

① INTRO : mouvement d'un solide ayant pour uniques DDL les  
rotat autour de O.

- approx gyroscopique + citem + paradoxal.
- applicat (horoscope).

L3  
qtic  
FFC

3' I - Etude du mouvement

A - Position du problème et notations.

→ TRANSPARENT

Trois types de rotat:

- $\dot{\Phi}$  = rotation propre  $\dot{\Phi}$
- + précess°  $\dot{\psi}$
- + nutation  $\dot{\theta}$ .

Précession de  $\vec{N}$  =  $\frac{d\vec{N}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{N}$

⇒  $\vec{N}$  tourne autour d'un cône ( $\vec{\Omega} \parallel \text{axe}$ )

Repère:  $\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{e}_1 + \dot{\psi} \vec{e}_2 + \dot{\Phi} \vec{e}_3$

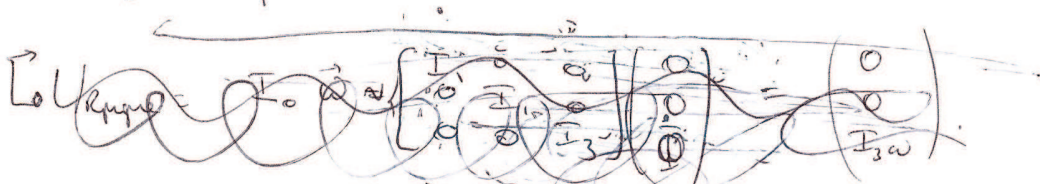
Rq: approximat gyroscopique:  $\dot{\Phi} \gg \dot{\psi} = \omega$ .  $\Delta \omega / \omega \sim \frac{I_1}{I_3}$ .

6'

B. Équations fondamentales

- chist. + poids.
- Eq. du mot:  $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OC} \wedge m\vec{g}$

Montrons que  $\vec{L}_O \parallel \vec{OC}$ .



$$\left. \frac{d\vec{L}_O}{dt} \right|_R = \left. \frac{d\vec{L}_O}{dt} \right|_{R'} + \vec{\omega} \wedge \vec{L}_O \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \left. \frac{d\vec{L}_O}{dt} \right|_{R'} + \vec{\omega} \wedge \vec{L}_O = \vec{OC} \wedge m\vec{g}$$

2

$$\vec{L}_0|_{Re} = \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & I_1 & \\ & & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\varphi} \sin \theta \\ \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\Phi} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_0}{dt} \sim \vec{L}_0 \wedge \frac{m\vec{g}c}{L_0}$$

$$\bullet \vec{L}_0 \cdot \frac{d\vec{L}_0}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dL_0^2}{dt} = 0 \Rightarrow \|\vec{L}_0\| = \text{cte.}$$

$$\bullet \vec{e}_3 \cdot \frac{d\vec{L}_0}{dt} = 0 \Rightarrow L_{0z} \text{ cst.}$$

On peut alors écrire:  $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \left( \frac{-m\vec{g}c}{L_0} \right) \wedge \vec{L}_0$   
 $\omega_p$ , vitesse de précession.

$\vec{L}_0$  décrit un cône autour de  $\vec{e}_3$  à  $\omega_p$ .  
 L'axe de rotation pique  $\vec{e}_3$  précessionne autour  
 axe champ pesantier. rayon girad  
 $R_g: L = I\omega = mR^2\omega \Rightarrow \omega_p (\cancel{m})$

AN: boucle conique.

$$\omega_p \left\{ \frac{m\vec{g}c}{I_3 \dot{\Phi}} \right\}$$

$h = 5 \text{ cm}$   
 $R = 3 \text{ cm}$   
 $\omega = 30 \text{ tr/s}$

$$\left( \begin{array}{l} C = 3h/4 \\ I = \frac{3mR^2}{10} \end{array} \right)$$

$$\omega_p = \frac{g c}{R^2 \omega}$$

$$\omega_p = \frac{9,81 \times 3 \times 5/4 \cdot 10^{-2}}{\frac{3}{10} (3 \cdot 10^{-2})^2 \times 30 \times 2\pi} =$$

$$\omega_p \approx 1 \text{ tr/s.} \quad \checkmark$$

$R_g$   
 C - Comportement paradoxal

15'

pesantier déplace centre masse ds plan horizontal ---

3

II - Applications dans le domaine microscopique

13

A - Facteur gyromagnétique - matrice de Pauli

$$\vec{\mu} = \gamma \vec{L} + \gamma_s \vec{S}$$

Carne pas tout a fait terrestre.

$$\hat{S}_3 = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}_3 \quad \vec{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \dots$$

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$$

$$\vec{\mu} = \gamma \vec{S} \quad \text{moment cinétique}$$

$$e^-: \gamma_e \sim -\frac{e}{m_e}$$

$$AN: \rightarrow 1,8 \cdot 10^{11} \text{ rad/s/T}$$

$$\rightarrow 2,7 \cdot 10^8$$

$$\mu^+ : \gamma_p \sim 2,8 \frac{e}{m_p}$$

$$n: \gamma_n \sim -1,9 \frac{e}{m_p} \rightarrow 1,8 \cdot 10^8$$

B - Interaction d'un spin 1/2 avec un champ  $\vec{B}_0$  - Précession de Larmor -

$$\hat{H} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_0 \quad \vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_3$$

$$\hat{H} = -\gamma \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}_3 B_0$$

états propres:  $\begin{matrix} |+\rangle \text{ et } |-\rangle \text{ NRT propres} \\ \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \omega_0 \text{ et } -\sqrt{\frac{\hbar}{2}} \omega_0 \text{ où } \omega_0 = \gamma B_0 \end{matrix}$

$$AN: \omega_0 \approx 10^{11} \text{ rad/s pour } B=1T$$

$$\omega_0 = 53 \mu\text{m}$$

$$\omega_0 = \frac{v}{c} \sim 4 \cdot 10^{16} \text{ rad/s}$$

$$\frac{\omega_0}{2} \ll 1$$

→ Perturbes Larmor petite

On prend:  $|\psi(0)\rangle = \alpha |+\rangle + \beta |-\rangle$

Schröd Stat. donne  $|\psi(t)\rangle = \alpha e^{-i \frac{E_+ t}{\hbar}} |+\rangle + \beta e^{-i \frac{E_- t}{\hbar}} |-\rangle$

$$= \alpha e^{-i \frac{\omega_0 t}{2}} |+\rangle + \beta e^{+i \frac{\omega_0 t}{2}} |-\rangle$$

valeur moy. d'ensemble  $\langle \hat{\mu}_3(t) \rangle = \gamma \frac{\hbar}{2} \langle \hat{\sigma}_3 \rangle = \gamma \frac{\hbar}{2} \langle \psi | \hat{\sigma}_3 | \psi \rangle$

$$\text{et } \langle \psi | \hat{\sigma}_3 | \psi \rangle = (\alpha^* e^{i \frac{\omega_0 t}{2}} \langle + | + \beta^* e^{-i \frac{\omega_0 t}{2}} \langle - |) \hat{\sigma}_3 (|\alpha e^{-i \frac{\omega_0 t}{2}} |+\rangle + \beta e^{+i \frac{\omega_0 t}{2}} |-\rangle)$$

$$\langle + | \hat{\sigma}_3 | + \rangle = 1 \quad \text{le reste est nul}$$

$$\langle - | \hat{\sigma}_3 | - \rangle = -1$$

$$\Rightarrow |\alpha|^2 - |\beta|^2$$

$$\text{Donc } \langle \hat{\mu}_3(t) \rangle = \text{cste} = \gamma \frac{\hbar}{2} (|\alpha|^2 - |\beta|^2)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \langle \hat{\mu}_x(t) \rangle &= \gamma \hbar |\alpha \beta| \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ \langle \hat{\mu}_y(t) \rangle &= \gamma \hbar |\alpha \beta| \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned} \right\} \text{ On montre que}$$

④ ou la nécess<sup>o</sup> → **TRANSPARENT** 25'

C. application: la RMN.

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \hat{H} |\psi\rangle.$$

$$\begin{cases} \vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z \\ \vec{B}_1(t) = \begin{pmatrix} B_1 \cos(\omega t) \\ B_1 \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

On peut montrer dans ce cas, grâce à Schröd :

$$|\psi(\omega)\rangle = |+\rangle_z.$$

$$P(|-\rangle_z)(t) = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + (\omega - \omega_0)^2} \sin^2\left(\frac{\sqrt{\omega_1^2 + (\omega - \omega_0)^2} t}{2}\right)$$

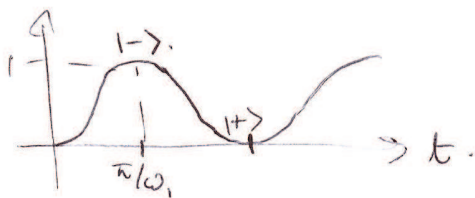
$$\omega_1 = -\gamma B_1 \quad \text{ici}$$

①

①  $|\omega - \omega_0| \gg \omega_1 \rightarrow P(t) \approx \frac{\omega_1^2}{(\omega - \omega_0)^2} \ll 1 \rightarrow$  spin reste  $|+\rangle_z$

$P(t) \xrightarrow{t}$

②  $\omega = \omega_0 \rightarrow P(t) = \sin^2\left(\frac{\omega_1 t}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\omega_1 t)).$



Le spin se retourne périodiquement à  $\omega_1$  lorsque  $\omega = \omega_0$ .

pulsat de Rabi

signal Rabi

**BUP.** 30'

• Comparaison vélo/moto. La  $q^{ic}$  par la pratique

• Baquins russes.

• angle de nutation → Perez.

• Treymann les astuces de M. FOMTAN

• Astélangul

5

III - Applications dans le domaine macroscopique

A - Le gyroscope

+ gyrocompas.

Solide de révolution, tourne à jde vitesse autour de son axe de rotat.

Référentiel galiléen = Copernic.

$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{0}$  si aucun moment  $\rightarrow$  axe de mont ain constant  $\rightarrow$  direct rotat  
pique aussi.

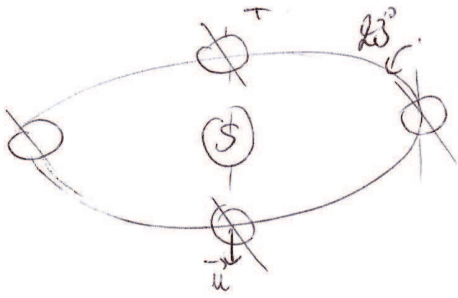
On de servir à déterminer latitude etc (rotat Berne en pros).

Par rapport à  $\Delta$  gyro fixe de  $\vec{\Omega}_R$  Berne =  $7,5 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

$\rightarrow \Delta$  semble avoir  $\Delta$  mot de précess° à  $-\vec{\Omega}$   
 $\vec{\omega}'_{SIR} = \vec{\omega}'_{ROR} = -\vec{\omega}'_{RIS} = -\vec{\Omega}$

gyrocompas  $\rightarrow$  latitude

B - Précession des équinoxes.



$\vec{T}_+$  (autres astres)  $\neq \vec{0}$  car Berne pas ppt  $\neq$  sphère.

$$\begin{cases} \vec{T}_+ = -A \sin(\theta_0) \vec{e}_n \\ A = \frac{3}{4} G (I_3 - I_1) \left[ \frac{R_3}{R_3^3} + \frac{R_L}{R_L^3} \right] \end{cases}$$

$2 \times \left( \frac{R_3}{R_3^3} \right)$

↑  
défaut de sym.

analyse locale avec gyro;  $\vec{T}_0 = \vec{CA} \cdot m\vec{g}' \Rightarrow \dot{\psi} = mg'l/L_0$   
 $= mgc \sin\theta \vec{e}_n$

$\Rightarrow \dot{\psi} = \frac{-A \sin\theta_0 \frac{\sin\theta_0}{\sin\theta_0} - A \sin\theta_0 \frac{\sin\theta_0}{\sin\theta_0}}{I_3 \Omega}$   $mgc \sin\theta \rightarrow \frac{mg'l}{L_0}$

$$= -\frac{3}{2} G \frac{I_3 - I_1}{I_3} \left( \frac{R_3}{R_3^3} + \frac{R_L}{R_L^3} \right) \frac{\cos\theta_0}{\Omega}$$

6

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{T_a^2}{a^3} &= \frac{4\pi^2}{GR_s} \quad (3^e \text{ loi Kepler}) \\ T_j &= \frac{2\pi}{\Omega} \end{aligned} \right.$$

$$\dot{\psi} = \frac{-3}{2} G \frac{I_3 - I_1}{I_3} 3 \frac{R_s}{a^3} \frac{\cos \theta_0}{2\pi/T_j}$$

$$= \frac{-3}{2} \frac{I_3 - I_1}{I_3} 3 \frac{4\pi^2}{T_a^2} \frac{T_j}{4\pi} \cos \theta_0$$

$$= -9\pi \left( \frac{I_3 - I_1}{I_3} \right) \frac{T_j}{T_a^2} \cos \theta_0 \cdot \frac{1}{300}$$

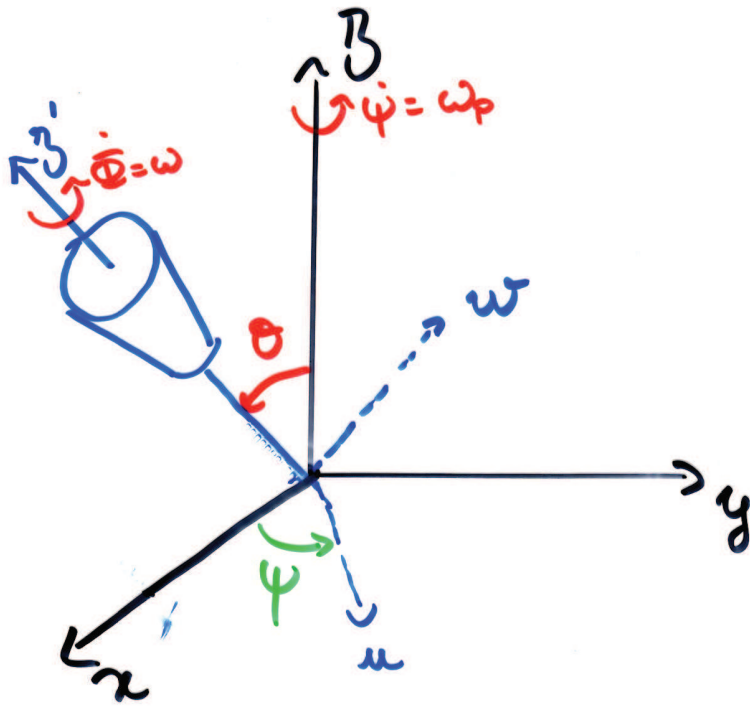
AN:  $T = \frac{2\pi}{\dot{\psi}} = 260 \text{ siècles.}$

→ pb avec les horoscopes.

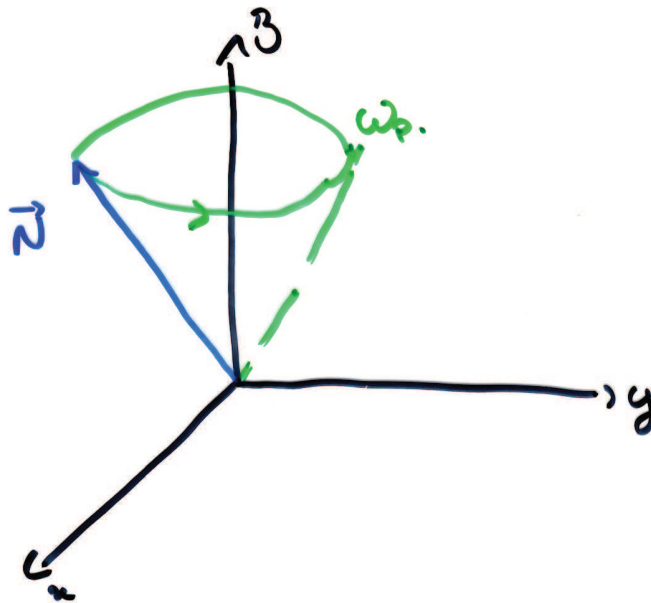
Conclues:

gyroscopie très utile  
effets pas forcément intuitifs + utilisé tt le  
tps (moteurs p. se penchent, stabilité à  
vélo...)

Parker ⊕ gyroscopie : équilibré / pas équilibré,  
etc.

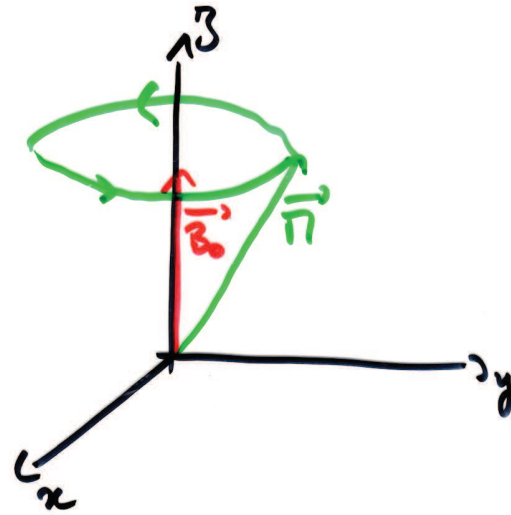


Rotations



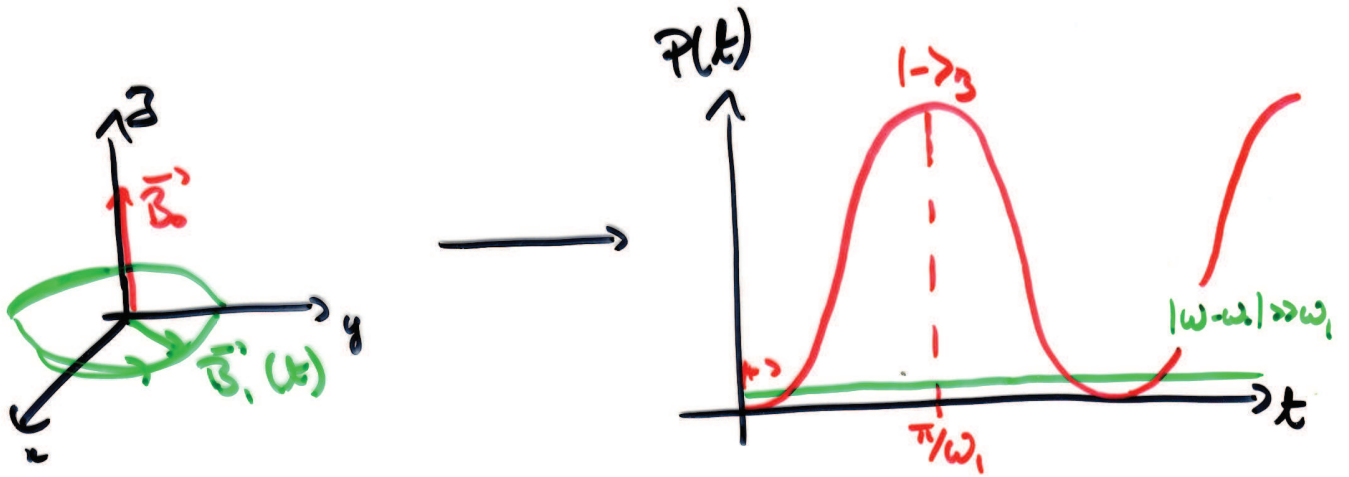
Mouvement de précession

③



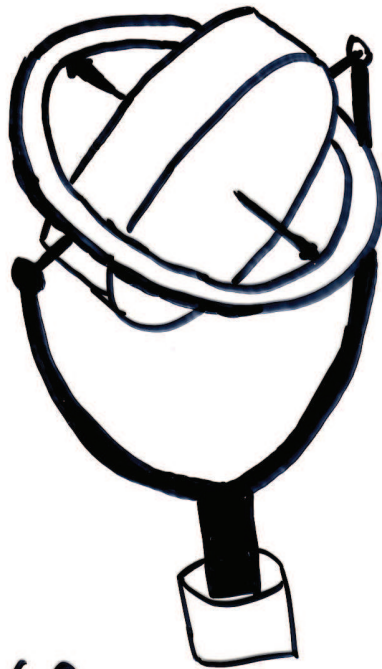
### Précession de Larmor

④



### Application à la RMN





Gyroscope