

Veillez :

- 1 - Inscrire vos noms et prénoms date et lieu de naissance
- 2 - Indiquer le numéro de la place que vous occupez
- 3 - Signer

NOM :

PRÉNOMS :

NÉ(E) A :

LE :

SIGNATURE :

N° place

Le

Composition de :

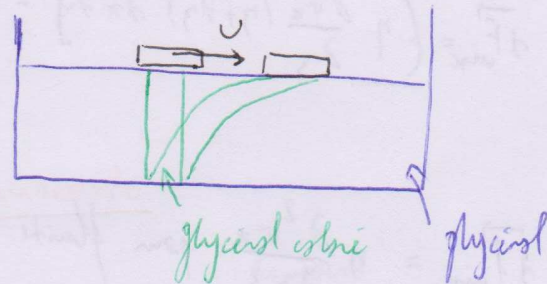
LP-07:

Niveau L2

- Prérequis :
- Statique des fluides
 - Mécanique des fluides → cinématique des fluides
→ fluide parfait
 - Mécanique du point / du solide → notion de frottement
 - Diffusion de chaleur / particule

Intros :

Mise en évidence de la viscosité



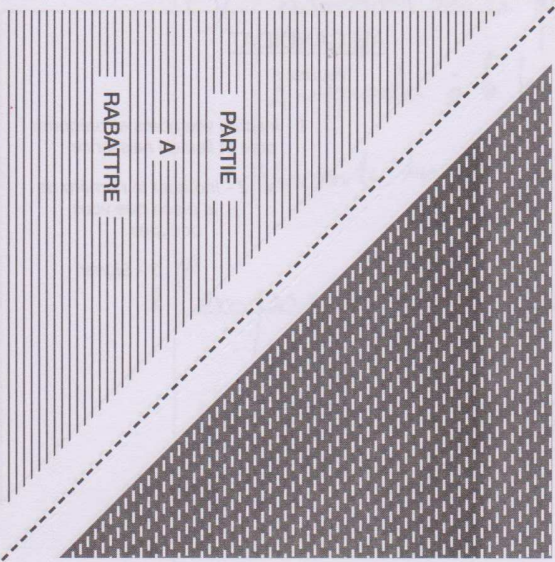
Entraînement des couches de fluides car seule celle du dessus est entraînée
⇒ phénomène de diffusion via forces tangentielles entre particules de fluide

On va quantifier ce phénomène via notion de viscosité

I - Force de viscosité ← Van transport 1

① Définition

Classe : écoulement incompressible d'un fluide Newtonien dans le champ de vitesse $\vec{v}(M) = \vec{v}_x(y)\vec{u}_x$



$$\vec{dF} = \vec{dF}_n + \vec{dF}_t \quad \left\{ \begin{array}{l} d\vec{F}_n = -p(M) dS \\ d\vec{F}_t = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} dS \vec{u}_x \end{array} \right.$$

↑
force de dessous sur dessus

⇓

Diffusion quantité de mouvement des zones de haute vitesse vers celle de basse vitesse :

Similaire à loi de Fourier et de Fick :

$$\vec{J} \text{ (N.m}^{-2}\text{)} = -\eta \text{ grad } v_x$$

↙ convention dessus → dessous

η en $\text{N.m}^{-2}\cdot\text{s} = \text{Pa}\cdot\text{s} = \text{Pl}$ et appelé coefficient de viscosité dynamique

ODG de η pour certains fluides sans conditions normales de T et P → Transpourt

2) Forces "volumique" de viscosité

Même unité que précédemment.

Résultante des forces de viscosité suivant \vec{u}_x :

$$d\vec{F}_{\text{visc}} = \left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial z} (z+dz) dx dy - \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} (z) dx dy \right) \vec{u}_x = \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) dT \vec{u}_x$$

↑
Taylor
niveau

$$\Rightarrow d\vec{F}_{\text{visc}} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \text{ pour fluide homogène } \eta \text{ (const)}$$

On admet la généralisation à l'écoulement de tout fluide newtonien homogène en écoulement incompressible sous la forme

$$\frac{d\vec{F}_{\text{visc}}}{dT} = \eta \Delta \vec{v}$$

Remarque: - Démo dépasse le cadre de ce cours (mais savoir d'où ça vient via MMC)

3) Interprétation microscopique de la viscosité dans les gaz

Hypothèses - - Gaz parfait

- Molécule i à pm vitesse $\vec{v}_i = \vec{v}_i^* + \vec{v}$ avec :

$$\begin{cases} * \vec{v} \text{ vitesse d'ensemble} = v_x(z) \vec{u}_x \\ * \|\vec{v}_i^*\| = v^* = \text{vitesse quadratique moyenne} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \text{ (masse d'1 molécule)} \\ * 6 \text{ directions possibles pour } \vec{v}_i^* (\pm u_x, \pm u_y, \pm u_z) \end{cases}$$

- Les particules ont leurs chocs en même temps (tout les

$$t^* = \frac{l^*}{v^*} \quad (l^* = \text{libre parcours moyen})$$

Voir transparent 2 pour le calcul (ou "Toc et Doc" ~~et Blen~~ PC/PC*)

$$\eta = \frac{1}{3} m n^* l^* v^* \quad \text{et} \quad m n^* = \rho \text{ par définition}$$

$$l^* = \frac{1}{\sigma n^*}$$

- On trouve $\eta_{\text{air}} \sim 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ (à comparer à valeur "réel") \Rightarrow ordre de grandeur OK malgré modèle simple

- On montre que $\eta(T)$ est croissante.

Rq: pour les liquides $\eta \downarrow$ avec T

II - Conséquences des forces de viscosité

1) Équation de Navier Stokes

PFD sur particule de fluide (fluide Newtonien ^{homogène} et incompressible):

$$\underbrace{\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right)}_{\textcircled{1}} = \underbrace{\vec{T}_v - \text{grad } P}_{\textcircled{2}} + \underbrace{\eta \Delta \vec{v}}_{\textcircled{3}}$$

① Caractère instationnaire de l'écoulement (linéaire)

② Transport de la quantité de mouvement par convection (non linéaire) (terme d'accélération convective)

③: Transport de la quantité de mouvement par diffusion (linéaire)
 À opposer à la loi de Fick / Fourier et diffusion particules / chaleur
 Viscosité du à l'inhomogénéité de \vec{p} et tend à homogénéiser \vec{p} (diffusion)

* Comparaison des termes ② et ③:

$$Re = \frac{\|\text{②}\|}{\|\text{③}\|} = \frac{\|\rho(\vec{v} \cdot \vec{grad}) \vec{v}\|}{\|\eta \Delta \vec{v}\|} = \frac{\rho U \frac{U}{L}}{\eta \frac{U}{L^2}} = \frac{\rho U L}{\eta} = \frac{U L}{\nu} \text{ où } \nu = \frac{\eta}{\rho}$$

L = longueur caractéristique

U = vitesse

ν = viscosité cinématique en $m^2 \cdot s^{-1}$

On peut aussi voir Re comme le rapport de 2 temps caractéristiques:

$$Re = \frac{\tau_{diff}}{\tau_{conv}} \text{ où } \begin{cases} \tau_{diff} / \frac{\rho U}{\eta} = \|\eta \Delta \vec{v}\| = \eta \frac{U}{L^2} \Rightarrow \tau_{diff} = \frac{\rho}{\eta} L^2 \\ \tau_{conv} / \frac{\rho U}{\eta} = \|\rho(\vec{v} \cdot \vec{grad}) \vec{v}\| = \frac{\rho U^2}{L} \Rightarrow \tau_{conv} = \frac{L}{U} \end{cases}$$

On retrouve bien $Re = \frac{\rho U L}{\eta}$

* Selon valeur de Re , différents type d'écoulement:

$Re < 10^3$: écoulement laminaire

$Re > 10^3$: ———— turbulent

$10^3 < Re < 10^5$: voir au cas par cas

* Calcul de Re → voir tous les longuins

2) Conditions aux limites

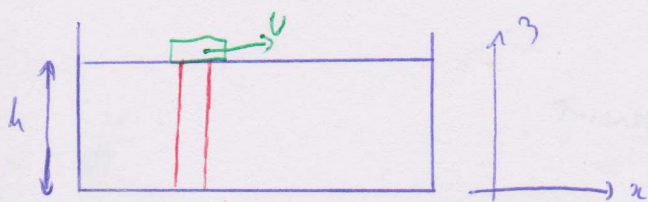
- Sur paroi solide, $\vec{v}_{fluide} = \vec{v}_{paroi}$ (en particulier $\vec{v} = 0$ si paroi fixe)

Condition bien différente de celle pour fluide parfait mais on fait un lien entre les deux via la notion de couche limite.

- Au voisinage d'une surface libre (atmosphère - liquide) la force de viscosité est continue, d'où $\frac{\partial \vec{v}}{\partial n} = 0$ (\vec{n} , normale)

III - Exemple d'application → Transparent 3

1) Retour sur l'expérience 1



$$\vec{v} = v_x(x, z) \vec{u}_x$$

$$p = p(z)$$

Le glycérol est un liquide (non parfaitement compressible : $\chi_s = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \Big|_s$), on se place donc dans le cas d'un écoulement incompressible $\Rightarrow \text{div} \vec{v} = 0 = \frac{\partial v_x}{\partial x}$, d'où $v_x(x, z) = v_x(z)$

On est dans les conditions d'application de l'équation de NS (incompressible, newtonien, homogène)

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{v} \cdot \text{grad})}_{\vec{v} \cdot \nabla} \vec{v} \right) = 0 = -\text{grad} p + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v}$$

$$v_x \vec{u}_x \frac{\partial v_x}{\partial z} \vec{u}_z = 0$$

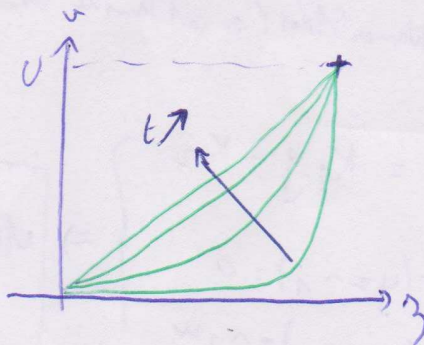
$$p(z)/h = p_0$$

$$\text{D'où} \begin{cases} -\frac{dp}{dz} - \rho g = 0 & \Rightarrow p(z) = a - \rho g z = p_0 + \rho g (h - z) \\ \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = 0 & \Rightarrow v_x = c_1 z + c_2 = \frac{U}{h} z \end{cases}$$

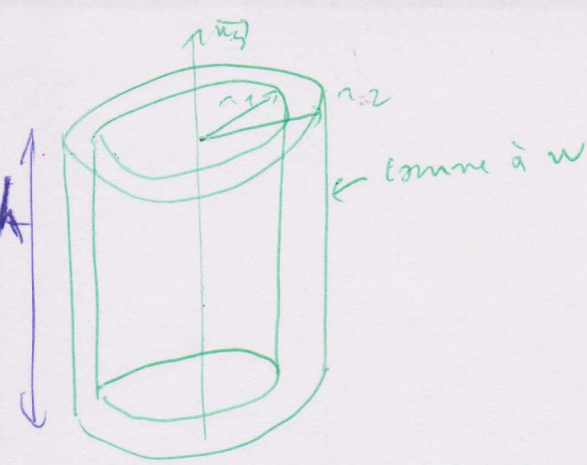
$$v_x(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$v_x(h) = U \Rightarrow c_2 = \frac{U}{h}$$

Régime transitoire : $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \eta \Delta^2 \vec{v}_x$



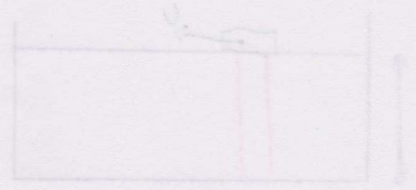
2) Exemple d'un viscosimètre : viscosimètre de Couette



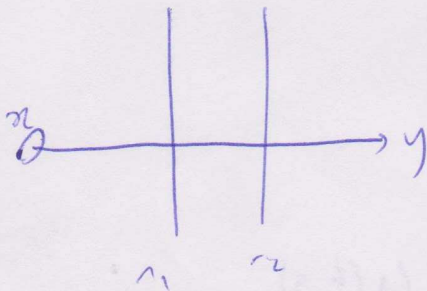
type : Écoulement / stationnaire
 incompressible
 homogène

- fluide Newtonien
- Néglige la pesanteur
- \vec{v} possède une composante suivant \vec{e}_θ

transparent



* On néglige la pesanteur des cylindres et on cherche $\vec{v} = v(y) \vec{e}_\theta$



Continuité composante tangentielle donne

$$\begin{cases} v(r_2) = r_2 \omega \\ v(r_1) = 0 \end{cases}$$

$$(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = 0$$

Donc équation de Navier-Stokes (on est dans les conditions d'application): $\eta \Delta \vec{v} = 0 \Rightarrow \eta \frac{d^2 v}{dy^2} = 0$

$$\left. \begin{aligned} \text{D'où, } v &= K_1 y + K_2 \\ v(y=r_1) &= 0 \\ v(y=r_2) &= r_2 \omega \end{aligned} \right\} \Rightarrow v(y) = \frac{r_2 \omega}{r_2 - r_1} y - \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \omega$$

$$dF_{\text{sur le cylindre}} = \eta \frac{r_2 \omega}{r_2 - r_1} ds \Rightarrow \text{couple total} = \frac{\eta r_1 r_2 \omega}{r_2 - r_1} r_1 2\pi h = C d\omega$$

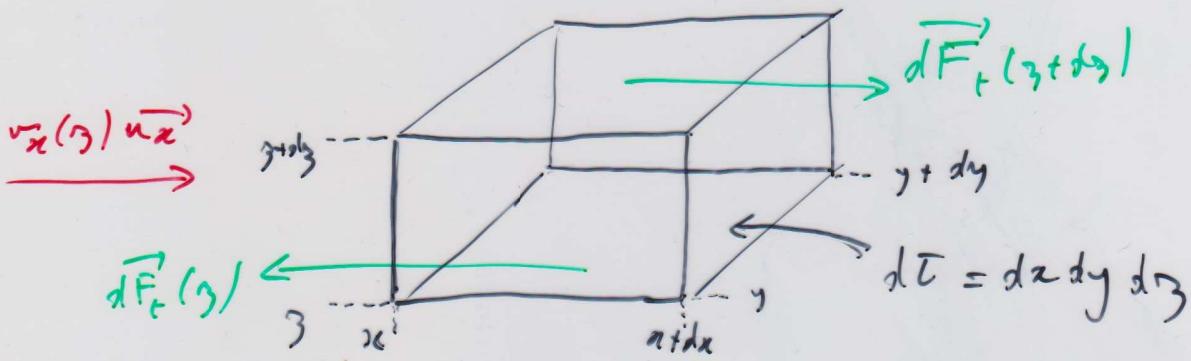
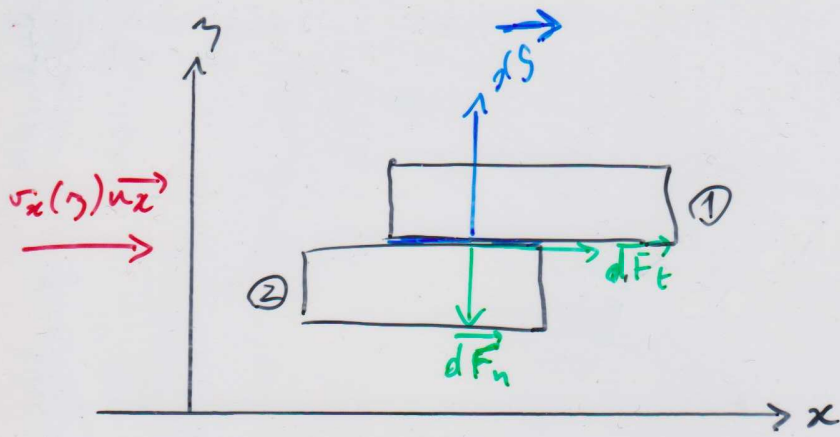
$ds = r_1 dA d\theta$

$$dF_0 = \frac{\eta r_1 r_2 \omega}{r_2 - r_1} ds$$

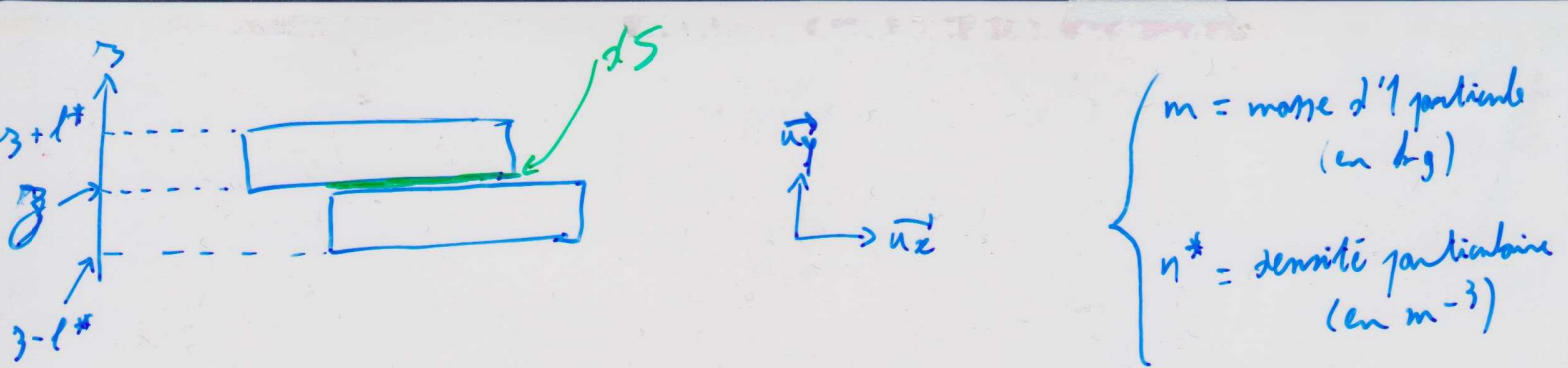
Commentaire / Suggestion :

- 1) Mieux gérer les transparents (ne pas mettre des trucs super simple que l'on peut faire au tableau)
⊕ utiliser bibliographies pour les transparents.
- 2) Insister dès le début sur le caractère diffusif de la viscosité (même sans avoir les équations)
- 3) Modèle microscopique pas indispensable + prend du temps à présenter proprement donc à ne pas faire.
- 4) Gagner du temps pour passer plus de temps sur les applications et les explications (caractère diffusif --)
- 5) Exemple d'intros bien (mais le jour 5 utiliser du glycérol bien coloré pour que le jury voit)
⊕ bien revenir sur l'exemple en application.
- 6) Ne pas oublier de titre → pour le □)1) à □)3) ça le fait pas.
- 7) Plus insister sur le fait que dans Re on compare les termes pour savoir lesquels ont peu négliger pour simplifier la résolution (gagner du temps en calculant $Re = \frac{U_{diff}}{U_{visc}}$ ---)

Biblio: - Tec et Doc PC/PC* de Stéphane Olivier (le jaune et bleu)
- Guyon et Petit, Hydrodynamique physique



Fluide / grandeur	Eau	Air	glycérol
viscosité dynamique η en $\text{Pa}\cdot\text{s}$	10×10^{-3}	$1,8 \times 10^{-5}$	1,4
masse volumique ρ en $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	$1,0 \times 10^3$	1,3	$1,3 \times 10^3$
viscosité cinématique ν en $\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$	$1,0 \times 10^{-6}$	$1,4 \times 10^{-5}$	$1,1 \times 10^{-3}$



Bilan de quantité de mouvement entre t et $t + \delta t$:

$$d\vec{P}_{\text{haut} \rightarrow \text{bas}}^* = \left[\delta N_{\text{haut} \rightarrow \text{bas}} \left(v_x(z+l^*) \vec{u}_x - v^* \vec{u}_z \right) - \delta N_{\text{bas} \rightarrow \text{haut}} \left(v_x(z-l^*) \vec{u}_x + v^* \vec{u}_z \right) \right]$$

Or

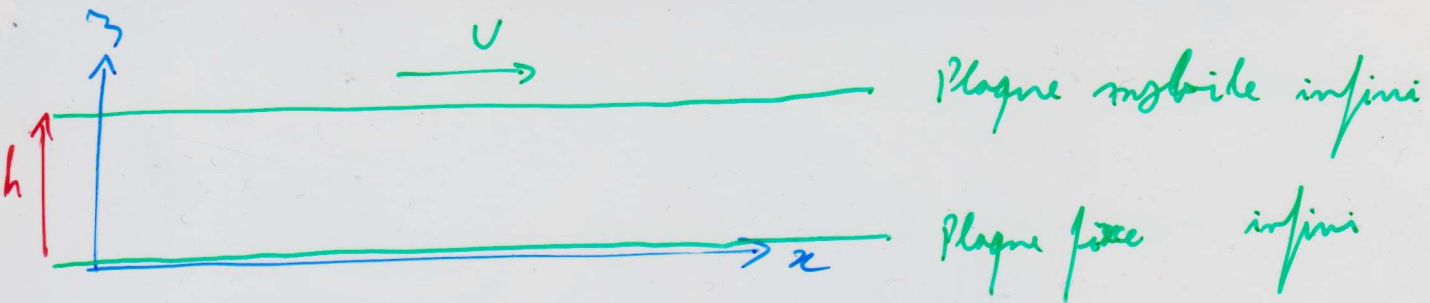
$$\delta N_{\text{haut} \rightarrow \text{bas}} = \delta N_{\text{bas} \rightarrow \text{haut}} = \frac{1}{\delta} m n^* dS \underbrace{v^* \delta t^*}_{l^*}$$

D'où, $d\vec{P}_{\text{haut} \rightarrow \text{bas}}^* = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{\delta} m n^* dS l^* (v_x(z+l^*) - v_x(z-l^*)) \vec{u}_x \\ - \frac{1}{3} m n^* l^* v^* dS \vec{u}_z \end{array} \right]$

Puis via un développement de Taylor :

$$\frac{d\vec{P}^*}{dt} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{3} m n^* l^* v^* \frac{dv_x}{dz} dS \vec{u}_x \\ - \frac{1}{3} m n^* v^{*2} dS \vec{u}_z \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\eta = \frac{1}{3} m n^* l^* v^*}$$



$$\begin{cases} \vec{v} = v_z(z) \vec{u}_z \\ p = p(z) \end{cases}$$

