes continus : grandeurs continues, fonctions de t .
- Systèmes causaux : sa sortie à t n'est influencée ~~pas~~ par le futur.
- Systèmes invariants : caractéristiques du système ne varient pas avec le temps.
 $e(t) \rightarrow s(t)$
 $e(t-\tau) \rightarrow s(t-\tau)$

2) Structure :

Systèmes en BF possèdent en commun un certain nombre d'éléments.

- les capteurs : Organes dont le rôle est de transformer une grandeur physique en une autre.

Exemple du jour : thermocouple, remplace une température en une ~~différence~~ tension électrique.

- les actionneurs : Organes de puissance qui commandent les systèmes à asservir ou à réguler en fournissant la force nécessaire à l'exécution d'un travail.
Exemple du jour : Résistance chauffante.

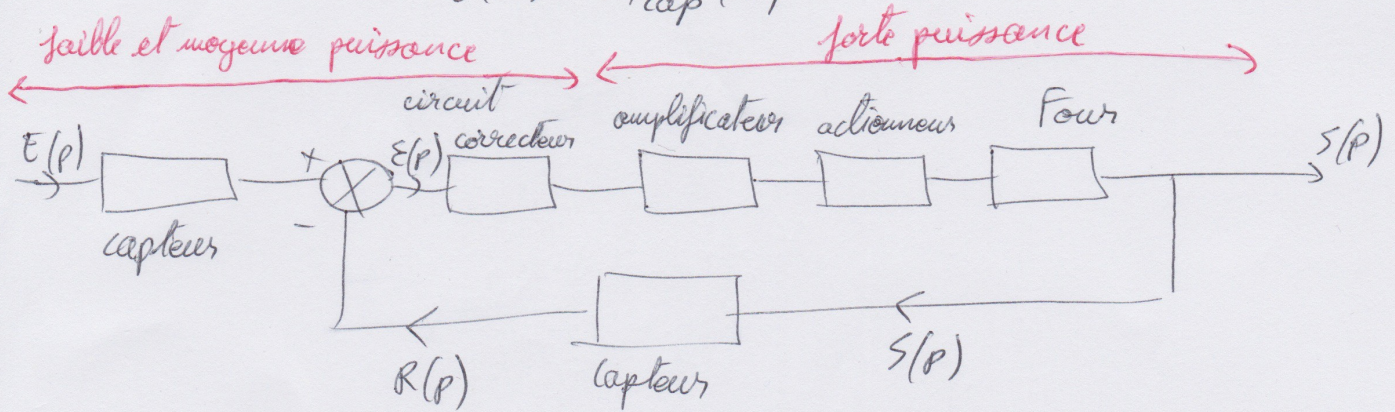
- les organes de traitement de l'information:

faible ou moyenne puissance, traitent les informations fournies par le capteur.

le plus important: le comparateur, ou soustracteur, qui donne l'erreur $E(t)$.

Exemple du four:
 $T_{\text{consigne}} \rightarrow U_{T_c}$
 $T_{\text{capteur}} \rightarrow U_{T_{\text{cap}}}$

$$E(t) = U_{T_c}(t) - U_{T_{\text{cap}}}(t)$$



Bouclage.

De manière simplifiée, le schéma conventionnelle d'un système bouclé est le suivant:

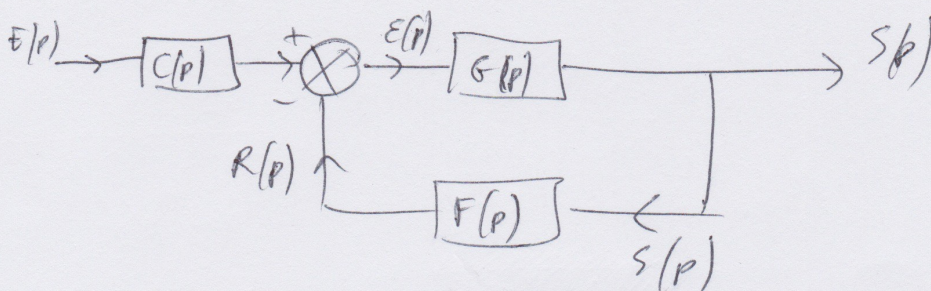


Schéma - bloc

Deux chaînes : - directe, de transmission $G(p)$, chaîne de puissance contenant les amplificateurs et l'actionneur.
 - rétroaction, de transmission $F(p)$, chaîne de précision qui doit fournir les informations les plus exactes possibles sur $S(p)$.

3) Fonctions de transfert d'un système bouclé: ($C(p) = 1$).

• En boucle fermée,

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G(p)E(p)}{E(p) + R(p)} = \frac{G(p)E(p)}{E(p)(1 + G(p)F(p))}$$

$$\boxed{H(p) = \frac{G(p)}{1 + F(p)G(p)}} \quad \text{Homogénéité!}$$

Dans la suite de la leçon, $H(p) = FTBF(p)$.

• En boucle ouverte, on s'intéresse à la mesure $R(p)$.

$$T(p) = \frac{R(p)}{E(p)} = \frac{F(p)G(p)E(p)}{E(p)}$$

$$\boxed{T(p) = F(p)G(p)}$$

Dans la suite de la leçon, $T(p) = FTBO(p)$.

Ring : $FTBF(p) = \frac{G(p)}{1 + FTBO(p)}$

Avantages du bouclage:

Chaîne directe est une chaîne amplificatrice, donc sensible aux perturbations. On cherche un moyen de s'affranchir de ce problème.

$$|FTBO(p)| \gg 1 \text{ donc } FTBF(p) \approx \frac{1}{F(p)} \text{ ne dépend que de } F.$$

Or la chaîne de rétroaction est une chaîne de précision ($\gg 1$!!), elle est insensible aux perturbations.

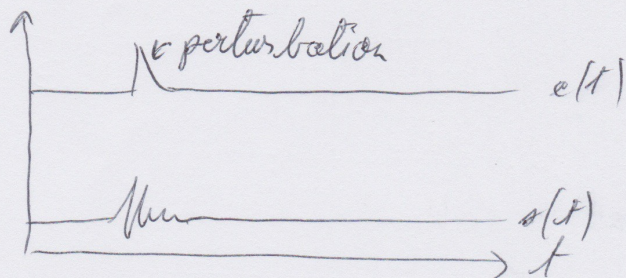
On peut donc négliger les défauts de la chaîne directe.

Bien pour asservissements.

II / Propriétés des systèmes bouclés: stabilité et précision:

1) Conditions de stabilité:

Un système bouclé est stable si, lorsqu'il est soumis à une perturbation de courte durée (dirac), il tend de lui-même à revenir à son état d'équilibre.



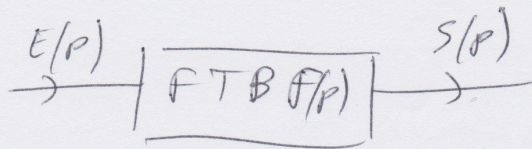
Stable.

En pratique, un système est stable si sa réponse indicielle ou impulsionnelle est telle que :

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = p \cdot Y(p) = cst$$

$p \rightarrow 0$

2) Critère de stabilité:



Réponse impulsionnelle du système: Dirac ($A = \infty$, $S = 1$, largeur = 0).
 $x(t) = \delta(t) \xrightarrow{TL} E(p) = 1$.

$$S(p) = FTBF(p) E(p) = FTBF(p)$$

(Et on sait que la réponse impulsionnelle = FT du système).

Transformée de Laplace inverse $\rightarrow s(t)$

$$s(t) = TL^{-1} [FTBF(p)]$$

$$= TL^{-1} \left[\frac{N(p)}{(p-p_1) \dots (p-p_i) \dots (p-p_n) \dots} \right]$$

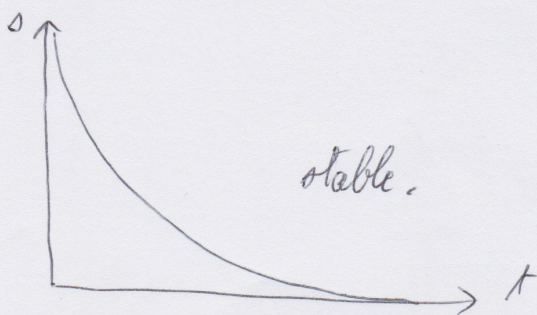
$$= TL^{-1} \left[\frac{A_1}{p-p_1} + \dots + \frac{A_n}{p-p_n} + \dots \right]$$

$$s(t) = A_1 e^{p_1 t} + \dots + A_n e^{p_n t} + \dots$$

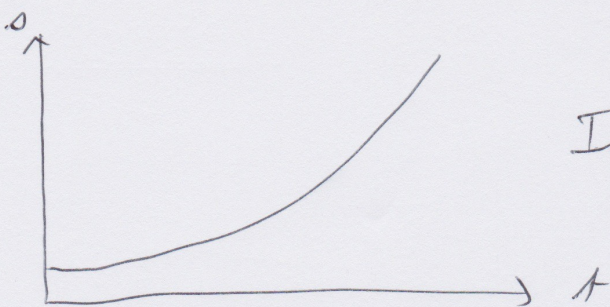
Le système est stable si: $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \text{const.}$

Étude des différents cas:

• $p_i \in \mathbb{R}^-$:



• $p_i \in \mathbb{R}^+$



Instable.

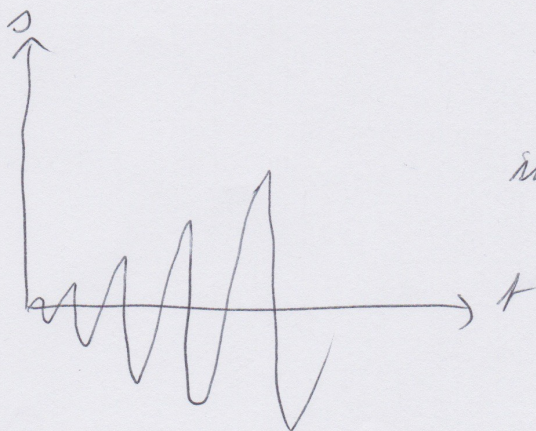
• pôles complexes conjugués:

p_1 ~~est~~ pôle de la FTBF $\Rightarrow p_2 = p_1^*$ ~~est~~ pôle de la FTBF.

$$\begin{cases} p_1 = a + ib \\ p_2 = a - ib \end{cases}$$

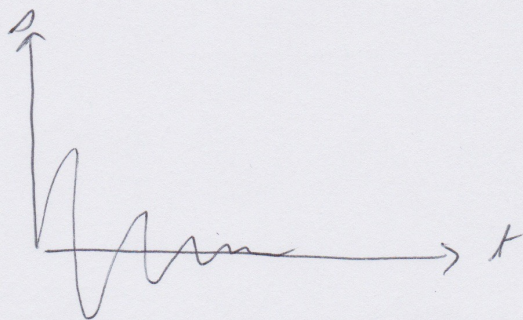
$$A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = e^{at} \sin(bt + \varphi).$$

$-a > 0$



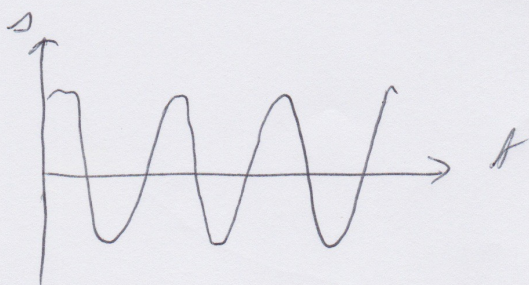
instable.

$-a < 0$



stable.

$-a = 0$



Instable.

metastable?

Conclusion sur la stabilité:



Il faut $\text{Re}(p_i) < 0, \forall i \in \mathbb{N}$.

3) Etude graphique:

2 types de méthode:

- Chercher les pôles de FTBF, (très dur d'obtenir FTBF).

Comme $\text{FTBF} = \frac{G}{1 + \text{FTBO}}$, on cherche les racines

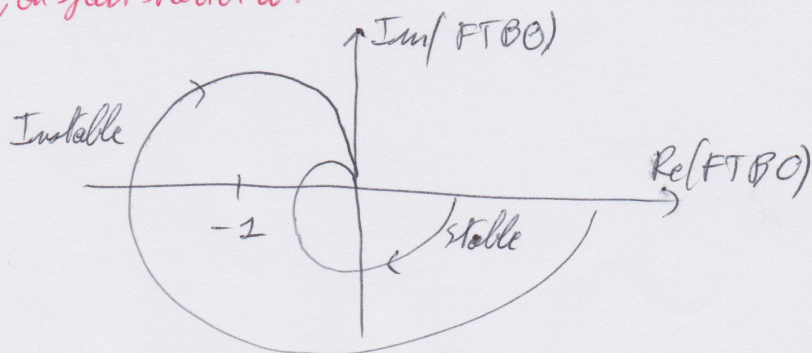
de $1 + \text{FTBO}(s) = 0$ et on s'assure que les parties réelles sont négatives.

NUMÉRIQUE, LONG.

- Graphique, on trace FTBO(jw) dans le plan complexe et on compare la position de la courbe par rapport au point critique (0, -1).

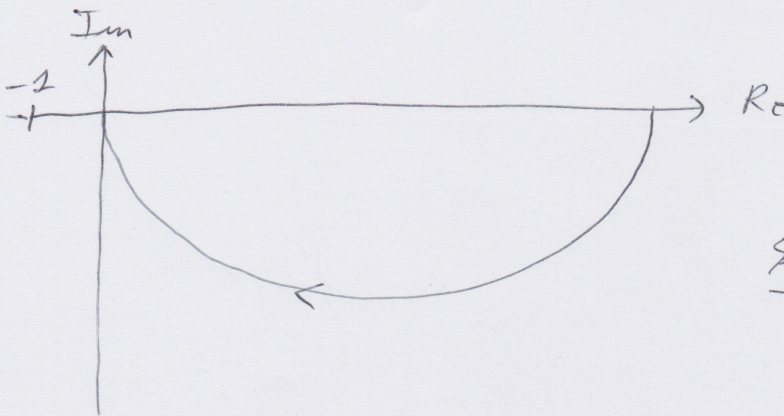
Régime permanent sinusoïdal, on fait varier w.

Règle du revers,
critère simplifié de
Nyquist.



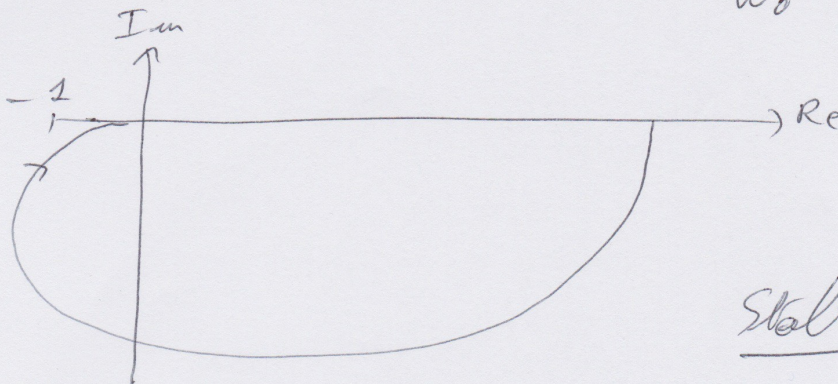
Exemple : . passe-bas d'ordre 1

$$FFBO(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$



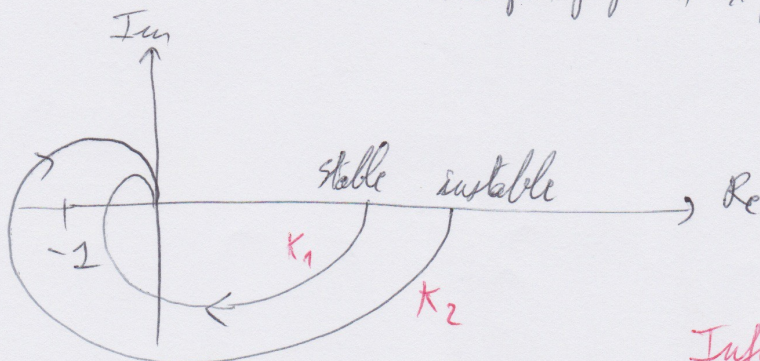
• passe-bas d'ordre 2

$$FTBO(p) = \frac{K}{1 + 2 \zeta \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$$



• passe-bas d'ordre 3

$$FTBO(p) = \frac{K}{1 + \alpha p + \beta p^2 + \gamma p^3}$$



$K_2 > K_1$
Influence du gain.

4) Précision:

• Précision statique: ε_s en régime permanent.

$$\varepsilon_s(t) = s_d(t) - s(t)$$

\uparrow désirée.

Exemples $\begin{cases} G_0 \text{ et } F_0 \text{ en permanent.} \\ c = s_d \end{cases}$

$$H_0 = \frac{G_0}{1 + G_0 F_0} = \frac{s}{s_d}$$

Précision statique: $\varepsilon_{s,0} = s_d \left(\frac{1 + G_0 (F_0 - 1)}{1 + G_0 F_0} \right)$

En cas d'une rétroaction unitaire ($F_0 = 1$), la précision d'autant plus grande que G_0 est grand.

• Précision dynamique dépend de la forme du signal envoyé en entrée.
 \Rightarrow beaucoup plus dur à obtenir.

5) Sensibilité: $S(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p) F(p)} E(p)$

- Variations de G :

$$\frac{DS}{S} = \frac{1}{1 + GF} \frac{DG}{G}$$

Dans la bande de fréquence où $|F(j\omega)G(j\omega)| \gg 1$, cela n'a aucune influence.

- Variations de F :

$$\frac{DS}{S} = \frac{-GF}{1+GF} \frac{DF}{F}$$

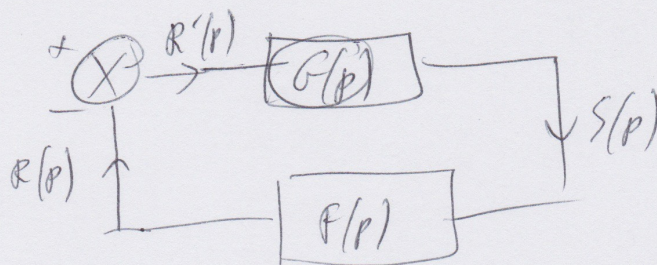
S très sensible aux variations de F .

Heureusement, la chaîne de rétroaction est une chaîne de précision. OUF.

III / Oscillateurs :

Ce sont des systèmes rendus volontairement instables. On les rencontre dans tous les domaines de la physique, notamment en optique et en électronique.

Nous nous intéresserons aux oscillateurs à boucle de rétroaction.



↑
précision: $Filter Q \gg 1$.

1) Conditions d'oscillations:

On se place à t , $e(t) = o_m e^{j\omega_0 t}$

$$z(t) = |F(j\omega_0)| o_m e^{j(\omega_0 t + \phi_F)}, \quad \phi_F = \arg(F)$$

$$\underline{r}(t) = -|F(j\omega_0)| o_m e^{j(\omega_0 t + \phi_F)}$$

$$\underline{e}(t) = -|F(j\omega_0)| |G(j\omega_0)| o_m e^{j(\omega_0 t + \phi_F + \phi_G)}$$

l'entretien des oscillations impose, $d'(t) = d(t)$

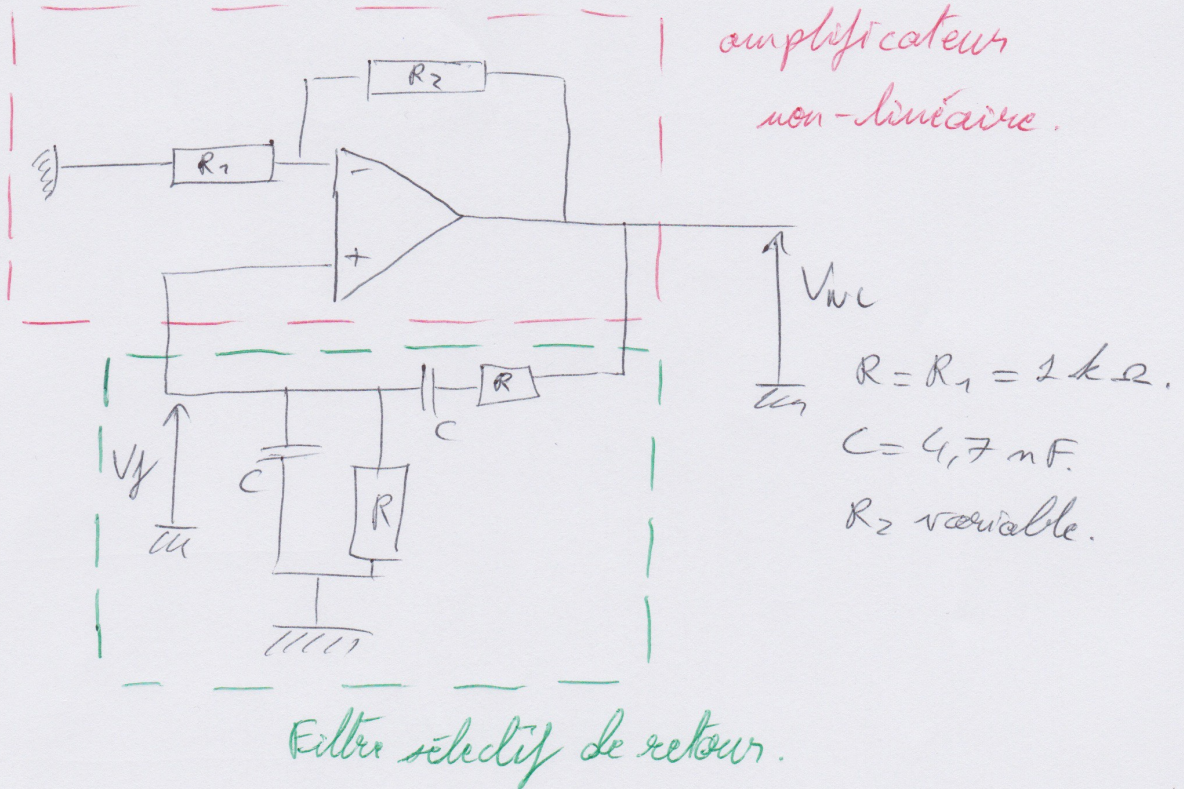
$$\begin{cases} -|G(j\omega_0)| |F(j\omega_0)| = 1 \\ \phi_P + \phi_G = 2n\pi \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\Rightarrow |G(j\omega_0) F(j\omega_0) = -1|$$

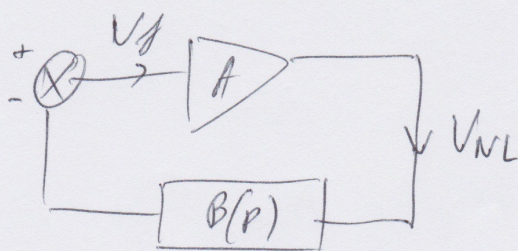
Remq : On retrouve FTBO = 1 \Rightarrow système instable.

2) Exemple d'oscillateur quasi-sinusoidal à boucle de rétroaction:
Oscillateur à pont de Wien:

On identifie:



En schéma bloc, on a:



• $A = 1 + \frac{R_2}{R_1}$ dans la zone linéaire de fonctionnement.

• Étude du filtre retour,

$$B(p) = \frac{-V_f}{V_{NL}} = \frac{-\frac{1}{R + Cp}}{R + \frac{1}{Cp} + \frac{1}{R + Cp}} = \frac{-\frac{R}{1 + RCp}}{R + \frac{1}{Cp} + \frac{R}{1 + RCp}}$$

$$B(p) = \frac{-R}{R + R + R^2 C_p + R + \frac{1}{C_p}} = \frac{-1}{3 + RC_p + \frac{1}{RC_p}}$$

$$B(p) = \frac{-\frac{1}{3}}{1 + Q \left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p} \right)}$$

$$Q = \frac{1}{3}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

• Démarrage des oscillations:

Par pôles: $A \cdot B(p) = -1$

$$-\frac{1}{3} = - \left(1 + Q \left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p} \right) \right)$$

$$\Rightarrow p^2 + \frac{\omega_0}{Q} \left(1 - \frac{1}{3} \right) p + \omega_0^2 = 0$$

$$Q = \frac{1}{3}$$

$$D = \frac{(\omega_0)^2}{(3Q)} (A^2 - 6A + 5)$$

- $A < 1$ ou $A > 5 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow$ racines réelles.

$$p_{\pm} = \frac{-3\omega_0(1 - \frac{A}{3}) \pm \sqrt{9\omega_0^2(1 - \frac{A}{3})^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

$A < 1 \Rightarrow$ racines négatives \Rightarrow stable.

$A > 5 \Rightarrow$ racines positives \Rightarrow oscillations.

- $1 < A < 5 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$ racines complexes.

$\text{Re}(\text{racines}) < 0$ si $1 < A < 3 \Rightarrow$ stable.

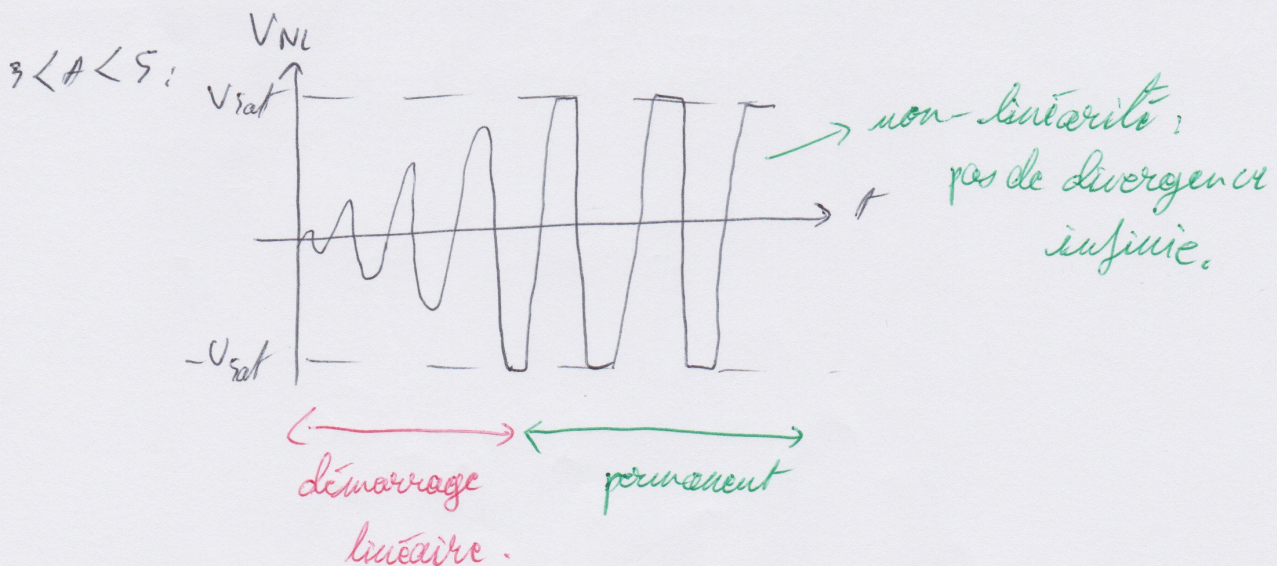
$\text{Re}(\text{racines}) > 0$ si $3 < A < 5 \Rightarrow$ oscillations.

$$p'_{\pm} = \frac{-3\omega_0(1 - \frac{A}{3}) \pm j\sqrt{-9\omega_0^2(1 - \frac{A}{3})^2 + 4\omega_0^2}}{2}$$

$\Rightarrow A > 3 \rightarrow$ oscillations.

$\hookrightarrow 3 < A < 5$: démarrage pseudo-oscillant.

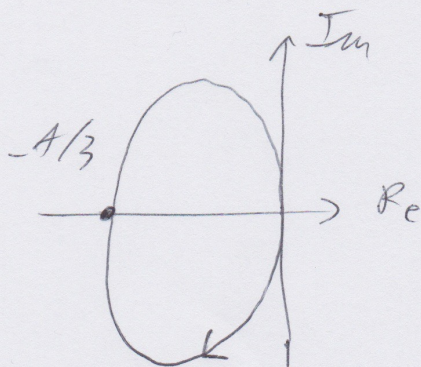
$\hookrightarrow A > 5$: démarrage exponentiel croissant.



Par critère du cercle :

$$FTBO(p) = \frac{-\frac{A}{3}}{1 + Q\left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p}\right)}$$

En posant $p = j\omega$, le lieu de la FTBO pour ω croissant est.



Si $A > 3$, le système sera instable et les oscillations vont démarrer.

• Étude du régime permanent :

- À cause de la non-linéarité, on ne peut plus raisonner comme précédemment. On utilise l'hypothèse du premier harmonique.

On extrait le premier harmonique de la sortie distordue.

La non-linéarité est alors modélisée par un gain linéaire \bar{N} , rapport du premier harmonique de l'entrée sur la sortie.

\bar{N} remplace A .

$$\bar{N} B(p) = -1.$$

3) Un oscillateur optique: le laser:

— Atome à deux niveaux d'énergie:

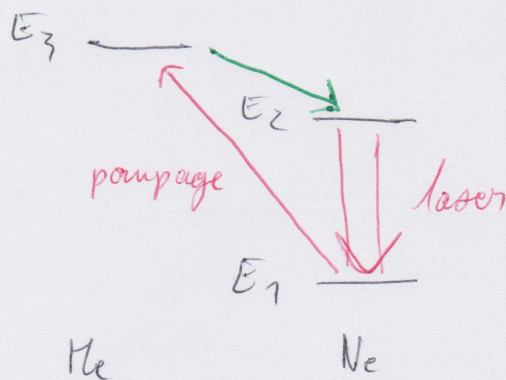


Équilibre thermodynamique, $N_1 > N_2$.

Émission spontanée \Rightarrow aléatoire, photons incohérents.

Émission stimulée \Rightarrow photons cohérents.

— Exemple du laser He-Ne:



• Onde incidente à $\gamma = \frac{E_2 - E_1}{h}$ se propage dans la direction des z croissants,

$$I = I_0 e^{-\mu z}$$

$$\mu \propto N_1 - N_2.$$

Sous stimulation, $-\mu < 0 \Rightarrow$ l'onde s'amortit.

Si on veut une amplification, il faut que $\mu < 0 \Rightarrow N_2 > N_1$.

On excite les atomes avec un pompage pour les mettre dans l'état d'énergie $E_3 > E_2$. Par transition sans rayonnement, il veut surpeupler le niveau E_2 .

Pompage suffisant $\Rightarrow N_2 > N_1$ inversion de population.

$$\Rightarrow \mu < 0$$

\Rightarrow amplification de l'onde.

On peut définir G_0 , le gain: $\boxed{I = I_0 e^{G_0 z}}$.

En réalité, $G_0 \searrow$ qd $I \nearrow$. On finit par atteindre une saturation. (pas de divergence).

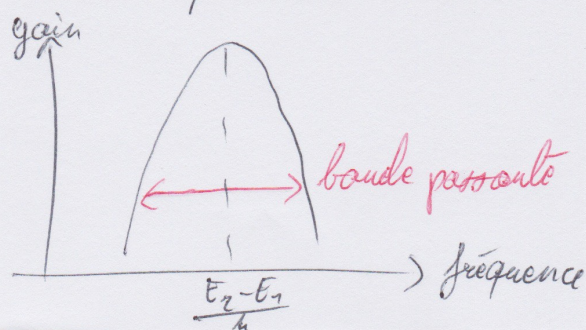
On fait passer l'onde plusieurs fois dans le milieu à l'aide d'une cavité de type Fabry-Pérot.

• Pouvoir d'amplification du milieu en fonction de la fréquence:

La bande passante du milieu amplificateur est égale à la largeur de raie de transition entre les niveaux E_2 et E_1 . Cette largeur est due à l'effet Doppler résultant des collisions entre particules se déplaçant suivant des contributions complexes des vitesses.

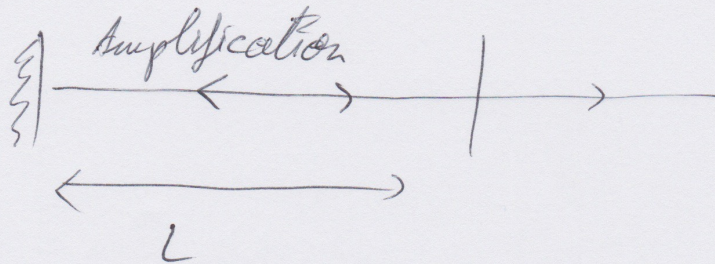
Fréquence centrale: $\nu_0 = \frac{E_2 - E_1}{h}$.

Gain pour un aller simple dans la cavité:



• Rôle de la cavité:

Une onde issue d'une transition spontanée traverse un milieu dans lequel on a réalisé une inversion de population \Rightarrow émission stimulée.
Miroirs pour démultiplier cet effet.



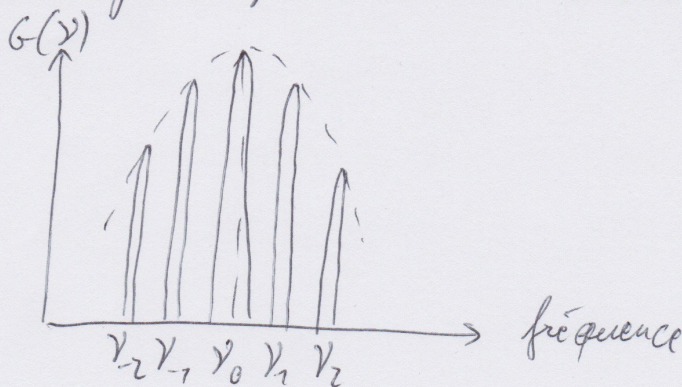
$$2L = k\lambda \Rightarrow \nu_k = k \frac{c}{2L}$$

$\Delta\nu = \Delta\nu L \Rightarrow$ Émission sur des fréquences discrètes, ce sont les modes du laser.

La largeur des raies des modes dépend de R.

• Structure du laser: oscillateur à boucle de réaction:

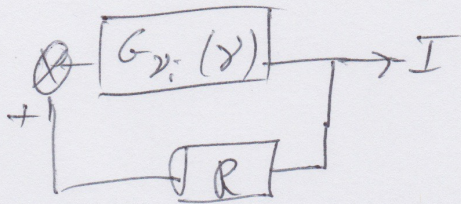
Pour un aller simple du faisceau dans la cavité.



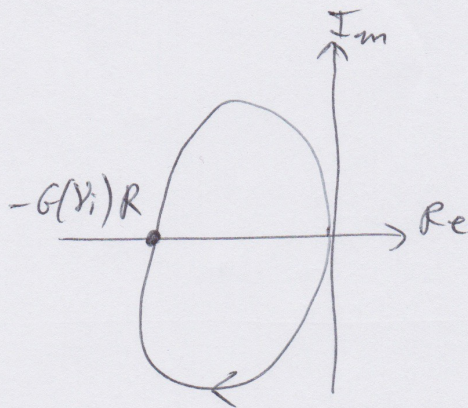
Supposons que le milieu amplificateur se comporte comme un filtre passe-bande autour de chaque fréquence ν_i . Soit G_{ν_i} le gain autour de ν_i .

amplification
 ↗ ↘
 réflexion R

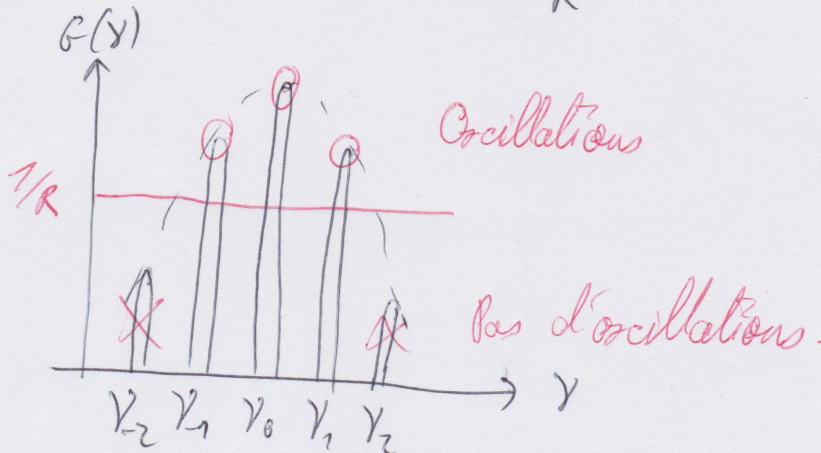
Pour un très grand nombre d'allers-retours,



Gainère du revers : boucle ouverte au voisinage de γ_i .



le système oscille pour $G(\gamma_i) > 1/R$



le laser fonctionne aléatoirement sur les différents modes susceptibles d'osciller. Si plusieurs modes autorisés \Rightarrow multimode.

→ Pas de questions.

- Remarques:
- Faire absolument l'expérience de l'oscillateur à pont de Wien.
 - Montrer la phase linéaire et la saturation.
 - Présenter la partie: "position du problème", comme des hypothèses.
 - Parler peut-être des diagrammes de Bode.

Biblio: → H prépa PSI* / PSI.

→ Cours de JBD sur les systèmes bouclés.