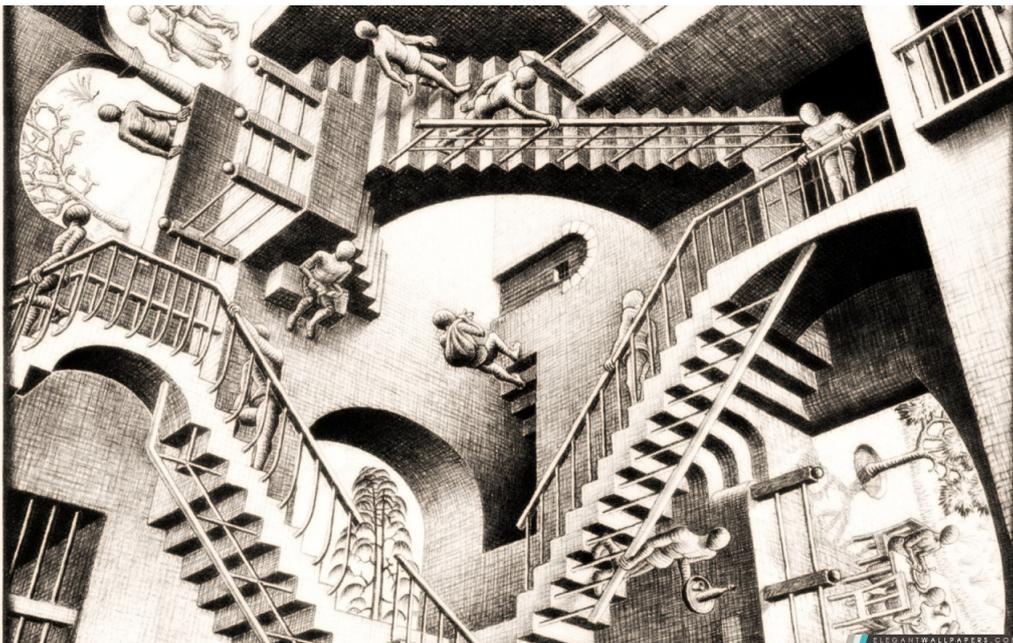


---

## LP05 : Cinématique relativiste

---



8 octobre 2014

Leçon corrigée par :  
Mélanie LEBENTAL  
[lebental@lpqm.ens-cachan.fr](mailto:lebental@lpqm.ens-cachan.fr)

# Introduction

Au XX<sup>ème</sup> siècle, la plupart des phénomènes physiques sont expliqués par les lois de la mécanique classique (ou non-relativiste) ou par les lois de l'électromagnétisme que traduisent les équations de Maxwell. Néanmoins, une des questions qui reste posée concerne la propagation de la lumière, onde électromagnétique que l'on sait se propager à  $c$ . De fait, là où l'on traduit la notion de changement de référentiel galiléen, on remarque que les équations de Maxwell ne restent pas invariantes par cette transformation. Ainsi l'extension du principe newtonien de relativité par la transformation de Lorentz constitue précisément la base du principe de relativité d'Einstein.

Les commentaires portant sur des parties en particulier seront écrits [en bleu](#).

## I : Principe de relativité

### 1) Notion d'invariant et de transformée, événement

**Invariant en mécanique classique :** La norme entre deux points de l'espace est conservée quand on passe d'un référentiel à l'autre  $\Rightarrow$  nécessité d'un traitement objectif des phénomènes physiques. Voir transparent.

**Notion d'événement :** On représente un événement comme la donnée de  $(x, y, z, t)$  dans un certain référentiel  $\mathcal{R}$ .

**Principe de relativité restreinte :** En mécanique classique, les changements de référentiel galiléen, les translations (homogénéité de l'espace), les rotations (isotropie de l'espace), les symétries planes et la translation dans le temps (homogénéité du temps) laissent invariantes les lois de la Physique.

### 2) Transformation de Galilée

**Équations de Maxwell :** On montre que certaines (comme Maxwell-flux) sont invariantes par cette transformation tandis que d'autres (comme Maxwell-Gauss) ne le sont pas (voir transparent).

**Expérience de Michelson-Morley :** Voir transparent. [Détaillez plus cette partie. À quoi s'attendaient-ils ? Mettre des ordres de grandeur.](#)

$\Rightarrow$  Insuffisance de la transformation de Galilée, passage à la relativité.

### 3) Les postulats de la Relativité restreinte

**Postulats :** Les lois de la Physique sont invariantes par changement de référentiel galiléen, donc  $c$  est la même dans tous les référentiels galiléens. On retrouve la mécanique classique si  $v \ll c$ .

**Synchronisme entre deux horloges immobiles l'une par rapport à l'autre :** Contrôle de la marche (signal émis à  $t_1$  et reçu à  $t_2 \Rightarrow$  signal émis à  $t_1 + T$  et reçu à  $t_2 + T$ ), et contrôle de l'origine

(si on place un miroir en (2), on peut choisir comme origine  $t_1 + t_2$  (et le signal revient en (1) à  $t_1 + 2t_2$ ).

**Simultanéité :** Deux horloges synchrones affichent la même indication de temps pour deux événements.

## II : Transformation de Lorentz

### 1) Formules et premières conséquences

**Transformation :** On a :

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - v_e t) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v_e}{c^2}x\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'_{//} = \frac{v_{//} - v_e}{1 - \frac{v_{//}v_e}{c^2}} \\ v'_{\perp} = v_{\perp} \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{1 - \frac{v_e v_{//}}{c^2}}} \end{cases}$$

On retrouve la mécanique classique aux faibles  $\beta$ .

### 2) Intervalles d'espace-temps et diagramme de Minkowski

**Invariance de l'intervalle d'espace temps :**  $s_{12}^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$ . Intervalle de type espace, temps, lumière.

**Diagramme de Minkowski :** Différentes zones du diagramme (correspondant aux intervalles de type temps, espace ou lumière), généralisation à 4D (cône de lumière), notion de ligne d'univers.

## III : Mesures et applications

### 1) Mesure des longueurs

Règle de longueur  $l' = x'_2 - x'_1$  dans  $\mathcal{R}'$ , mais de longueur  $l = x_2 - x_1 = \gamma l' \geq l'$  dans  $\mathcal{R}$  si on mesure simultanément ( $t = t'$ ). De même pour les durées :  $\Delta t = \gamma \Delta t'$ . Voir transparent. **Vu qu'on ne peut jamais mesurer simultanément deux longueurs, il est préférable de traiter la dilatation du temps de façon approfondie, et de généraliser ensuite à la contraction des longueurs. On peut d'ailleurs y caser l'exemple classique des muons atmosphériques qui vivent « trop » longtemps.**

### 2) Effet Doppler

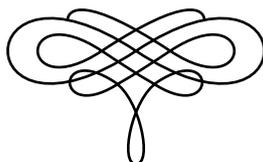
On transforme  $\left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right)$  par Lorentz :

$$\begin{cases} \frac{\omega}{c} = \gamma\left(\beta k'_x + \frac{\omega'}{c}\right) \\ k'_x = k' \cos(\theta) \end{cases} \Rightarrow v' = \frac{v}{\gamma(1 + \beta \cos(\theta'))}$$

On discute alors les cas  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi/2$  (qui n'a pas d'équivalent en mécanique classique). Insister sur l'effet transverse.

## Conclusion

Ouverture possible sur la relativité générale.



**Questions :** • Pourquoi est-ce intéressant d'étudier l'effet Doppler transverse ? Car c'est une preuve de la relativité vu qu'il n'existe pas en classique.

• Sur quel quadrivecteur a-t-on appliqué Lorentz dans l'étude de l'effet Doppler ? Comment sait-on que c'est un quadrivecteur ? Pourquoi se transforme-t-il selon Lorentz ? C'est, à une constante multiplicative près, l'énergie-impulsion du photon. Par contre, un quadrivecteur étant par définition une quantité qui se transforme bien sous Lorentz, on se mord la queue...

• Peut-on avoir une dilatation des longueurs si  $\gamma \leq 1$  ? Non car  $\gamma$  est toujours supérieur ou égal à 1.

• Si on lance la règle dans l'autre sens, se dilate-t-elle ? Non car  $\gamma$  ne dépend que de la norme de  $v$ .

• Comment fait-on des mesures de distances simultanées ? C'est en fait impossible car il n'existe pas de règle (çad de solide indéformable). On se rapporte en fait toujours à des temps dont on peut mesurer la simultanéité.

• À propos du cône de lumière, la ligne d'univers peut-elle sortir du cône ? Non car la particule que l'on suit aurait alors une vitesse plus grande que  $c$ .

• L'intervalle d'espace-temps est un invariant. Pourquoi ? Qu'est-ce qu'un invariant ? On peut le montrer via la transformation de Lorentz. Il s'agit d'une quantité égale par changement de référentiel (ici, galiléen).

**Commentaires :** • Ce qu'il faut absolument traiter : Doppler, la composition des vitesses, l'invariant, le cône de lumière, les contractions et dilatations, les temps et longueurs propres,  $c$  comme vitesse limite, le synchronisme, la simultanéité, la notion d'événement, le paradoxe des jumeaux (trop classique pour passer à côté), énoncer le postulat en toutes lettres, dire que la transformation de Lorentz est linéaire, parler de la causalité, dire qu'il n'existe pas de solide parfait (donc on parle de particules ponctuelles), et parler de la définition du mètre et de la seconde.

• On aurait pu parler plus des quadrivecteurs. Il aurait aussi fallu faire plus d'applications numériques (donner plus de chair à la leçon) et insister sur la notion de vitesse limite. Des exemple traitables comprennent l'exemple du disque solide en rotation ou l'anisotropie du rayonnement. On peut également mentionner le concept de rapidité, et se demander si les transformations de Lorentz forment un groupe (oui si on les fait toujours selon le même axe).

- *Utiliser la force de Lorentz pour parler de la non-invariance des équations de Maxwell peut être dangereux car la forme de cette force a été postulée pour rester invariante par transformation de Lorentz (et on se mord donc la queue).*

- *Le débat sur la primauté, entre Einstein et ses aînés (Poincaré, Lorentz et Michelson), de la théorie relativiste, est stérile : ils ne sont pas de la même génération et le contexte scientifique n'était donc pas le même.*

\*  
\* \*

**Références :** • *Monsieur Tompkins au pays des merveilles*, George Gamow. La relativité racontée sous forme de petites histoires. Bonne impression pour une vulgarisation scientifique.

- *Introduction à la relativité*, James Smith : les calculs sont peu développés mais les concepts bien expliqués. Essentiellement du texte et peut aussi être utilisé pour la LP06 : dynamique relativiste.

- *Mécanique 1*, Bertin-Faroux-Renault : très bon plan dont on s'est inspiré, mais limité en discussion.

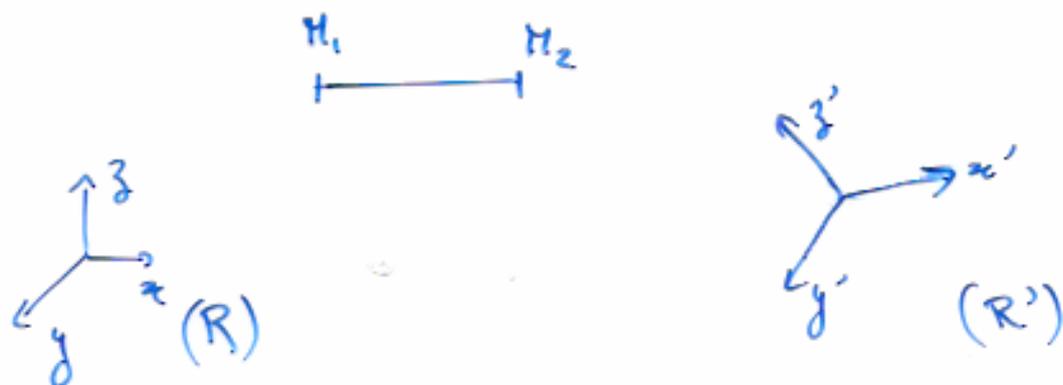
- *Relativité*, José-Philippe Pérez : utile pour les discussions qui ne se trouvent pas dans le BFR, les détails de calculs. Bref pour approfondir bouquin plutôt complet. Peut-être le plus complet de tous.

- *Introduction à la relativité*, André Rougé.

- <http://math.ucr.edu/home/baez/physics/Relativity/SR/experiments.html>, page de John Baez qui recense les preuves expérimentales de la relativité restreinte.

I.1)

a) Exemple d'invariant en mécanique classique.



Norme donnée par:  $|M_1 M_2|^2$

$$\text{dans } (R): |M_1 M_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$\text{dans } (R'): |M_1 M_2|^2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2$$

$\Rightarrow$  nécessaire d'avoir un traitement objectif  
des phénomènes physiques.

b) Notion d'événement E:

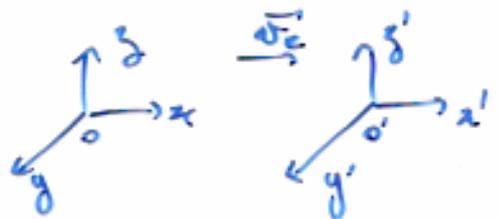
E décrit par  $(x; y; z; t)$

c) Principe de relativité restreinte

I. 2)

b) Les équations de Maxwell

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \\ \text{div } \vec{B} = 0 \end{cases} \quad \text{invariantes}$$



$$\begin{cases} \text{div } \vec{E} = 0 \\ \text{rot } \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0} \end{cases} \quad \text{non invariantes}$$

Par transformation de Galilée, on a:

$$\left. \begin{aligned} \vec{F} &= \gamma (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \text{ en } (\mathcal{R}) \\ \vec{F}' &= \gamma' (\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}') \text{ en } (\mathcal{R}') \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{avec } \vec{v} &= \vec{v}' + v'_c \vec{e}_z \\ \gamma &= \gamma' \\ \text{et } \vec{F} &= \vec{F}' \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E} = \vec{E}' - v'_c \wedge \vec{B}' \\ \vec{B} = \vec{B}' \end{cases} \quad (*)$$

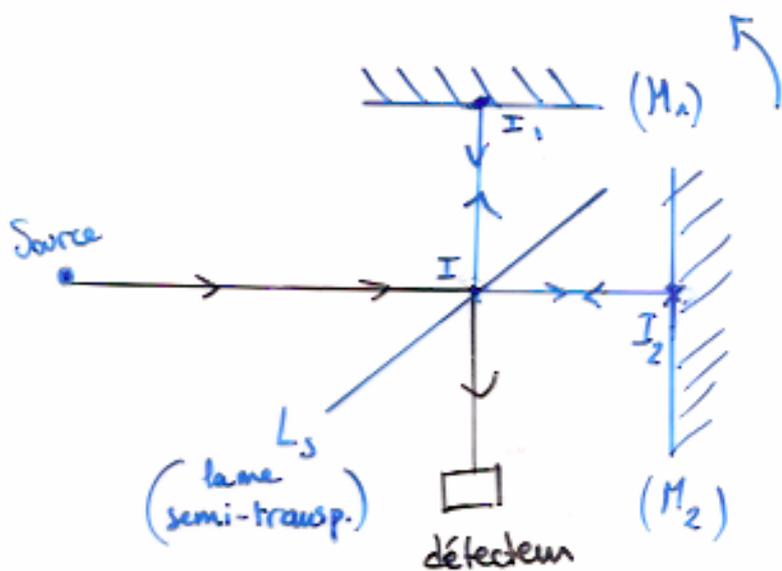
On s'intéresse à  $\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$

De (\*), on tire:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E'_x}{\partial x'} \\ \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + v'_c \frac{\partial B'_x}{\partial y'} \\ \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E'_z}{\partial z'} - v'_c \frac{\partial B'_y}{\partial z'} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{div } \vec{E} = \text{div}' \vec{E}' + v'_c \left( \frac{\partial B'_x}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'} \right)$$

## I. 2) Expérience de Michelson-Morley.



$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1 = \frac{2l}{c \cdot n_e} = \frac{2l}{c} \gamma_e \\ \tau_2 = \frac{l}{c - v_e} + \frac{l}{c + v_e} = 2l \frac{c}{c^2 - v_e^2} = \frac{2l}{c} \frac{1}{1 - \beta_e^2} = \frac{2l}{c} \gamma_e^2 \end{array} \right. \quad \text{où } \left\{ \begin{array}{l} \gamma_e = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_e^2}} \\ \beta_e = \frac{v_e}{c} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \tau = \tau_2 - \tau_1 = \frac{2l \gamma_e (1 - \gamma_e)}{c}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Avec } \beta_e \approx 10^{-4} \ll 1 \\ \gamma_e \approx 1 + \frac{\beta_e^2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \tau \approx \frac{l}{c} \beta_e^2$$

$$\text{D'où l'angle } \phi = \phi_e - \phi_2 = 2\pi \lambda \tau$$

$$\Rightarrow \underline{\phi \text{ calculée} = 0}$$

$$\text{OR } \phi \text{ observée} = 0.$$

### III. a) b) Mesure de durée

La durée propre:

On considère une horloge immobile dans  $(R')$  en  $x'_2 = x'_1 = x'_m$   
et qui mesure  $\Delta t' = t'_2 - t'_1$

Si l'intervalle  $s_{12}$  entre  $E_1$  et  $E_2$  de  $R'$ , on  
définit la durée propre  $T_p$ :

$$T_p = \frac{s_{12}}{c}$$

Mesure de l'intervalle de temps  $\Delta t$  dans  $(R)$ :

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

Avec  $ct = \gamma_c \left( ct' + \frac{v_c}{c} x' \right)$

$$\text{on a: } \begin{cases} ct_1 = \gamma_c \left( ct'_1 + \frac{v_c}{c} x'_m \right) \\ ct_2 = \gamma_c \left( ct'_2 + \frac{v_c}{c} x'_m \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta t = \gamma_c \Delta t' \quad \text{or } \gamma_c > 1$$

donc,  $\boxed{\Delta t > \Delta t'}$  : dilatation des durées  
par changement de référentiel  
galiléen.