

LP08 Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide.

Li Brigitte
Lehébel Antoine

Biblio :

1. *Hydrodynamique physique*, Guyon Hulin Le Petit
2. *Tec&Doc*, Olivier

Correcteur : M. Bertagnolio

Niveau L2

Prérequis : cinématique des fluides, équation de Navier Stokes

Introduction :

On décrit la dynamique des fluides par l'équation de Navier Stokes.

Pb : pas de solution analytique! (désigné comme un des problèmes du millénaire par le Clay Mathematical Institute)

But: trouver des cas particuliers où on pourra simplifier la description du fluide.

Plan :

- I. Modèle de l'écoulement parfait**
 1. Définition
 2. Conditions d'application
 3. Conditions aux limites
- II. Relation de Bernoulli**
 1. Hypothèses supplémentaires
 2. Conséquences (calcul depuis Euler jusqu'à Bernoulli)
 3. Conditions d'application
- III. Applications**
 1. Effet Venturi
 2. Sonde Pitot
 3. Effet Magnus

I. Modèle de l'écoulement parfait

1. Définition

On néglige tous les phénomènes de diffusion : chaleur, particules, quantité de mouvement. -->

$$\eta=0$$

(T&D ch.14)

Conséquences :

Équation d'Euler, 1755

Rq historique : à l'époque ça ne vient pas de NS puisque cette dernière ne prend sa forme moderne qu'au XXème siècle. C'est le PFD appliqué à une particule de fluide (on ne savait pas exprimer les phénomènes de dissipation dus à la viscosité)

2. Conditions d'application

a) condition rigoureuse:

Hélium 4 superfluide sous 2K, trop rare!

b) condition approchée:

Diffusion \ll convection

...(petit calcul) --> $1 \ll Re$

Rq : attention, cette condition doit être prise avec précautions: on sait que Re a été introduit à la base pour différencier les régimes laminaires des régimes turbulents. Si on passe en régime turbulent on ne pourra plus appliquée du tout le modèle développé!

ODG : pour voir dans quels cas ça marche

- Avion de ligne dans l'air

$$U \sim 250 \text{ m/s}, \rho \sim 1 \text{ kg/m}^3, \eta \sim 10^{-5} \text{ Pa.s}, L \sim 60 \text{ m}$$

$$Re \gg 1$$

- Nageur à la piscine

$$U \sim 1 \text{ m/s}, \rho \sim 1000 \text{ kg/m}^3, \eta \sim 10^{-3}, L \sim 50 \text{ m}$$

$$Re \gg 1$$

3. Conditions aux limites

Si on veut espérer pouvoir résoudre le problème il nous faut des conditions aux limites.

a) condition de non pénétration : $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ (schéma avec les vecteurs \mathbf{n} et \mathbf{t})

b) condition sur la composante tangentielle de la vitesse?

Si le fluide n'a pas de viscosité, il n'est pas mouillant --> pas de conditions sur $\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}$.

En vérité c'est très irréaliste, dans la vraie vie les fluides mouillent!

On utilise la théorie de la couche limite (début XXème) : on découple le problème en deux parties. (schéma)

Près de la paroi on imagine une couche d'une taille donnée d dans laquelle on observe de forts gradients de vitesse, et donc des phénomènes de viscosité. Dans le reste du fluide en revanche on traite la dynamique grâce au modèle du fluide parfait, donc avec l'équation d'Euler. En pratique on suppose qu'il n'y a pas de mélange entre les deux parties du fluide --> découplage du problème.

Ainsi on peut revenir sur les conditions sur la composante tangentielle :

- à la frontière entre la couche limite et le reste du fluide, non mélange --> $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$
- à la frontière entre la paroi et la couche limite, on a à la fois non pénétration ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$) et mouillage, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{t} = 0$

--> la couche limite agit comme un adaptateur de composante tangentielle de la vitesse.

c) dynamique de la couche limite

Il faut prendre en compte les effets de viscosité, c'est trop compliqué et ça sort du cadre de la leçon.

En revanche on peut par exemple calculer un ordre de grandeur pour la taille d de la couche limite. On fait le raisonnement suivant : on suppose que dans la couche limite, diffusion \gg convection, et dans l'écoulement, diffusion \ll convection. En d on doit donc avoir en ordre de grandeur diffusion \sim convection.

... (calculs faciles, attention toutefois dans le terme de diffusion on prendra comme distance caractéristique d puisque les variations de vitesse se font dans la couche limite dans la direction

orthogonale, et dans le terme de convection on prendra la distance caractéristique de l'écoulement parfait L qu'on a utilisée dans le calcul de 1.2.b)

On obtient $d=L/\sqrt{Re}$

Rq : On voit bien que "plus l'écoulement est parfait", plus Re est grand, plus la taille de la couche limite diminue.

Maintenant on a formellement ce qu'il faut pour calculer des propriétés de l'écoulement à partir de l'équation d'Euler

(en vérité on a 5 inconnues P , ρ , v , je ne l'ai pas mentionné mais on peut en parler, il faut deux équations scalaires supplémentaires, en général la conservation de la masse et une équation thermodynamique)

Cependant en pratique on a toujours une équation du second ordre, il faut encore particulariser le problème si on veut pouvoir faire des calculs!

II. Relation de Bernoulli

1. Hypothèses supplémentaires

- stationnaire (première idée qui vient pour le physicien)
- forces en volume conservatives
- écoulement incompressible

2. Conséquences sur l'équation d'Euler

On détaille le passage de l'équation d'Euler à la relation de Bernoulli, en utilisant le T&D et le GHP mais sans faire le cas irrotationnel, on se place dans le cas général (on n'utilise pas non plus l'hypothèse d'homogénéité qu'on remplace par écoulement incompressible + stationnaire)

On obtient sans trop de difficultés la relation de Bernoulli.

(Pour éviter les calculs trop longs j'ai admis que $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v} = \mathbf{grad}(v^2/2) + \mathbf{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v}$)

Commentaires :

- Cas irrotationnel : vrai dans tout le fluide

- Relation antérieure à l'équation d'Euler. Phénoménologique à l'époque.
- Interprétation énergétique

3. Conditions d'application

- Hypothèse stationnaire : ok
- Hypothèse sur les forces en volume : en général c'est juste la pesanteur. Ok
- Hypothèse d'incompressibilité : pour les liquides pourquoi pas mais pour les gaz ça paraît peu réaliste.

Critère de Mach : $U^2/c^2 \ll 1$, c la célérité du son

Je n'ai pas détaillé le calcul mais pour les questions si vous voulez être armés c'est dans le **GHP (p.140)** et il y a un exercice (vision plus calculatoire et moins physique de mon point de vue) dans le **T&D (ch16)**

ODG : avion de ligne, $U^2/c^2 \sim 0.5$

III. Applications

1. Deux applications classiques

a) Effet Venturi

Schéma sur transparent

fluide incompressible

On applique la relation de Bernoulli sur une ligne de champ sur l'axe de la conduite, on obtient

$p_1 - p_2 = \dots$

Dépression au niveau de l'étranglement.

Applications : trompe à eau (schéma sur transparent) pour filtration sous vide en chimie (vide peu poussé)

b) Sonde Pitot

Schéma sur transparent

Calcul et hypothèses détaillés dans le **GHP p.271**.

Utilisé sur les avions, les formules 1 etc

2. Vidange d'un réservoir, formule de Toricelli

Je n'ai pas eu le temps de le présenter, en même temps je trouve pas ça passionnant, et je ne connais pas d'applications.

3. Effet Magnus

Manip du [Tec&Doc décrite ch 16](#)

Explication avec les mains, modélisation trop compliquée.

Effets dans les jeux de balle

Conclusion :

Même si le modèle est a priori très restrictif on voit qu'il s'avère applicable dans de nombreux cas moyennant certaines approximations et adaptations du modèle. Il y a encore d'autres effets qu'on n'a pas décrit (Coanda par exemple). Une étude plus détaillée de la couche limite nous permettrait d'aller encore plus loin et de décrire quasiment tous les types d'écoulements qu'on pourrait rencontrer!

Questions:

1. Est-ce que $\eta \Delta v$ est l'expression la plus générale pour les forces de viscosité ?
Non c'est le cas incompressible, sinon c'est $\text{div}[\sigma]$ (σ le tenseur des contraintes de viscosité)
2. Est-ce qu'Euler a écrit son équation à l'époque sous cette forme-là ?
Non le formalisme vectoriel que l'on connaît n'existait pas
3. Est-ce qu'à $T < 2K$ tout l'He devient superfluide ?
Non, il y a des zones superfluides et des zones visqueuses (« modèle des deux fluides »)
4. Pour un avion de ligne, $Re \gg \gg 1$ mais on a dit que ça devient turbulent. Est-ce qu'en vérité le modèle de l'écoulement parfait est applicable à l'avion ? Si oui est-ce que c'est plutôt devant ou derrière que l'écoulement devient turbulent ?
Derrière, c'est pour ça qu'on met le tube de Pitot à l'avant. Il aurait été bien d'insister sur le fait que les turbulences naissent au niveau des obstacles.
5. Pour l'odg de Re sur le nageur, il faut plutôt prendre la largeur de la piscine et non sa longueur.
6. Quelles autres forces volumiques constate-t-on, mise à part la pesanteur ?
Forces de champ (électromagnétiques), mais rares. Elle veut m'amener à dire que l'hypothèse « f_v conservatives » pourrait être simplifiée et plus facile à faire passer d'un point de vue pédagogique en disant simplement « $f_v =$ pesanteur uniquement ».

7. Si l'écoulement est incompressible stationnaire vous avez dit que q est constant sur une ligne de champ, mais est-ce qu'il ne l'est pas dans tout le fluide ?
Non, il y a le cas des fluides inhomogènes (et même dans le cas homogène je ne vois pas comment montrer que q ne varie pas d'une ligne de champ à l'autre mais bon). Mais ce sont des cas très rares, Mme Bertagnolio pense que c'est un calcul superflu. (Mais les fluides réels étudiés, atmosphère et océan, sont inhomogènes !)
8. Détailler la vision énergétique de la relation de Bernoulli
9. Que mesure exactement la sonde de Pitot ?
C'est la vitesse par rapport à la masse d'air, alors que sur les écrans on indique souvent la vitesse par rapport au sol. En fait la vitesse par rapport à la masse d'air est plus intéressante car elle détermine la portance.
10. Démonstration pour la sonde Pitot que $P_A = P_{A'}$? (notations du GHP)
Dans la couche limite on a un écoulement unidirectionnel, pas de gradient de pression dans les directions orthogonales à la vitesse.
11. Ordre de grandeur de la pression qu'on peut atteindre avec une trompe à eau ?
On est limité par la pression de vapeur saturante de l'eau, valeur à connaître si on en parle pendant la présentation.

Commentaires :

Essayer de changer le sens des raisonnements. Exemple pour la couche limite : on ne dit pas « on a l'équation différentielle, il nous faut des conditions aux limites » mais plutôt partir de l'expérience, « en vérité les fluides mouillent les objets, les phénomènes de viscosité se localisent près des obstacles : tout se passe bien sauf lorsqu'on contraint les écoulements, quand on a des limites, d'où l'étude des conditions aux limites ».

Si on veut on peut mettre une application qui se fait avec l'équation d'Euler et qui ne nécessite pas la relation de Bernoulli (écoulements géostrophiques, effet Coanda)