

Les corps tournants ont des propriétés remarquables et étonnantes : prenez une toupie, pourquoi ne tombe-t-elle pas quand elle tourne ?

# 1 Mouvement d'un solide en rotation autour d'un point fixe

## 1.1 Position du problème

### 1.1.1 Repérage

Description de la trajectoire d'un solide dans l'espace : 6 degrés de libertés donc 6 paramètres : les 3 coordonnées  $(x, y, z)$  du centre de masse  $G$  dans le référentiel d'étude (noté  $\mathcal{R}$ ) et les 3 angles d'orientation du repère mobile associé au solide  $\mathcal{S}$   $((x', y', z')$  noté  $\mathcal{R}'$ ) par rapport au référentiel d'étude :  $\psi, \theta, \phi$  appelé *angles d'Euler* (fig.1 et transparent 1). Dans la suite de l'étude, on va étudier le mouvement du solide autour d'un point fixe  $O$  donc on ne s'intéressera qu'aux angles d'Euler.

On suppose  $\mathcal{R}$  le référentiel terrestre galiléen et  $\mathcal{R}'$  le référentiel mobile associé à  $\mathcal{S}$  qui est de révolution autour de  $\vec{e}_{z'}$ .

- $\psi$  : angle de précession (rotation autour de  $\vec{e}_z$ )
- $\theta$  : angle de nutation (rotation autour de  $\vec{e}_u$ )
- $\phi$  : angle de rotation propre (rotation autour de  $\vec{e}_{z'}$ )

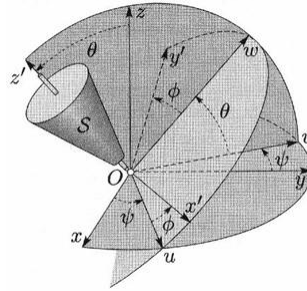


FIGURE 1 – Angles d'Euler

Le vecteur rotation de  $\mathcal{S}$  par rapport à  $\mathcal{R}$  s'écrit alors :  $\omega = \dot{\psi}\vec{e}_z + \dot{\theta}\vec{e}_u + \dot{\phi}\vec{e}_{z'}$

### 1.1.2 Base de Résal

La matrice d'inertie de  $\mathcal{S}$  s'écrit dans  $\mathcal{R}$  :

$$[I]_{O/R} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Et le vecteur rotation de  $\mathcal{S}$  par rapport à  $\mathcal{R}$  est de la forme :

$$\omega_R = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos(\psi) + \dot{\phi} \sin(\psi) \sin(\theta) \\ \dot{\theta} \sin(\psi) - \dot{\phi} \cos(\psi) \sin(\theta) \\ \dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

On peut simplifier ces expressions en se plaçant dans la *base de Résal*  $\mathcal{R}_1$   $(\vec{e}_u, \vec{e}_w, \vec{e}_{z'})$  : l'axe  $(Oz')$  correspond à l'axe de rotation du solide. La matrice d'inertie est donc diagonale et l'expression de  $\omega$  simplifiée :

$$[I]_{O/Re} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

$$\omega_{Re} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin(\theta) \\ \dot{\psi} \cos(\theta) + \dot{\phi} \end{pmatrix}$$

Remarques :

- le solide étant de révolution autour de  $(Oz')$  :  $I_1 = I_2$
- la base de Resal n'est pas liée au solide comme  $\mathcal{R}'$  mais seulement à son axe de rotation.

A priori, le moment cinétique  $L_{O/R} = [I]_{O/R} \omega_R$  n'est pas colinéaire à  $\omega_R$  et on a un système de 3 équations couplées : l'équation du mouvement ne sera pas facile à résoudre. D'où l'utilité de l'approximation gyroscopique.

## 1.2 L'approximation gyroscopique

**L'approximation gyroscopique** nécessite dans ces trois hypothèses :

- le solide est de révolution autour de l'axe de rotation de sorte que le point fixe  $O$  soit sur cet axe
- $I_1 \sim I_3$
- $|\dot{\phi}| \gg |\dot{\psi}|, |\dot{\theta}|$

Ainsi :  $\vec{\omega} \sim \vec{u}_{z'}$  et  $\vec{L}_{O/Re} \sim I_3 \dot{\phi} \vec{u}_{z'}$ , ces vecteurs sont colinéaires.

**Équation du mouvement :** TMC appliqué à  $\mathcal{S}$  au point fixe  $O$

$$\left( \frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_R = \vec{OG} \wedge m \vec{g}$$

or  $\vec{OG} = l \frac{\vec{L}_O}{L_O}$  grâce à l'approximation gyroscopique d'où :

$$\left( \frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_R = \vec{L}_O \wedge \frac{m \vec{g} l}{L_O}$$

**Précession :** Si on projette l'équation sur  $\vec{L}_O$ , on trouve  $\|\vec{L}_O\| = cste$  (conservation de la norme).

Si on projette l'équation sur  $\vec{e}_z$ , on trouve  $L_{Oz} = cste$  (conservation de la composante suivant  $z$ ).

**Conclusion : L'axe de rotation propre  $(Oz')$  précède autour de la direction du champ de pesanteur.**

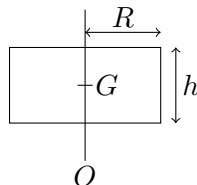
La toupie ne tombe donc pas quand elle tourne !

Cela met en évidence le comportement paradoxal d'un objet dans l'approximation gyroscopique : sa rotation l'empêche de tomber : au lieu d'avoir un mouvement vertical (la chute), elle a un mouvement horizontal (la précession).

**Exemple :** validité de l'approximation gyroscopique sur la toupie (transparent 2) :

On modélise la toupie de l'ENS par une toupie cylindrique :

$O$  est le point fixe et  $G$  le centre de masse de la toupie tel que  $OG = 1/2 h$ .



On utilise le TMC :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{L}_O \wedge \frac{m\vec{g}}{\vec{L}_O} = \vec{\psi} \wedge \vec{L}_O$$

avec  $\vec{\psi}$  la pulsation radiale de précession.

Or  $L_O = I_3 \dot{\phi}$  et  $I_3 = 1/2 m R^2$ .

On en déduit :

$$\dot{\psi} = \frac{gh}{R^2 \dot{\phi}}$$

$\dot{\phi} \sim 30$  tours/s.

donc  $\dot{\psi} \sim 4$  rad/s  $\sim 0.6$  tour/s  $\ll 30$  tours/s : validation de l'approximation gyroscopique pour la toupie.

## 2 Effets macroscopiques

### 2.1 Précession des équinoxes

La précession des équinoxes est le lent changement de direction de l'axe de rotation de la Terre. En effet, la Terre n'est pas une sphère parfaite : son centre de rotation  $O$  et son centre de masse  $G$  ne sont pas confondus. Le moment en  $O$  des interactions gravitationnelles des astres (essentiellement le Soleil et la Lune) appliquées en  $G$  est non nul. Cela implique une précession de l'axe de rotation de la Terre autour de la normale au plan de l'écliptique passant par  $O$ . Donc d'une année à l'autre, la position du Soleil dans le ciel le jour de l'équinoxe (de printemps ou d'automne) diffère. Tentons la résolution (et cf transparent 3) :

Le moment des interactions gravitationnelles du Soleil et de la Lune sur la Terre appliqué en son centre de masse  $T$  est :

$$\vec{M}_T = -A \sin(2\theta) \vec{e}_u \text{ avec } A = \frac{3}{4} G (I_3 - I_1) \left( \frac{M_S}{r_S^3} + \frac{M_L}{r_L^3} \right)$$

Par analogie avec le cas de la toupie dans l'approximation gyroscopique, on a :

$$\dot{\psi} = \frac{-A \sin(2\theta)/\sin(\theta)}{I_3 \dot{\phi}} = -3/2 G \frac{I_3 - I_1}{I_3} \left( \frac{M_S}{r_S^3} + \frac{M_L}{r_L^3} \right) \frac{\cos(\theta)}{\dot{\phi}}$$

Or  $\frac{M_L}{r_L^3} = 2,17 \frac{M_S}{r_S^3}$

Et on simplifie le calcul grâce à la 3e loi de Kepler :  $\frac{T_a^2}{r_S^3} = 4\pi^2/(GM_S)$  et  $\dot{\phi} = 2\pi/T_j$  avec  $T_a$  et  $T_j$  respectivement les périodes annuelle et journalière.

Ainsi :

$$\dot{\psi} = -3/2 G \frac{I_3 - I_1}{I_3} \frac{M_S}{r_S^3} 3,17 \frac{\cos(\theta)}{2\pi/T_j} = -3\pi 3,17 \frac{I_3 - I_1}{I_3} \frac{T_j}{T_a^2} \cos(\theta)$$

On en déduit que :  $\dot{\psi} = -7.76 \times 10^{-12}$  rad/s,  $\dot{\theta} \sim 0$  et  $\dot{\phi} = 7 \times 10^{-5}$  rad/s.

Remarque : bien qu'on travaille dans le référentiel géocentrique, l'équation du mouvement est la même qu'en référentiel galiléen car les moments des forces d'inertie et de Coriolis sont nuls.

### 2.2 gyroscope

Le gyroscope est un solide de *révolution* tournant autour de son axe à *très grande vitesse* (8000 à 20000 tours/min) et suspendu par son centre de masse  $G$  de façon parfaite (pas de frottement) :  $G$  et  $O$  sont confondus : le moment du poids en  $O$  est alors *nul*.

On a donc **conservation du moment cinétique** :  $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0}$

**Couple gyromagnétique :** C'est le moment qu'exerce le gyroscope sur son support lorsqu'on contraint son axe de rotation ( $\Delta$ ) à changer de direction.

Equation du mouvement :  $\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_{G,ext/gyro}$

Le gyroscope exerce un couple résistant  $\vec{M}_{G,gyro/ext} = -\vec{M}_{G,ext/gyro}$

Or :

$$\left(\frac{d\vec{L}_G}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{L}_G}{dt}\right)_\Delta + \vec{\omega}_{\Delta/R} \wedge \vec{L}_G = \vec{\omega}_{\Delta/R} \wedge \vec{L}_G$$

avec  $\left(\frac{d\vec{L}_G}{dt}\right)_\Delta = \vec{0}$  ( $\frac{d\vec{L}_G}{dt} \sim \vec{e}_u$ ).

Donc

$$\vec{\omega}_{\Delta/R} \wedge \vec{L}_G = \vec{M}_{G,ext/gyro}$$

Ainsi, un gyroscope soumis à un changement d'orientation exerce sur le milieu extérieur un couple gyroscopique *perpendiculaire* à son moment cinétique.

*Expérience avec le gyroscope : le lancer (pas trop fort) selon une direction inclinée par rapport à la verticale, constater que le bâti ne bouge pas puis forcer l'inclinaison du gyroscope pendant qu'il tourne, constater la rotation du bâti.*

### 3 Effets microscopiques

#### 3.1 Moment cinétique et moment magnétique

On considère un petit barreau aimanté caractérisé par un moment magnétique  $\vec{m}$  porté par sa direction principale.

On montre que  $\vec{m}$  est proportionnel à au moment cinétique du dipôle  $\vec{L}_G$ .

**Démonstration dans le cas du modèle de Bohr :** On considère un atome d'hydrogène. La charge électronique  $-e$  tournant autour d'un proton est assimilable à une spire parcourue par un courant.

Le moment magnétique de cette spire vaut :

$$\vec{m} = i \vec{S} = \frac{-e}{T} \pi r^2 \vec{n} = -\frac{evr}{2} \vec{n}$$

et son moment cinétique :  $\vec{L}_G = \vec{r} \wedge m \vec{v} = m v r \vec{n}$

D'où

$$\vec{m} = \gamma \vec{L}_G \quad \text{avec } \gamma = \frac{-e}{2m}$$

$\gamma$  est appelé *rapport gyromagnétique*.

#### 3.2 Précession de Larmor

On considère un système de moment cinétique  $\vec{L}$  possédant un moment magnétique  $\vec{m} = \gamma \vec{L}$ , plongé dans un champ magnétique statique  $\vec{B}_0$ .

$\vec{B}_0$  exerce sur le système un couple  $\vec{m} \wedge \vec{B}_0$  (transparent 4).

On peut écrire le TMC :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{m} \wedge \vec{B}_0$$

ie  $\frac{d\vec{m}(t)}{dt} = \gamma \vec{m}(t) \wedge \vec{B}_0$

En projetant  $\vec{m}(t)$  ou sur  $\vec{B}_0$ , on a la conservation de la norme de  $\vec{m}$  ou de l'angle entre  $\vec{m}$  et  $\vec{B}_0$ .

Il suffit alors de projeter l'équation du TMC sur un plan perpendiculaire à  $\vec{B}_0$  pour voir que le moment magnétique tourne autour de  $\vec{B}_0$  avec la vitesse angulaire  $\omega_{\text{larmor}} = -\gamma B_0$  : c'est la précession de Larmor.

### Validité de l'approximation gyroscopique dans le modèle de Bohr :

$$B_0 \sim 1 \text{ T}$$

$$m_e \sim 10^{-30} \text{ kg}$$

$$e \sim 2 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Donc la précession de Larmor :  $\omega_{\text{larmor}} \sim 10^{11}$

Calcul de la pulsation propre :

$L_O = mrv = n\hbar$  (quantification du moment cinétique , n=1) avec  $r = a_0 = 53 \text{ pm}$ , le rayon de Bohr.

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

$$\dot{\phi} = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{r} = 3.5 \cdot 10^{16} \text{ rad/s} \ll \omega_{\text{larmor}}.$$

L'approximation gyroscopique de l'électron dans le modèle de Bohr est vérifié.

### 3.3 Résonance magnétique

On reprend le système précédent et on lui ajoute un champ magnétique  $\vec{B}_1$  perpendiculaire à  $\vec{B}_0$  et tournant à la vitesse angulaire  $\omega$ .  $\vec{m}(t)$  est alors plongé dans un champ  $\vec{B}(t) = \vec{B}_0 + \vec{B}_1(t)$  (cf transparent 5).

L'équation du mouvement révèle une résonance si  $\omega = \omega_0$ . En cas de résonance,  $\vec{m}(t)$  précesse autour de  $\vec{B}_1$ .

## 4 Conclusion

Les solides tournants ont des propriétés remarquables, aux applications diverses mais toujours utiles. On peut d'ailleurs creuser davantage la résonance magnétique qui a donné lieu à la résonance magnétique nucléaire permettant d'analyser l'environnement de l'objet étudié et permet ainsi de remonter par exemple à la composition d'une molécule organique ou bien de sonder le corps humain par IRM.

## A propos des choix de référentiel

En début de leçon, on a parlé de la base de Résal comme une base où les grandeurs clés (matrice d'inertie, vecteur rotation) étaient considérablement simplifiées et par la suite, on s'est remis dans le référentiel d'étude  $\mathcal{R}$  en gardant ces simplifications. Ce n'est pas trivial. Il faut regarder la formule de changement de base entre celle de Résal et celle du laboratoire :

$$\frac{\vec{L}_0}{dt}_R = \frac{\vec{L}_0}{dt}_{Re} + \overrightarrow{\omega_{Re/R}} \wedge \vec{L}_O$$

Or si on regarde la 3e composante (celle de l'axe de rotation du solide et la seule qui nous intéresse), le produit vectoriel est nul dans cette direction.

De plus, si on applique le TMC dans la base de Résal en reprenant le cas de la toupie uniquement soumise à son poids, il vient que l'équation sur la 3e composante est une dérivée nulle donc la quantité dérivée est constante : c'est la conservation du moment cinétique sur l'axe de rotation du solide. Et on propage cette constante jusqu'au référentiel du laboratoire grâce à la formule de changement de base ci-dessus (tous les calculs sont dans le Perez page 383).

## Commentaires

- La leçon présentée ici est longue : il serait bon de ne pas détailler le calcul de la précession des équinoxes mais plutôt de montrer que l'hypothèse gyroscopique est vérifiée. Un plan possible s'appuie sur deux axes : tout d'abord la propriété du gyroscope à garder (à peu près) l'orientation de son axe, illustré par les dispositifs anti-roulis des bateaux et la précession des équinoxes ; puis le couple gyroscopique avec un effet orthogonal à la modification du moment cinétique, que l'on peut illustrer avec le gyroscope sur la table et l'exemple d'une moto.
- En partant de la base de Résal, on peut directement dire qu'un mouvement écrit sous la forme  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{L}$  est un mouvement de précession et ne pas faire ses projections.
- Pour le calcul de la toupie, la modélisation par un cône n'est pas la plus pertinente. Vu la forme que l'on a, on utiliserait plutôt un cylindre.
- Pour le calcul de la précession de équinoxes, l'approche historique est importante pour montrer le travail du physicien, qui s'inscrit dans un temps long. Le but est de montrer un phénomène de précession naturel macroscopique. Rester sur des ODG pour gagner du temps et ne pas perdre l'auditoire. La Terre n'est pas une sphère parfaite dans ce cas à cause de sa répartition de masse inhomogène due à sa formation par accrétion.
- Passer plus de temps sur le couple gyroscopique. Insister sur la réciprocité des moments qui nous conduit à nous intéresser au moment qu'exerce le gyroscope sur l'extérieur et non l'inverse. Des gyroscopes sont maintenant présents dans les smartphones pour capter les mouvements (par des capteurs piezo), présents aussi dans l'aéronautique (avions, missiles). Ils ont disparus des bateaux car ils nécessitaient une masse trop lourde.
- L'approche classique du modèle de Bohr dans le cas de plusieurs électrons si on prend leur moment cinétique moyen et non leur moment individuel. Le passage entre classique et quantique est fait par le théorème d'Erhenfest.
- A propos des gyroscopes électroniques : ce sont gyroscopes de type vibrant constitués de pièces piézoélectriques qui captent la variation angulaire grâce à la force de Coriolis. Ce ne sont plus à proprement parler des gyroscopes mais des gyromètres. Quelques liens : [http://www.tout-sur-le-gyropode.com/IMG/pdf/TIPE\\_s.pdf](http://www.tout-sur-le-gyropode.com/IMG/pdf/TIPE_s.pdf)  
<http://www.tomshardware.fr/articles/MEMS,2-811-14.html>

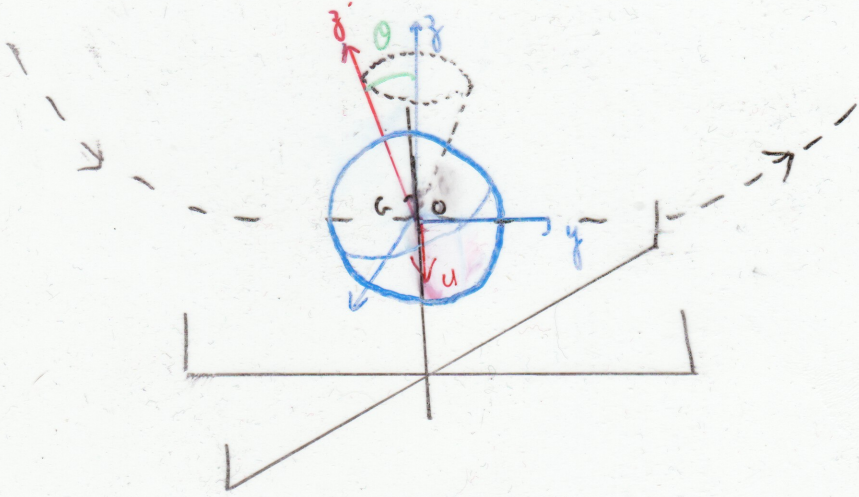
## Bibliographie

- *Mécanique, fondements et applications*, Perez
- *Physique théorique : Mécanique*, Landau
- *Mécanique quantique I*, Cohen-Tannoudji
- *Les astuces de Feynman*, Feynman (suggestion)
- *La Physique par la pratique*, Portelli (suggestion)
- 2 BUP (479 et 587) sur la stabilisation des missiles par effet gyroscopique (suggestion)

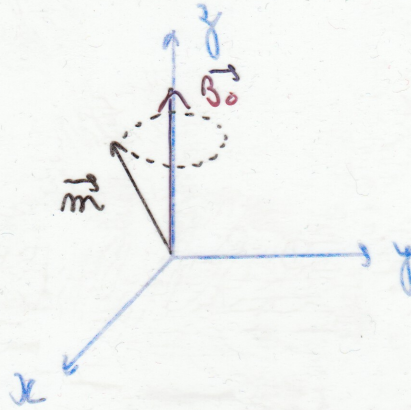




(3)



(4)



(5)

