

Ecole Normale Supérieure de Cachan

Leçon de Physique - Prepa Agreg

Etudiants

Hugo Pfister

Thibault Michel

Approximation gyroscopique. Effets dans les domaines macroscopique
et microscopique.

Le 28 Octobre 2014

Table des matières

1	Introduction	1
2	Description d'un solide en rotation	1
2.1	Position du problème	1
2.2	Approximation gyroscopique	2
2.3	Conséquences sur le mouvement	3
3	Application aux mouvements macroscopiques	3
3.1	Gyroscope	3
3.2	Un axe fixe : applications	3
3.3	Un couple transmis par le gyroscope	4
4	Equivalent microscopique	4
4.1	Comportement du moment cinétique dans un champs magnétique fixe	4
4.2	Ajout d'un champs magnétique \vec{B}_1 tournant	4
5	Conclusion	4
6	Commentaires	5

1 Introduction

Avant de commencer sachez que la majorité des exemples et des calculs se trouvent dans le **Pérez** de Mécanique au chapitre sur le gyroscope

Introduction : Manip avec un toupie car on a tous déjà été confronté à une toupie :

→ si elle n'a pas de vitesse radiale elle tombe

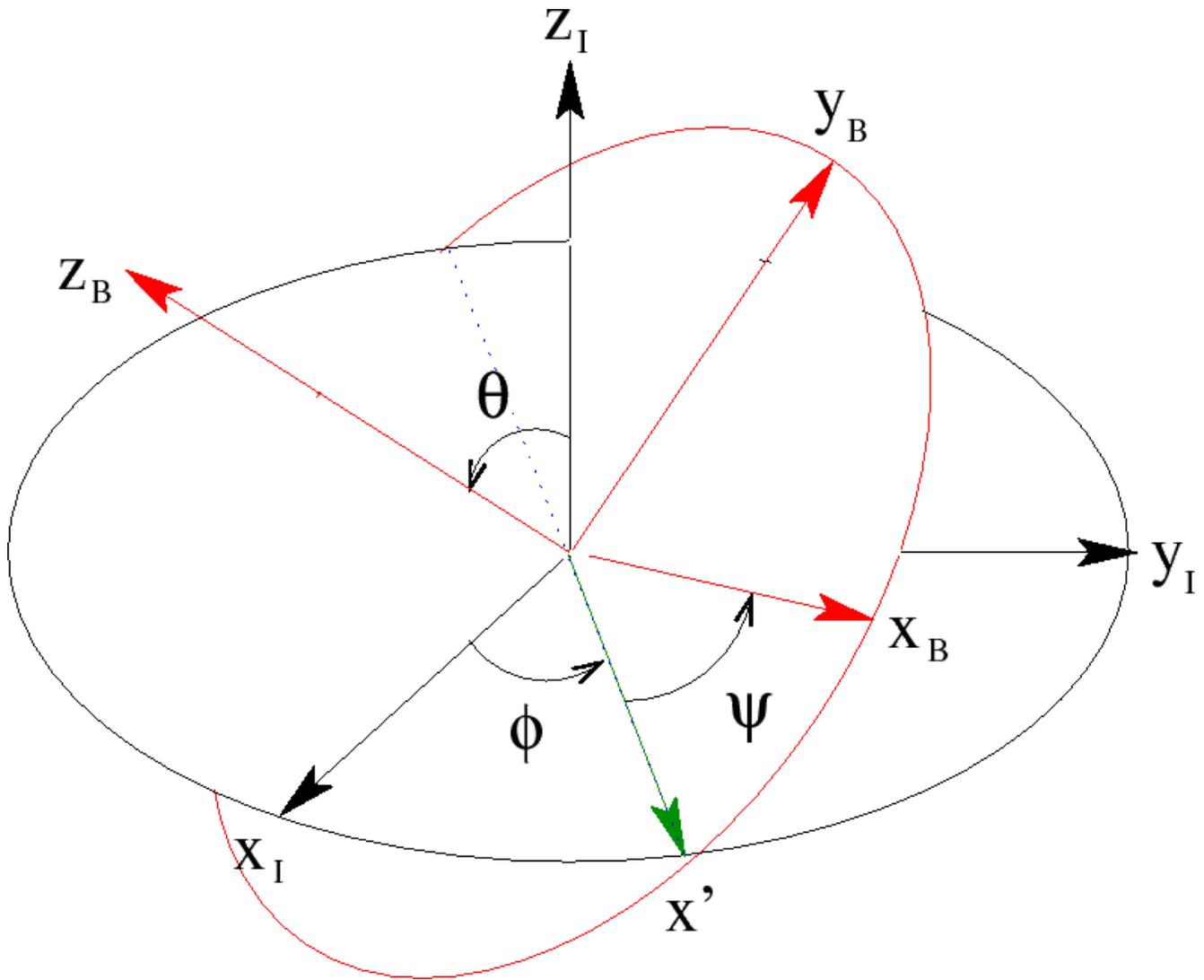
→ si elle en a une elle peut précesser

2 Description d'un solide en rotation

2.1 Position du problème

Introduction des angles d'Euler + schéma de la base de donnée, Bien montrer les angles à l'aide de la toupie et du gyroscope

- θ : Angle de nutation autour de u
- ψ : Angle de précession, rotation autour de e_z
- ϕ : Angle de rotation propre autour de e_z



Définition du Vecteur rotation du solide S : $\vec{\omega}$ dans la base propre du solide

Base de Résal : le solide peut tourner sur lui même la base restera fixe, ce n'est donc pas le référentiel du solide. Dans cette base la matrice d'inertie est diagonale.

Ecrire la matrice d'inertie en O. De plus comme notre solide à la symétrie de révolution on a $I_1=I_2$. Réécriture du vecteur rotation du solide dans la base de résal.

- Théorème du moment cinétique en O :

$$\vec{M}_O = \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{Resal} + \vec{\omega} \times \vec{L}_O \quad (1)$$

On a 3 équations différentielles couplées, c'est a priori difficile à résoudre sauf dans certains cas particuliers c'est pourquoi on va faire des approximations.

2.2 Approximation gyroscopique

On va faire les hypothèses suivantes :

- $|\dot{\phi}| \gg |\dot{\theta}|; |\dot{\psi}|$
- $I \sim I_z$

Les conséquences directes sont alors :

$$\begin{aligned} - \vec{\omega} &= \dot{\phi} \vec{e}_{z'} \\ - L_O &= I_z \dot{\phi} \vec{e}_z \end{aligned}$$

Ainsi ω est colinéaire à \vec{L}_O ce qui n'est a priori pas vrai ni évident.

2.3 Conséquences sur le mouvement

Nous allons traiter ici l'exemple de la toupie.

Appliquer le TMC en O puis en déduire l'équation de précession.

$$\left. \frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_R = \vec{OG} \times m \vec{g} \quad (2)$$

$$\left. \frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_R = \vec{L}_O \times \frac{m \vec{g} c}{L_O} \quad (3)$$

En scalérisant l'équation ci dessus avec $\vec{e}_{z'}$ ou \vec{L}_O on montre directement que :

$$\left. \frac{dL_O}{dt} \right)_R = 0 \Rightarrow L_O = cste \quad (4)$$

$$\left. \frac{dL_{Oz}}{dt} \right)_R = 0 \rightarrow L_{Oz} = cste \quad (5)$$

Ainsi l'angle de nutation est constant et la pulsation de la toupie est $\omega_p = \frac{mgc}{I_z \dot{\phi}}$.

Vérification de l'approximation avec $|\dot{\phi}| \gg \left(\frac{mgc}{I_z} \right) \sim 6t.s^{-1}$ si on considère la toupie comme un cylindre $R = 2cm, L = 3cm$. Cette hypothèse est facile à vérifier car une toupie tourne à environ 30t/s.

3 Application aux mouvements macroscopiques

3.1 Gyroscope

Un gyroscope est un appareil dont la rotation propre est très grande ($\dot{\phi}$ est compris entre 8000 et 20 000 tours par minutes). De plus ils tournent autour de leur centre de masse.

De cette dernière propriété on en déduit que $\left. \frac{d\vec{L}_C}{dt} \right)_\alpha \propto \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_\alpha = \vec{0}$. Ainsi le Gyroscope garde une direction fixe dans l'espace.

Manip avec le gyroscope : on le fait tourner et si on donne une pichenette il precesse, ce n'est pas le cas s'il n'a pas de rotation propre.

3.2 Un axe fixe : applications

Exemple du Gyrocompas qu'on peut trouver dans le Perez p. . L'intérêt est que le gyroscope tend à indiquer le nord ce qui permet, à l'aide d'un fil de plomb et de la connaissance de la verticale, et donc de la latitude. Ces gyroscopes sont apparus pour palier aux faiblesses de la boussoles dans les bateaux en fer avec de l'électronique embarquée.

Mais le gyroscope n'est pas qu'utilisé dans la navigation, on s'en sert encore aujourd'hui en aviation. On fait tourner le gyroscope avant le décollage ce qui permet, à l'aide d'un système embarqué de déterminer l'angle de roulis et grâce à un asservissement d'agir directement sur les ailes. Cela permet le pilotage automatique par exemple.

Enfin on se sert du gyroscope tous les jours : c'est ce qui permet au vélo de tenir ou au passeur d'envoyer le ballon de rugby.

3.3 Un couple transmis par le gyroscope

On écrit dans un référentiel galiléen le TMC :

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt})_R = \vec{M}_C \quad (6)$$

Puis dans le référentiel du gyroscope :

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt})_\Delta + \vec{\omega} \times \vec{L}_C = \vec{M}_C \quad (7)$$

On en déduit $\vec{M}_{gyro \rightarrow ext} = \vec{L}_C \times \vec{\omega}$

Application à l'aide du gyroscope anti-roulis : $\|\vec{M}\| = L_C \omega \sim \frac{MR^2}{2} \dot{\phi} \omega \sim 6.10^6 N.m$. Cette valeur de moment correspond à décaler le disque de 10 m par rapport au centre de masse du bateau.

4 Equivalent microscopique

On rappelle le rapport entre le moment cinétique et le moment magnétique via le facteur gyromagnétique.

4.1 Comportement du moment cinétique dans un champs magnétique fixe

Le couple appliqué à l'électron est donné par $\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}_0$. Puis en utilisant le TMC on obtient

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = -\gamma \vec{B}_0 \times \vec{\mu} \quad (8)$$

C'est la même équation que pour la toupie, ainsi les solutions mathématiques sont les mêmes et $\vec{\mu}$ précesse autour du champ magnétique. Pour un champs de 1T on a une precession à une fréquence de 50 Ghz, qui est très grand devant la vitesse de l'électron autour du noyau.

4.2 Ajout d'un champs magnétique \vec{B}_1 tournant

Si on se place dans le référentiel tournant (calculs faits dans le Pérez) on obtient :

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = (\vec{\omega}_0 - \vec{\omega} + \vec{\omega}_1) \times \vec{\mu} \quad (9)$$

Le mouvement est compliqué à décrire dans le référentiel galiléen (il est hélicoïdal) mais certains cas particuliers sont simples à étudier (si $\omega = \omega_0$).

Les applications sont nombreuses, si on connaît bien le milieu on peut faire de la RMN... (expliquer vaguement ce que c'est)

On peut aussi faire un magnétomètre car on a une mesure de B très précise.

5 Conclusion

On s'est placé à notre échelle mais la Terre est un gros gyroscope et ce fût une des prouesses de Newton d'expliquer la precession des équinoxes via sa théorie.

6 Commentaires

- Que pensez vous du temps entre micro et macro ? Il y a une partie générale et il y a plus d'applications macroscopiques que micro ce qui justifie la longueur des parties.
- Question sur les angles d'Euler, la base de Résal est-elle liée au solide ? Non, elle ne bouge pas avec la rotation propre du solide, en revanche elle tourne avec la precession et la nutation.
- Pouvez vous démontrer la formule du vecteur rotation dans la base de Résal ? Ben on projette, c'est technique mais pas évident quoi. Il est conseillé de garder le schéma projeté car on reparle toujours des angles et que le jour de l'Agreg c'est plus simple pour en parler.
- Le moment cinétique dépend-il de la base ? Non c'est qqc d'intrinsèque au solide.
- On précise toujours que le point d'application du TMC est fixe, pourquoi ? Car on ne peut pas appliquer le TMC facilement.
- Vous avez dit que la grosse équation est non linéaire ? Faut l'écrire mais oui elle est bien non linéaire. On pourrait la résoudre facilement à l'aide d'un ordinateur, il faut en parler. En tant qu'enseignant on peut dire que c'est ce que font les chercheurs, les ingénieurs (numérique).
- Truc tout bête mais il faut bien essayer le tableau..... !
- Bien de revenir sur les approximations entre theta et phi pour la toupie.
- Comment pourrait on remonter à la vitesse de la toupie ? Persistence rétinienne, stroboscope, longueur doigt - rayon toupie - vitesse de lancement.....
- Retour sur la définition du gyro : toutes les forces ont un moment nul ? On a des liaisons pivot bien huilés + il est tenu en son centre de masse.
- Que penser vous de la mesure de position aujourd'hui ? Avec un GPS, d'ailleurs il y a des gyro dans les satellites GPS. En fait les sous marins ont des gyros car ils ne veulent pas être dépendants des USA. Aujourd'hui on appelle tout gyroscope mais il faut bien faire la différence entre les gyros d'aujourd'hui et ceux d'hier....
- Le Gyro anti roulis est-il encore utilisé aujourd'hui ? Non, c'est des systèmes asservis. Il vaudrait mieux parler de la façon de tourner en moto.
- Partie consacrée au micro est trop courte, résumer la partie applications macroscopiques mais on ne peut pas passer si peu de temps sur le micro. Typiquement, expliquer le rapport entre le moment cinétique et le moment magnétique. Le terme dipôle magnétique doit apparaître. Il est remarquable que le rapport gyromagnétique puisse s'étendre à tout type d'objet chargé.
- Quelle est la différence entre un moment et un couple ? Un couple n'a pas forcément de force résultante. Un moment en revanche est du à une force.
- PUTAIN M*** J'TAVAIS DIT DE PAS PARLER DU THEOREME D'EHRENFEST. NE PARLEZ PAS DE CE QUE VOUS NE MAITRISEZ PAS. Dire que le classique c'est des moyennes de la mécanique quantique.
- Comment faire un champs de 1T ? Avec des électroaimants. Qu'est ce qui limite le champs ? Il faut, après il faut utiliser des supraconducteurs.
- Comment mesurer la vitesse d'un électron ? Modèle de Bohr semi-classique.
- Pourquoi on a introduit un champs B_1 tournant ? Pour pouvoir se placer à résonance et faire de la RMN.
- Mise en équation trop rapide sur l'introduction du champs tournant. Il faut trouver du temps quelque part.
- Dire que tout ce qui se passe microscopiquement c'est une analogie formelle. Elle ne se retrouve que dans les équations.