

# Dynamique Relativiste

Binôme : Tijani ID BARKACH

Correcteur : Mélanie Lebental

Vincent FARAGOUT

Niveau : L3

Pré requis : Mécanique Newtonienne, cinématique relativiste, transformée de Lorentz.

## 1<sup>ère</sup> Partie : LEÇON

Introduction : Expérience de Bertozzi pour la mise en évidence de la vitesse limite (c) des particules. (Voir transparent 1)

I) Construction de la dynamique relativiste.

1) Postulats de la dynamique relativiste.

$$\begin{cases} dE = \vec{f} \cdot d\vec{r} \\ d\vec{p} = \vec{f} \cdot dt \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{dE}{c} \\ d\vec{p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \cdot dt \\ d\vec{r} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\tilde{P} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix}}$$

2) Quadrivecteur énergie-impulsion  $\tilde{P}$ .

$$\tilde{P} = m \cdot \tilde{v} = \begin{pmatrix} \gamma mc \\ \gamma m \vec{v} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} E = \gamma mc^2 \\ \vec{p} = \gamma m \vec{v} \end{cases}$$

3) Energie relativiste.

$$\tilde{p}^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = \gamma^2 m^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m^2 c^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4} \text{ Relation fondamentale d'Einstein.}$$

Energie cinétique :  $T = E - mc^2$  et pour  $v \ll c$   $T = \frac{1}{2}mv^2$

Cas du photon :  $E = pc$

4) Principe fondamental de la dynamique relativiste.

a) Enoncé à 4 dimensions.

$$\boxed{\tilde{F} = \frac{d\tilde{P}}{d\tau}} \text{ et } d\tau = \frac{dt}{\gamma}$$

b) Enoncé à 3 dimensions.

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} \text{ et pour } v \ll c \text{ on a : } \gamma \sim 1 \text{ donc : } \vec{f} = m\vec{a}$$

II) Applications aux collisions de particules.

1) Dynamique d'un système à 2 particules. (voir transparent 2)

- ✓ Collision élastique et inélastique.
- ✓ Référentiel à cible fixe et référentiel du centre de masse.

2) Lois de conservations.

a) Conditions.

$$\tilde{P}_{\text{avant collision}} = \tilde{P}_{\text{après collision}}$$

b) Exemple d'une collision élastique : l'effet Compton. (voir transparent 3)

On écrit la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion et la conservation de la norme du quadrivecteur.

$$\left(\frac{E_1}{c} + \frac{E_2}{c}\right)^2 - p_1^2 = \left(\frac{E_1'}{c} + \frac{E_2'}{c}\right)^2 - (\vec{p}_1' + \vec{p}_2')^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta)}$$

### 3) Référentiel barycentrique.

$$\vec{p}_{tot} = \sum_i \gamma_i m_i \vec{v}_i(R^*) = \vec{0}$$

### 4) Energie seuil et collision inélastique.

#### a) Energie seuil.

$T_s$  = énergie cinétique minimale que doit avoir la ou les particules en voie d'entrée pour créer des particules en voie de sortie.

#### b) Exemple d'une collision inélastique : production du baryon $\Xi_b^*$ .

$$p_1 + p_2 \rightarrow \Xi_b^*$$

(Voir transparent 4 (et 6 pour détails des calculs))

#### 1<sup>er</sup> cas : Référentiel à cible fixe.

$$\left(\frac{E_1}{c} + m_p c\right)^2 - p_1^2 = m^2 c^2$$

$$\Rightarrow T_s = \frac{m^2 c^4 - 4m_p^2 c^4}{2m_p c^2} = 16,96 \text{ GeV}$$

#### 2<sup>ème</sup> cas : Référentiel barycentrique.

$$\left(\frac{E_1}{c} + \frac{E_2}{c}\right)^2 = m^2 c^2$$

$$\Rightarrow T_s = \frac{mc^2}{2} - m_p c^2 = 2,03 \text{ GeV}$$

### III) Accélérateurs de particules.

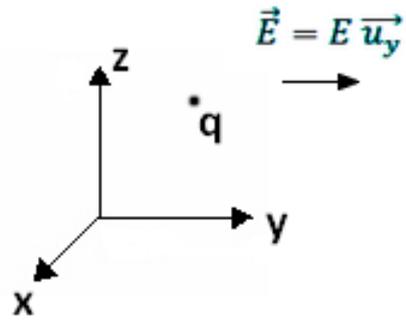
$$(\vec{E}, \vec{B}) \Rightarrow \vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

#### 1) Accélérateurs linéaires.

##### a) Particule soumise à un champ $\vec{E}$ statique et uniforme.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q \vec{E}$$

$$\Rightarrow v_y = \frac{qEt}{\sqrt{m^2 + \frac{q^2 E^2 t^2}{c^2}}}$$



- ✓ Confirmation expérience de Bertozzi.
- ✓ Cockroft et Walton réalisent le 1<sup>er</sup> accélérateur en 1932. Ils peuvent atteindre plusieurs centaines de keV.
- ✓ Aujourd'hui on arrive à atteindre une trentaine de MeV.

b) Principe de l'accélérateur linéaire. (voir transparent 5)

- ✓ 1<sup>er</sup> accélérateur linéaire construit en 1947 par Alvarez.
- ✓ Série de tubes métalliques alignés avec entre ces tubes une différence de potentiel permettant d'accélérer ces particules. La vitesse étant constante dans chacun de ces tubes car ils sont isolés des forces électromagnétiques.
- ✓ Accélérateur d'Alvarez long de 12,3m pouvait accélérer des ions jusqu'à 32 MeV.
- ✓ Aujourd'hui, le plus grand accélérateur est celui de l'Université de Stanford (Californie) d'une longueur de plus de 3 km et permet d'atteindre une énergie de 50 GeV.
- ✓ Inconvénient : la taille.

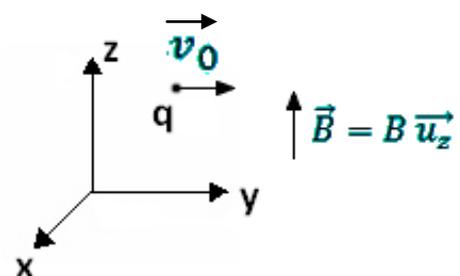
2) Accélérateurs circulaires.

a) Particule soumise à un champ  $\vec{B}$  statique et uniforme.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Or :

$$\frac{d\gamma}{dt} = 0 \text{ (théorème de l'énergie cinétique)}$$



Donc :  $\gamma m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$  (trajectoire circulaire)

Deux grandeurs caractéristiques :

- ✓ Rayon de Larmor :  $\rho = \frac{\gamma m v_0}{|q|B}$
- ✓ Pulsation cyclotron :  $\omega_c = \frac{|q|B}{\gamma m}$

b) Le cyclotron. (voir transparent 5)

- ✓ Le 1<sup>er</sup> cyclotron date de 1932 et a été créé par Lawrence.
- ✓ 2 parties conductrices en forme de « D » entre lesquelles on crée un champ  $\vec{E}$  variable à la pulsation  $\omega_0$ .
- ✓ Il faut qu'à tout instant t on ait :  $\omega_c = \omega_0$ .
- ✓ Dans chaque « D » il y a un champ  $\vec{B}$  qui permet de rendre la trajectoire circulaire avec le rayon qui augmente de plus en plus.
- ✓ Problème au cours de l'accélération :  $v \uparrow$  donc  $\gamma \uparrow$  donc  $\omega_c \downarrow$  donc le champ  $\vec{E}$  n'est plus synchronisé avec la pulsation cyclotron.
- ✓ En France, au Ganil de Caen, on arrive à accélérer les particules jusqu'à une énergie d'une trentaine de MeV.

c) Le synchrocyclotron.

- ✓ Cyclotron où on essaye de faire varier la pulsation du champ  $\vec{E}$  pour la synchroniser avec la pulsation cyclotron.
- ✓ En Russie, il existe un synchrocyclotron qui permet d'atteindre des énergies de 1 GeV.

d) Le synchrotron.

- ✓ Problème au cours de l'accélération :  $v \uparrow$  donc  $\gamma \uparrow$  donc  $\rho \uparrow$ . On est limité spatialement.
- ✓ Le LHC à Genève a déjà un rayon de 5 km.
- ✓ Avec le synchrotron, on essaye d'augmenter le champ  $\vec{B}$  pour garder le rayon de Larmor constant. On augmente aussi la pulsation du champ  $\vec{E}$  pour rester synchronisé avec la pulsation cyclotron.

- ✓ Le LHC permet d'atteindre des énergies de 7 TeV.
- ✓ La limitation vient à présent du champ  $\vec{B}$  qui est aujourd'hui au LHC égal à 8,3 T.

## 2<sup>ème</sup> Partie : QUESTIONS

- ✓ Quelles sont les autres applications des accélérateurs ?  
*On peut utiliser les accélérateurs en médecine (proton-thérapie par exemple).*
- ✓ Le LHC est-il vraiment circulaire ?  
*Non pas vraiment mais presque.*
- ✓ Est-ce que 8,3 T c'est énorme ? Avec quoi peut-on atteindre de tels champs magnétiques ?  
*8,3 T est un fort champ magnétique et ne peut pas être atteint avec des bobines à cause des trop grands courants qu'il faudrait. On utilise des bobines supraconductrices.*
- ✓ Pourquoi c'est rare les synchrocyclotrons ?  
*C'est rare car il ne résout pas le problème du rayon qui augmente au cours de l'accélération.*
- ✓ Pourquoi est-il avantageux d'utiliser des protons pour les collisions ?
- ✓ Quelle est la vitesse dans le  $\gamma$  ?  
*C'est la vitesse de la particule dans le référentiel galiléen étudié.*
- ✓ Quelle est la masse considérée à chaque fois ?  
*C'est la masse de la particule dans son référentiel propre, la masse « au repos ».*
- ✓ Comment trouver la trajectoire circulaire avec le champ  $\vec{B}$  ?  
*On utilise le fait que  $\gamma$  est constant et on résout le système couplé d'équations comme en mécanique newtonienne.*
- ✓ Démonstration du théorème de l'énergie cinétique ?
- ✓ Pourquoi la longueur des tubes des accélérateurs linéaires augmente ?  
*On veut que le champ électrique de fréquence  $f$  accélère les particules entre chaque tube donc la longueur du nième tube est égale à :  $L_n = \frac{v_n}{2f}$  où  $v_n$  est la norme de la vitesse de la particule et on a :  $\frac{1}{2}mv_n^2 = neV$  où  $V$  est la tension entre les tubes.*
- ✓ Pourquoi utilise-t-on toujours des accélérateurs linéaires ?  
*Pour éviter le rayonnement des électrons par exemple dans les accélérateurs circulaires.*
- ✓ Est-ce que c'est possible de créer le baryon  $\Xi_b^*$  avec une impulsion nulle ?  
*En réalité non car on a conservation de l'impulsion.*
- ✓ Pourquoi peut-on écrire  $\vec{P}_{avant collision} = \vec{P}_{après collision}$  ?

*On ne tient pas compte de ce qu'il se passe au moment de la collision en elle-même.*

*On ne tient donc pas compte des interactions durant la collision.*

- ✓ Pourquoi étudie-t-on un système à 2 particules ? Est-ce réaliste ?

*C'est plus pratique pour les calculs et c'est proche de la réalité car dans les accélérateurs on fait collisionner deux particules avec des impulsions opposées.*

### 3<sup>ème</sup> Partie : COMMENTAIRES

- ✓ On peut raccourcir la première partie.
- ✓ LHC : collision proton  $\leftrightarrow$  proton.
- ✓ On peut parler d'autres sujets si on n'est pas à l'aise avec les collisions de particules.
  - rayonnement synchrotron des hautes énergies (Soleil, ESRF).
  - Revue « reflets de la physique » de juin 2013 sur les rayonnements diffusé.
  - Onduleurs – Wigglers : permet de réduire le rayonnement synchrotron.
  - Principe de renormalisation (la masse tient compte des interactions entre les particules). **Voir le Feynman** (qui a œuvré en premier sur la renormalisation).
  - GPS (attention à la relativité générale) :
    - ➔ Neil Ashby, « general relativity in the GPS).
    - ➔ Parler du modèle standard qui ne tient pas compte de la gravitation.
- ✓ Points à ne pas louper :
  - ➔ Masse invariant.
  - ➔ Accélération plus nécessairement colinéaire à la force.
  - ➔ Principe action – réaction perdu (**voir le Pérez**)
- ✓ Expliquer pourquoi on a deux longueurs d'onde différente dans l'effet Compton. La longueur d'onde égale à la longueur d'onde de l'onde incidente est due à l'interaction entre le photon incident et les noyaux du graphite et la seconde longueur d'onde est due au photon diffusé après la collision avec un électron périphérique.
- ✓ Il y a une origine des énergies maintenant à cause de l'énergie de masse.
- ✓ Il ne faut pas parler de moment d'inertie ou de solide en relativité car ça n'a pas de sens.
- ✓ Conseils bibliographique :
  - ➔ Sujet d'agrég de physique appliquée de 2010.
  - ➔ Livres : Rougé et Jean-Michel Raimond.

## 4<sup>ème</sup> Partie : BIBLIOGRAPHIE

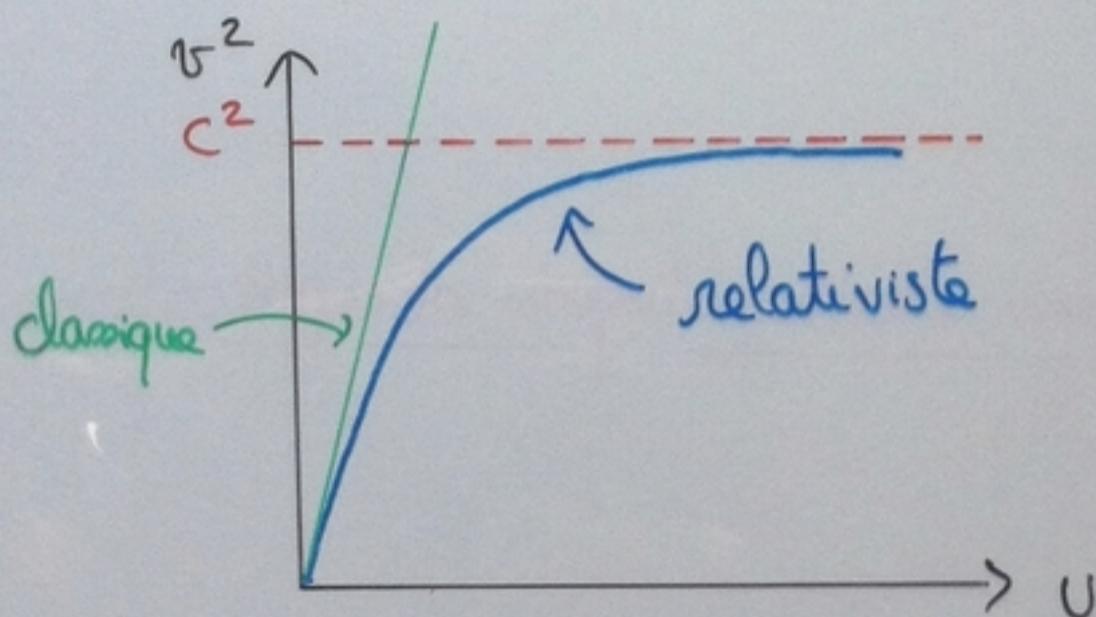
- ✓ Yvan Simon, *Relativité restreinte*. Bien pour les exemples de collisions, et pour la partie plus théorique comme la première partie.
- ✓ Grossetête, *Relativité restreinte et structure atomique de la matière*. Bien pour les calculs et pour la partie théorique.
- ✓ D. Blanc, *Précis de physique nucléaire*. Bien pour la dernière partie sur les accélérateurs avec notamment les exemples et les ordres de grandeurs des énergies.

## Expérience de Bertozzi (1964)

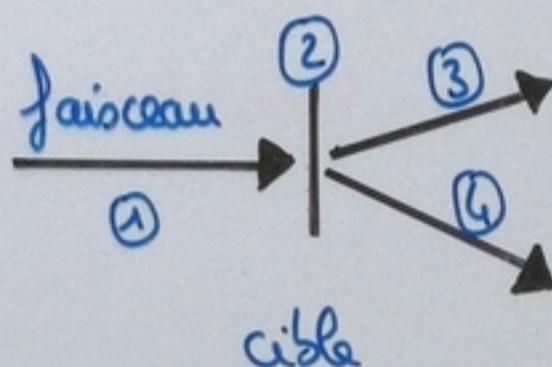
$U$  = tension accélératrice

$E_c = eU$  = énergie cinétique

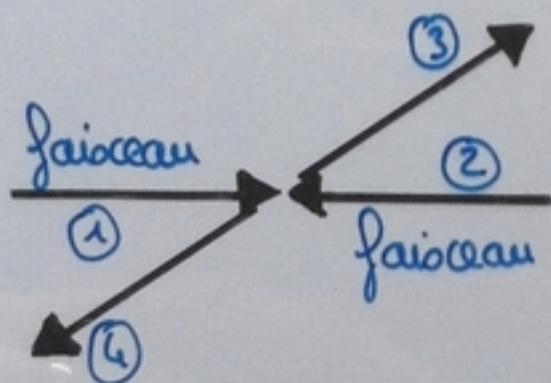
$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{zeU}{m}}$  en mécanique classique



## Dynamique d'un système à 2 particules.

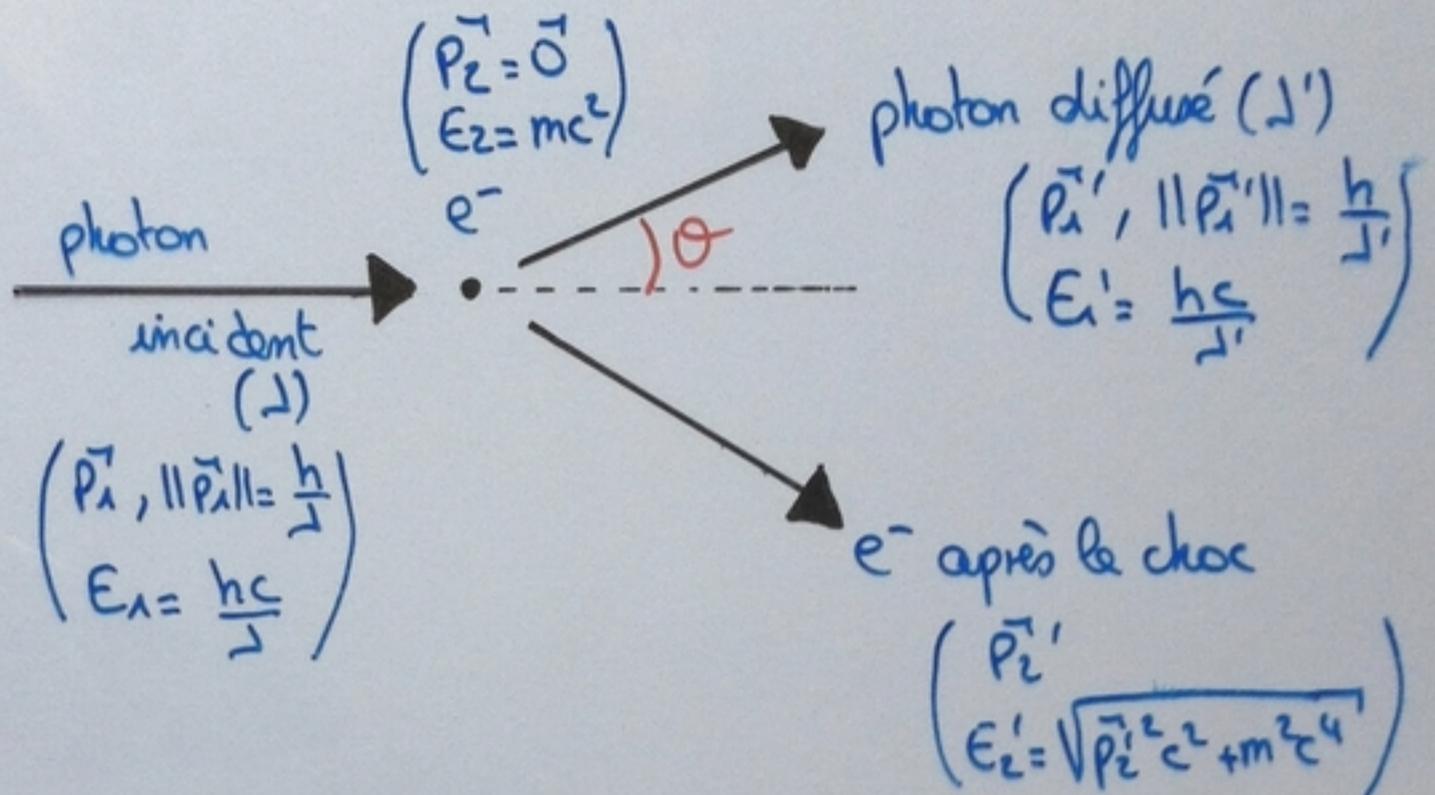


### Référentiel à cible fixe.



### Référentiel du centre de masse.

## 2 b) Exemple d'une collision élastique: l'effet Compton.



Conservation de  $\vec{P}$ :

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

$$E_1 + E_2 = E_1' + E_2'$$

Conservation du produit scalaire:

$$\left(\frac{E_1}{c} + \frac{E_2}{c}\right)^2 - \vec{p}_1^2 = \left(\frac{E_1'}{c} + \frac{E_2'}{c}\right)^2 - (\vec{p}_1' + \vec{p}_2')^2$$

$$\Rightarrow \frac{h^2}{\lambda^2} + m^2 c^2 + \frac{2hc}{\lambda} m - \frac{h^2}{\lambda^2} = \frac{h^2}{\lambda'^2} + m^2 c^2 - \frac{h^2}{\lambda'^2} + \frac{2h}{c\lambda'} \left(\frac{hc}{\lambda} + mc^2 - \frac{hc}{\lambda'}\right) - 2\vec{p}_1' \cdot (\vec{p}_1 - \vec{p}_1')$$

$$\Rightarrow \frac{hcm}{\lambda} = \frac{h^2}{\lambda\lambda'} + \frac{hcm}{\lambda'} - \frac{h^2}{\lambda'^2} - \frac{hh}{\lambda\lambda'} \cos\theta + \frac{h^2}{\lambda'^2}$$

$$\Rightarrow hmc \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) = \frac{h^2}{\lambda\lambda'} (1 - \cos\theta)$$

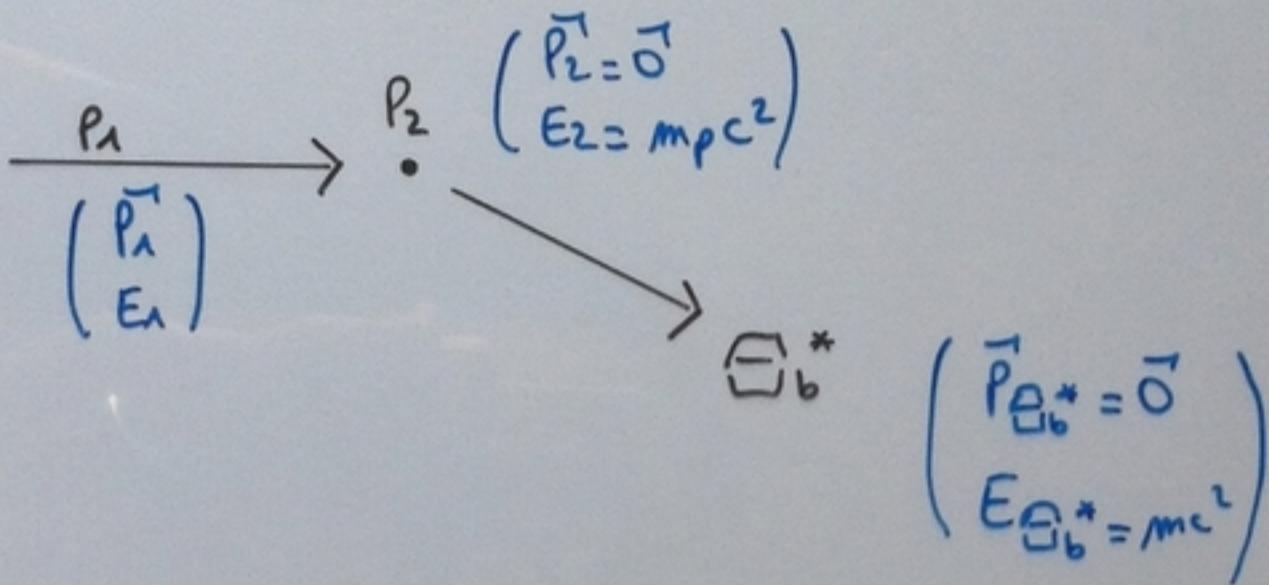
$$\Rightarrow \Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos\theta) \geq 0$$

# 4 b) Production du baryon $\Xi_b^*$

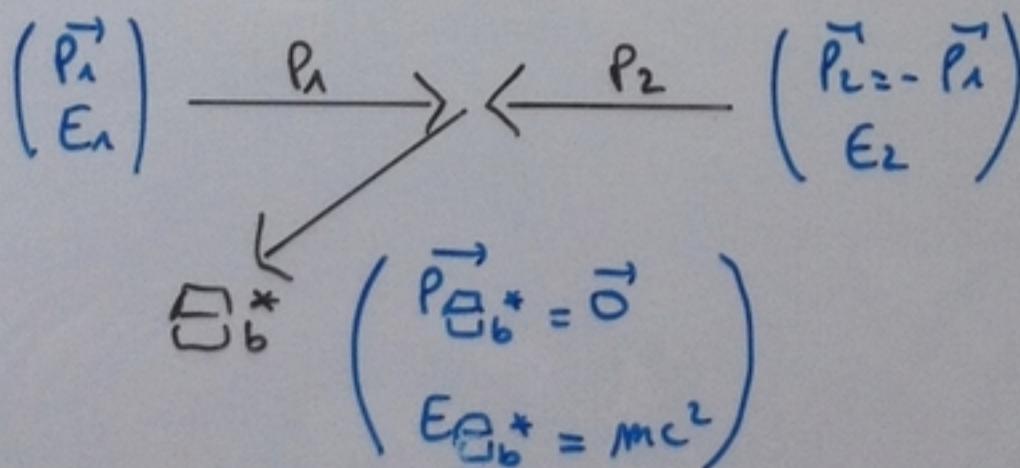
$$p_1 + p_2 \longrightarrow \Xi_b^* \quad m_{p_1}c^2 = m_{p_2}c^2 = m_p c^2 = 938,3 \text{ MeV}$$

$$m_{\Xi_b^*}c^2 = m_{\Xi_b^*}c^2 = 5945 \text{ MeV}$$

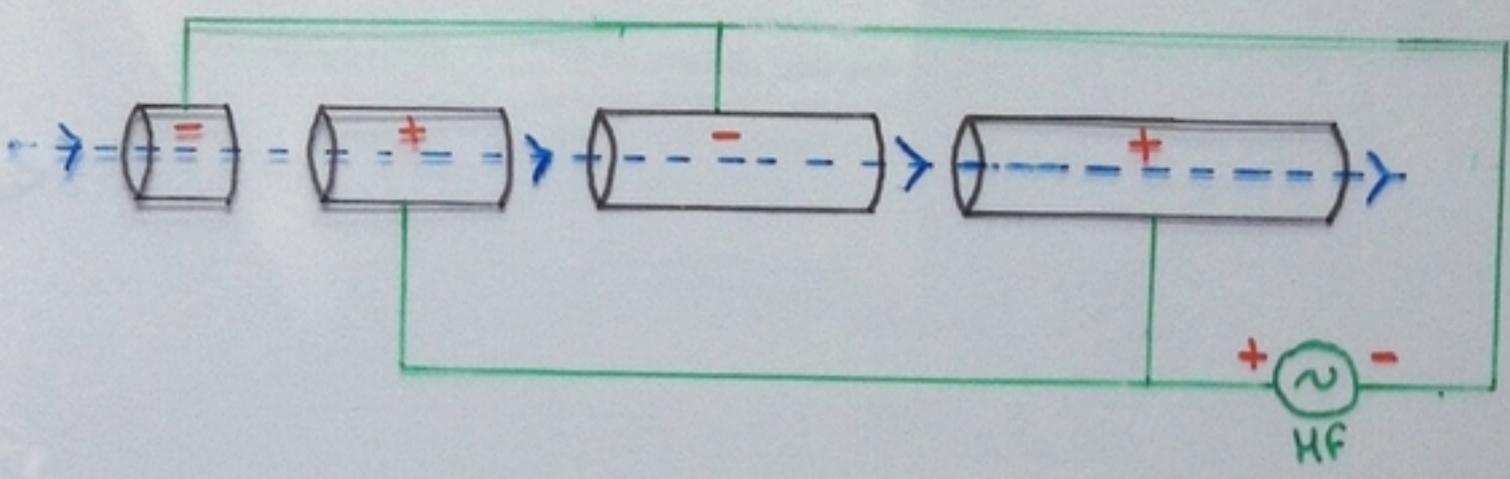
1<sup>er</sup> cas: Dans le référentiel à cible fixe.



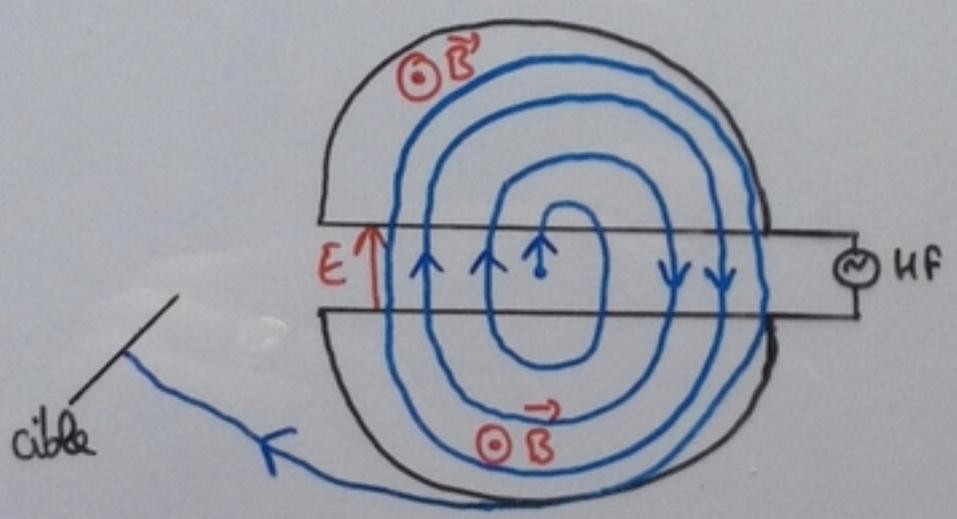
2<sup>ème</sup> cas: Dans le référentiel du centre de masse.



1b) Principe de l'accélérateur linéaire



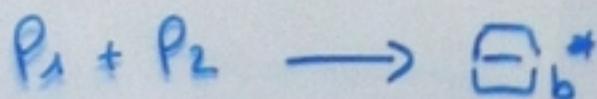
2b) le cyclotron



$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega_0 t)$$

## 4b) Production du baryon $\Xi_b^*$

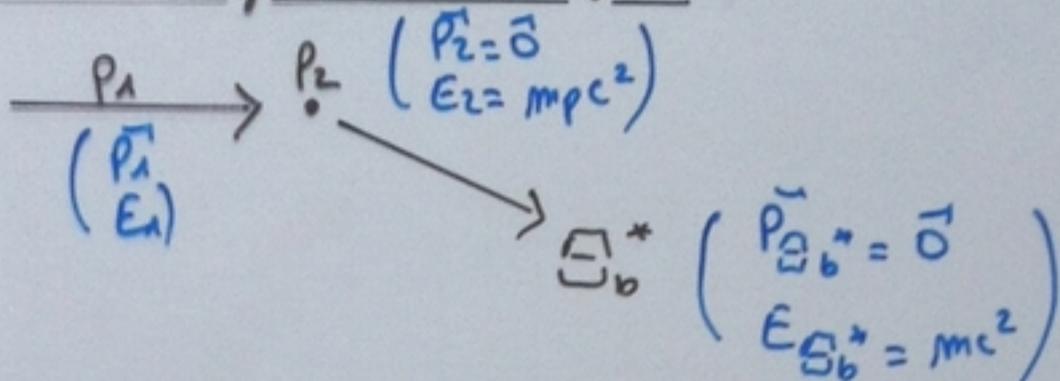
6



$$m_{p_1} c^2 = m_{p_2} c^2 = m_p c^2 = 938,3 \text{ MeV}$$

$$m_{\Xi_b^*} c^2 = m c^2 = 5945 \text{ MeV}$$

1<sup>er</sup> cas: Dans le référentiel à cible fixe.



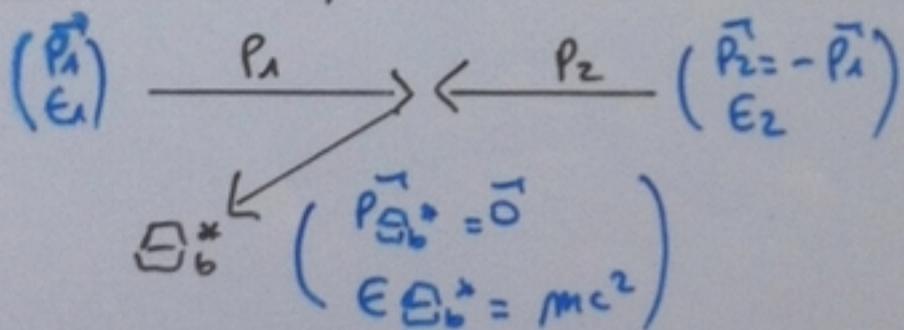
$$\left(\frac{E_1}{c} + m_p c\right)^2 - \vec{p}_1^2 = m^2 c^2 \Rightarrow \frac{E_1^2}{c^2} + m_p^2 c^2 + 2E_1 m_p - p_1^2 = m^2 c^2$$

$$\text{or } E_1^2 = p_1^2 c^2 + m_p^2 c^4 = (T_s + m_p c^2)^2$$

$$\text{Donc } m_p^2 c^2 + m_p^2 c^2 + 2m_p (T_s + m_p c^2) = m^2 c^2$$

$$\Rightarrow T_s = \frac{m^2 c^4 - 4m_p^2 c^4}{2m_p c^2} = 16,96 \text{ GeV}$$

2<sup>ème</sup> cas: Dans le référentiel du centre de masse.



$$\left(\frac{E_1}{c} + \frac{E_2}{c}\right)^2 = m^2 c^2 \quad \text{or } \|\vec{p}_1\| = \|\vec{p}_2\| \text{ et } m_{p_1} = m_{p_2} \text{ donc } E_1 = E_2 = E_p \text{ et } T_1 = T_2 = T_s$$

$$\text{d'où } \left(\frac{2E_p}{c}\right)^2 = m^2 c^2 \Rightarrow 4(T_s + m_p c^2)^2 = m^2 c^4$$

$$\Rightarrow T_s = \frac{m c^2}{2} - m_p c^2 = 2,03 \text{ GeV}$$