

## LP07: Notion de viscosité d'un fluide. Écoulements visqueux.

Niveau : L2

Pré-requis :

- Statique des fluides (notion de force volumique)
- Cinématique des fluides
- Diffusion
- Mécanique ondulatoire

La compréhension et la modélisation des écoulements fluides a une grande importance pour l'étude des phénomènes naturels (courants marins), ainsi que dans l'industrie (conception de réseaux d'eau ou de gaz). La notion de viscosité joue un rôle prépondérant dans la nature des écoulements.

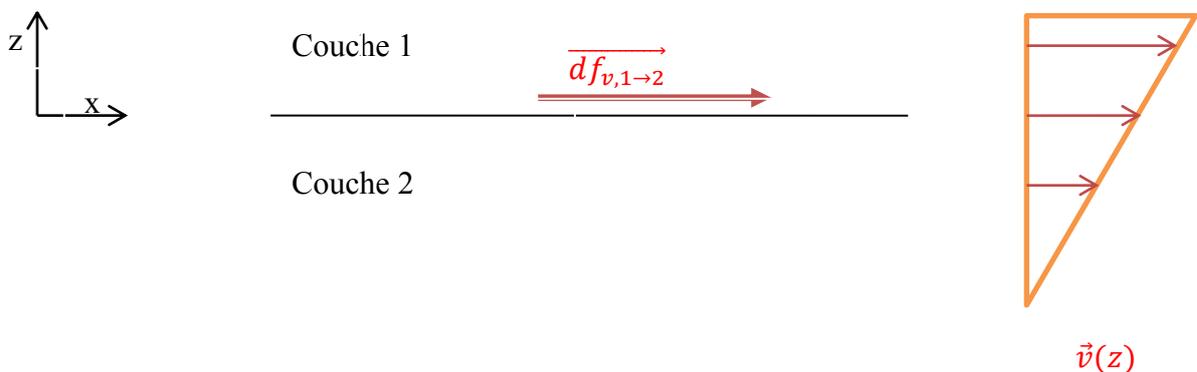
Expérience introductive : On fait tourner une cuillère à café dans un bécher rempli d'eau, on observe un mouvement de l'eau uniquement au voisinage de la cuillère, de nature tourbillonnaire. On fait ensuite tourner la cuillère dans un bécher rempli de miel, on observe maintenant un mouvement d'ensemble du fluide, ainsi qu'un déplacement du bécher si on la tourne assez rapidement : on met ainsi en évidence un transfert de quantité de mouvement à l'intérieur du fluide. On dit que le miel est un fluide plus visqueux que l'eau, et on voit que les efforts internes au fluide y sont plus importants que dans l'eau.

Au cours de cette leçon, on cherche à modéliser et à étudier plusieurs conséquences de la viscosité, dans le cas d'écoulements homogènes et incompressibles.

### I. Notion de viscosité

#### 1) Force élémentaire de viscosité

On modélise la viscosité comme l'interaction entre deux couches de fluide en présence d'un gradient de vitesse, la couche présentant la vitesse la plus élevée "frotte" sur la couche à vitesse plus faible et tend à l'entraîner. On décrit cette interaction comme une force par unité de surface  $\overrightarrow{df_v}$ , s'exerçant à l'interface :



Ces seuls postulats ne suffisent pas à donner une forme mathématique définie à la force élémentaire de viscosité. Pour ceci, on fait l'hypothèse du fluide Newtonien, souvent vérifiée en pratique. Cette hypothèse consiste à considérer que la force élémentaire de viscosité est directement proportionnelle au gradient de vitesse local. Avec les notations de la figure précédente, on peut donc définir cette force comme :  $\overrightarrow{df_{v,1-2}} = \eta \frac{dv(z)}{dz} \overrightarrow{e_x}$  pour un fluide incompressible. Le coefficient  $\eta$  introduit par ce raisonnement est appelé "viscosité dynamique", est homogène au produit d'une

pression par un temps, et s'exprime en Pl (Poiseuille, en hommage à Jean-Léonard-Marie Poiseuille (1797-1869), et ses travaux sur la viscosité) dans le système d'unités SI.

Ordres de grandeur (à 293K) :

Fluide	Air	Eau	Miel
$\eta$	$1,8 \times 10^{-5} Pl$	$1,0 \times 10^{-3} Pl$	$\sim 10 Pl$

Les ordres de grandeur donnés ici montrent que ce coefficient de viscosité dynamique traduit bien l'idée naturelle qu'on se fait de la viscosité : l'air s'oppose peu à notre déplacement, l'eau nous freine lorsqu'on nage, et il serait difficile de nager dans du miel.

Remarques :

- Si le modèle du fluide Newtonien est valable pour un certain nombre d'écoulements usuels, on rencontre tout aussi bien des fluides non-newtoniens, dont la loi de force est plus complexe. Un exemple simple et bien connu est le sable mouillé : si l'on agite légèrement les pieds à sa surface, on peut s'enfoncer profondément. Si à l'inverse on frappe violemment le sable, celui-ci se comporte comme une membrane rigide : le sable mouillé est un fluide rhéoépaississant, qui cesse de s'écouler face à une forte contrainte. Il existe également des fluides rhéofluidifiants ayant le comportement inverse. Les fluides non-newtoniens sont une importance particulière dans l'industrie (en particulier agro-alimentaire et cosmétique), car ils permettent d'obtenir des écoulements ayant des propriétés mécaniques très variées.
- L'hypothèse d'incompressibilité de l'écoulement n'apparaît pas explicitement dans la dérivation de la loi de force précédente, elle est pourtant essentielle, dans le cas compressible, on montre par une démonstration plus rigoureuse qu'il apparaît un terme supplémentaire de compression dans l'expression de la force. Ce terme est par exemple à l'origine de l'amortissement et de la dispersion des ondes de compression dans les fluides.

## 2) Force volumique de viscosité

Comme en statique des fluides, il est nécessaire de calculer la force volumique associée à la force élémentaire de viscosité pour pouvoir appliquer le principe fondamental de la dynamique à l'échelle locale. Pour cela, on considère un champ des vitesses semblable à celui de la partie précédente :  $\vec{v}(z) = v(z)\vec{e}_x$ . On cherche à calculer la résultante des forces de viscosité sur un volume élémentaire cubique  $dV = dx dy dz$ . La somme des forces visqueuses s'écrit, d'après la partie précédente :

$$\vec{F}_v = \eta(dydz) \frac{dv(z)}{dz} \Big|_{z+dz} \vec{e}_x - \eta(dydz) \frac{dv(z)}{dz} \Big|_z \vec{e}_x$$

Soit, après DL au premier ordre :

$$\vec{F}_v = \eta dV \frac{d^2 v(z)}{dz^2} \vec{e}_x$$

La force par unité de volume correspondante vaut donc :

$$\vec{df}_v = \eta \frac{d^2 v(z)}{dz^2} \vec{e}_x$$

Dans cet exemple, on n'a considéré qu'un champ des vitesses selon x, variant uniquement selon z. Pour un champ des vitesses quelconques, on admet l'expression générale suivante de la force volumique de viscosité :

$$\vec{df}_v = \eta \overline{\Delta v}$$

Remarque :

- Attention, l'expression de la force dans le cas général est délicate (voire impossible) à démontrer rigoureusement "à la main" (çad en se contentant d'un bilan des forces sur un cube). La démonstration rigoureuse se fait à partir du formalisme tensoriel. Il vaut mieux à mon avis admettre la généralisation dans la leçon, et avoir des notions sur la vraie démonstration au cas où le jury pose des questions dessus.

### 3) Aspects diffusifs de la viscosité

On voit apparaître une force volumique proportionnelle au laplacien du champ des vitesses, ceci est caractéristique des phénomènes de diffusion. On interprète donc le phénomène de viscosité comme un phénomène de diffusion de la quantité de mouvement à l'intérieur du fluide. Ainsi, si l'on considère une particule de fluide soumise uniquement à une force de viscosité, celle-ci obéit à l'équation :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \eta \overline{\Delta v}$$

Qui est une équation de diffusion. Il est alors naturel d'introduire la viscosité cinématique  $\nu$ , définie comme  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ , qui est homogène à un coefficient de diffusion ( $m^2 \cdot s^{-1}$ ). Ce coefficient caractérise l'efficacité du phénomène diffusif au sein du fluide, on a les ordres de grandeurs suivants :

Fluide	Air	Eau
$\nu$	$1,6 \times 10^{-5} Pl$	$1,0 \times 10^{-6} Pl$

Il est intéressant de noter que l'ordre des viscosités s'inversent entre l'air et l'eau, en effet, pour l'air, la viscosité dynamique est plus faible, donc les forces sont moins importantes, en revanche la masse volumique  $\rho$  est beaucoup plus faible que dans l'eau, l'inertie  $\rho$  est moins importante, et la quantité de mouvement varie donc plus facilement dans l'air.

On peut se convaincre de cet aspect diffusif en considérant un modèle simple de gaz sans interactions. Si l'on considère deux particules fluides de gaz (1) et (2) en contact, et que l'on suppose que la quantité de mouvement moyenne de (1) est supérieure à celle de (2), à l'équilibre thermique, le nombre de particules échangées entre les deux particules fluides est le même, comme celles provenant de (1) transportent plus de quantité de mouvement, on voit qu'on a un échange net de quantité de mouvement de (1) vers (2)

## II. Evolution et classification des écoulements

### 1) Equation de Navier-Stokes

On considère un volume mésoscopique de fluide  $dV$ , auquel on applique le principe fondamental de la dynamique. En prenant en compte la dérivée particulaire, et les différentes forces volumiques en présence, on obtient l'équation du mouvement de la particule :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overline{grad}) \vec{v} \right) = -\overline{grad} P + \rho \vec{g} + \eta \overline{\Delta v}$$

Il s'agit de l'équation de Navier-Stokes, dérivée par Navier en 1822 à partir des travaux de Stokes. Il s'agit d'une équation différentielle non-linéaire, dont l'espace des solutions est encore mal

compris. L'institut de mathématiques Clay a nommé la résolution générale de cette équation comme l'un des problèmes du millénaire, avec une récompense d'un million de dollars, ce qui montre l'importance de la compréhension de celle-ci. En pratique, deux approches sont possibles pour trouver une solution particulière : la résolution numérique, très utilisée dans l'industrie et en recherche, et la simplification de l'équation de NS par plusieurs approximations sur la description de l'écoulement.

Il faut également noter les conditions aux limites associées à cette équation, celles-ci sont en générales imposées par les parois solides limitant l'écoulement. Si la paroi est non poreuse, le fluide ne peut traverser l'interface, la vitesse de l'interface et la vitesse transverse du fluide doivent être égales localement proches de la paroi. Une autre condition aux limites est imposée par la viscosité : le fluide "accroche" à la paroi (constatation expérimentale), et la vitesse relative du fluide par rapport à l'interface est donc strictement nulle au voisinage de celle-ci.

Rq : Au vu des hypothèses utilisées dans les démonstrations préliminaires à cette équation, celle-ci ne s'applique bien sûr qu'aux écoulements homogènes, incompressibles d'un fluide newtonien.

## 2) Nombre de Reynolds

L'équation de Navier-Stokes fait apparaître deux phénomènes qui tendent à imposer le comportement du fluide : la convection, via le terme d'accélération convective, et la diffusion via la force de viscosité. On va chercher à comparer ces deux termes en estimant les temps caractéristique associés.

On considère un écoulement de dimension caractéristique  $L$ , se faisant avec une vitesse d'ordre de grandeur  $U$ . La convection est simplement le transfert de quantité de mouvement par le mouvement d'ensemble du fluide, le temps caractéristique associé à ce transfert sur une distance  $L$  vaut donc :

$\tau_{conv} = \frac{L}{U}$ . Pour la diffusion, on a le temps caractéristique classique :  $\tau_{diff} = \frac{L^2}{\nu}$ . On définit ainsi le nombre de Reynolds comme le rapport de ces deux temps :  $Re = \frac{\tau_{diff}}{\tau_{conv}} = \frac{LU}{\nu}$ . Si ce nombre de

Reynolds est grand devant l'unité, la convection est le phénomène le plus rapide, et on néglige la viscosité. Si ce nombre de Reynolds est petit, on néglige la convection. On peut montrer que se placer dans l'un ou l'autre des régimes permet de négliger le terme associé dans l'équation de Navier-Stokes, simplifiant considérablement la résolution du problème étudié.

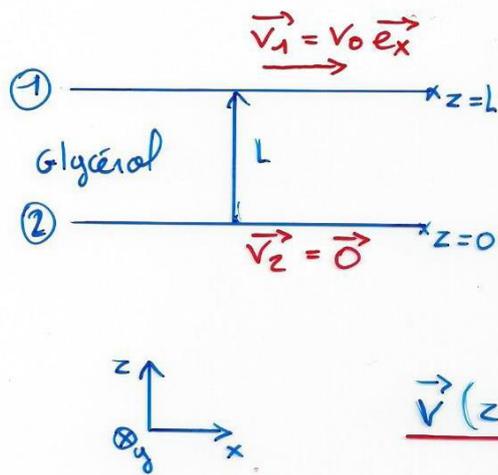
OdG : Si l'on considère deux écoulements de miel et d'eau se faisant tous deux à 1 cm/s dans un conduit de 5cm, on a :  $Re_{eau} = 500$  et  $Re_{miel} = 0.5$ . On comprend donc la différence de nature des deux écoulements présentés en introduction.

## III. Exemples et applications

### 1) Ecoulement de Couette plan

On considère le modèle d'écoulement visqueux simple suivant : un fluide de viscosité  $\eta$  est contenu entre deux plaques séparées d'une distance  $L$ , dont l'une est mise en mouvement par rapport au fluide, à une vitesse  $v_0$ . On fait les hypothèses suivantes :

- L'écoulement est infiniment long selon la direction transverse
- Les plaques sont d'étendue infinie
- Le nombre de Reynolds est petit devant 1



### Hypothèses :

- $Re \ll 1$  (ici,  $Re \sim 8 \times 10^{-2}$ )
- Infinitement long selon  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$
- Plaque infinitement longue
- Fluide newtonien, homogène incompressible

$$\underline{\vec{v}(z,t) = v(z,t)\vec{e}_x}$$

En simplifiant l'équation de Navier-Stokes, on obtient l'équation suivante pour la vitesse du fluide :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$$

L'évolution de la vitesse du fluide suit donc une loi de diffusion, lorsque la plaque supérieure est mise en mouvement, seul le fluide proche de celle-ci l'est aussi, au cours d'un temps caractéristique

$\tau_{diff} = \frac{L^2}{\nu}$ . Lorsque le régime permanent est atteint, la vitesse obéit à l'équation de Poisson :

$\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = 0$ . La solution en régime permanent est donc :

$$v_x(z) = \frac{z}{L} v_0$$

Il est intéressant de calculer la force exercée par le fluide sur la plaque inférieure, on trouve :

$$\vec{F} = \eta A \frac{\vec{v}_0}{L}$$

Avec A l'aire de la plaque. On voit donc qu'en connaissant l'aire du contact plaques-fluide, et les paramètres géométriques, on peut, via une mesure de la force exercée, mesurer le coefficient de viscosité dynamique du fluide entre les plaques : c'est le principe du viscosimètre de Couette. En pratique, on utilise plutôt une géométrie cylindrique, car il est plus simple de mesurer un couple, mais le principe reste le même. On peut également calculer les puissances cédées par la plaque supérieure, et reçues par la plaque inférieure. On met alors en évidence une différence entre ces puissances, qu'on explique par la dissipation due aux actions internes de frottement au sein du fluide.

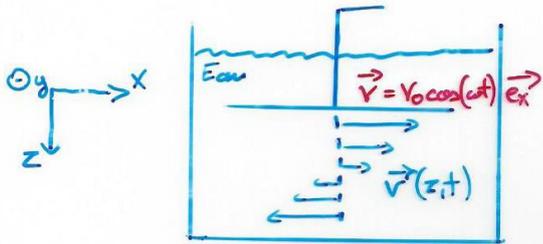
Manip : Sur le Couette plan, on verse une colonne de colorant bleu dans le glycérol, puis on met en mouvement doucement la plaque. La colonne de colorant se déforme à cause du mouvement du fluide, on n'obtient pas exactement un triangle : dans le niveau inférieur de la cuve, le fluide se déplace dans le sens inverse du déplacement de la plaque à cause du mouvement de convection dû aux effets de bord.

Il est intéressant de montrer la réversibilité associée aux écoulements visqueux sur cette manip' : après avoir déplacé la plaque, on lui fait faire le mouvement inverse : la colonne de colorant reprend globalement sa forme initiale (c'est assez impressionnant).

## 2) Diffusion en régime forcé

On considère une plaque animée d'une vitesse sinusoïdale de pulsation  $\omega$ , d'amplitude  $v_1$  dans un bassin de grande profondeur, et on fait les mêmes hypothèses que pour l'écoulement du couette plan. Le mouvement de la plaque va générer une onde de cisaillement se propageant vers le fond du bassin, on cherche donc un champ des vitesses de la forme :

$$\vec{v}(z, t) = v_1 e^{i(kz - \omega t)} \vec{e}_x$$



Hypothèses :

- $Re \ll 1$
- Grand selon  $\vec{e}_x, \vec{e}_y$  et  $\vec{e}_z$
- Plaques infinies
- Fluide newtonien, homogène incompressible

L'équation de Navier-Stokes, comme pour l'écoulement de Couette plan se réduit à :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$$

On injecte la forme de la solution dans cette équation pour déterminer l'équation de dispersion :

$$\underline{k}^2 = -\frac{i\omega}{\nu}$$

Soit, en conservant uniquement la solution physiquement acceptable :

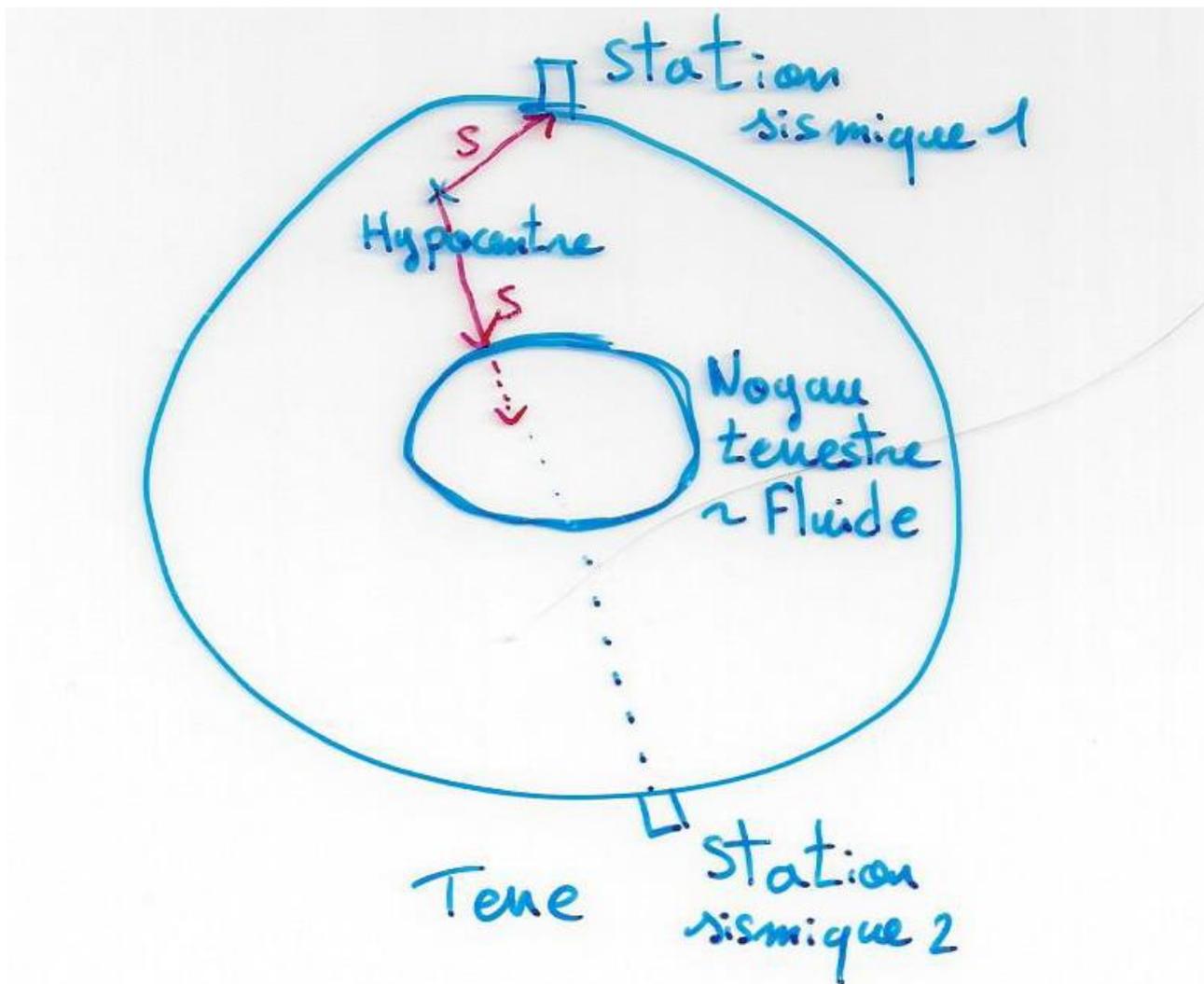
$$\underline{k} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$$

En introduisant l'épaisseur de peau  $\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$ , on obtient donc le champ des vitesses suivant :

$$\vec{v}(z, t) = v_1 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\frac{z}{\delta} - \omega t)} \vec{e}_x$$

L'amplitude de l'onde de cisaillement décroît donc exponentiellement à cause de la dissipation due à la viscosité. Si l'on calcule cette épaisseur dans l'eau, à une fréquence de 1Hz, on obtient  $\delta = 0,5mm$ , soit une longueur très petite. Ainsi, les ondes de cisaillement, à la différence des ondes de compression, ne peuvent se propager dans les fluides newtoniens.

On trouve en sismologie une conséquence importante de cette dissipation : on distingue deux types d'ondes sismiques : les ondes de compression P (pour primaires) et les ondes de cisaillement S (pour secondaires). Lors d'un séisme, les ondes sismiques se propagent de l'hypocentre (point de rupture où est générée l'onde sismique) à la surface terrestre. Dans une station sismique, on mesure tout d'abord l'onde P, qui se propage plus rapidement dans la croûte terrestre, puis l'onde S.



Vers la fin du XXe siècle, en comparant des relevés, les sismologues ont remarqués que l'on n'observait jamais l'onde S lorsqu'elle émanait d'un point situé dans l'hémisphère opposé à celui de la station d'observation. En 1906, le géologue Richard Oldham émet l'hypothèse suivante : il existe une zone fluide au centre de la Terre, où sont dissipées les ondes S. Il vient au fait de découvrir le noyau terrestre. Aujourd'hui encore, la quasi-totalité des informations dont on dispose sur la composition de la Terre provient de l'étude de la propagation des ondes sismiques.

### Conclusion :

Au cours de cette leçon, on a mis en évidence le phénomène de viscosité, que l'on peut comprendre comme un frottement entre couches fluides, ou, de manière équivalente, comme un phénomène de diffusion de la quantité de mouvement. On a établi l'équation de Navier-Stokes, complexe à résoudre, mais qui est la description la plus complète de l'écoulement d'un fluide newtonien incompressible. On verra dans une leçon ultérieure, que l'on peut simplifier cette étude dans de nombreux cas par le modèle du fluide parfait, mais que les phénomènes de viscosité conservent leur importance, notamment aux niveaux des interfaces fluides-solides.

### Questions :

- Exemple d'instabilité où la viscosité joue un rôle ?  
L'instabilité de Rayleigh-Taylor (digitation visqueuse)

### Remarques :

- Il faut mieux expliquer la réversibilité d'un écoulement visqueux, celle-ci est valable pour une évolution quasi-statique ( $\frac{\partial v_x}{\partial t}$  négligeable dans Navier-Stokes).
- Attention à ne pas trop insister sur l'aspect diffusif de la viscosité, c'est un point important, mais ça ne doit pas être le cœur de la leçon.
- Il faut bien expliquer la simplification de Navier-Stokes en régime visqueux.
- Les expériences introductives sont peu concluantes, il faudrait plutôt faire la manip du couette plan rapidement en introduction, pour mettre en évidence les forces tangentielles, puis revenir dessus après.
- Sur le nombre de Reynolds, il serait intéressant de montrer (sur transparent ou diapo) l'allure des lignes de vitesses autour d'un obstacle en fonction du nombre de Reynolds.
- Attention avec le glycérol pour le Couette plan, il se pollue assez rapidement à l'air, et sa viscosité chute brutalement avec le temps.

### Bibliographie :

- E. Guyon, J-P. Hulin, L. Petit, *Hydrodynamique physique*  
Le bouquin de référence pour les leçons d'hydro°, très bien écrit, complet, à parcourir avant les oraux. Attention néanmoins, celui-ci utilise beaucoup le formalisme tensoriel et ne présente pas les démonstrations simples à faire pour une leçon d'agrég.
- S. Olivier, *Physique PSI-PSI\**, Tec et Doc  
Pour le couette plan et la plaque en mouvement sinusoïdal.