

# LP02 - Caractère non galiléen du référentiel terrestre

Mardi 17 Septembre 2013

**Binôme :** *Clément Beaufile*, Celindano Christophe

**Correcteur :** Mélanie Lebental

**Remarque :** Lorsqu'un transparent est utilisé lors d'un passage du cours, nous le précisons et le référons en rouge. Ils sont affichés à la fin de ce fichier.

## Bibliographie :

- Mécanique, *fondements et applications*, J-P. Perez
- Mécanique, *PCSI*, Les nouveaux précis (BREAL), C. Clerc et P.Clerc.
- Tec & Doc, *Physique PCSI*, P. Grécias et J-P. Migeon.

## Prérequis :

- Bases de mécanique classique (CP, L1)
- Composition des accélérations (CP, L1)

Transparent 1

## Plan du cours

<b>1</b>	<b>Référentiel galiléen et non galiléen</b>	<b>2</b>
1.1	Définition . . . . .	2
1.2	Référentiels de 'référence' . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Equation du mouvement en référentiel non galiléen</b>	<b>2</b>
2.1	Composition des accélérations, $a_{ie}$ et $a_{ic}$ . . . . .	2
2.2	Equation du mouvement en référentiel non galiléen . . . . .	3
2.3	Théorèmes énergétiques en référentiel non galiléen . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Le référentiel terrestre, un référentiel non galiléen</b>	<b>4</b>
3.1	Ordres de grandeurs . . . . .	4
3.1.1	$\vec{F}_{ie}$ . . . . .	4
3.1.2	$\vec{F}_{ic}$ . . . . .	5
3.2	Effet du caractère non galiléen du référentiel terrestre sur une chute libre . . . . .	5

# 1 Référentiel galiléen et non galiléen

## 1.1 Définition

Un référentiel est galiléen si le principe d'inertie s'applique dans ce référentiel.

On rappelle le principe d'inertie (1ère loi de Newton) :

Par rapport à tout référentiel privilégié  $R$ , qualifié de galiléen, tout point matériel  $M$ , soumis à une force résultante nulle, est soit en translation rectiligne uniforme (TRU), soit est au repos.

**Conséquence** (2ème loi de Newton) :

Pour ce point  $M$  :  $\Sigma \vec{F}_{\rightarrow M} = 0$

**Remarques :**

- Tout référentiel en TRU par rapport à un référentiel galiléen est galiléen,
- le référentiel de Copernic ( $R_C$ ) est postulé galiléen.

## 1.2 Référentiels de 'référence'

Transparent 2

Référentiel	Centre	Axes	Caractère galiléen
Copernic $R_C$	cdm du système solaire	3 étoiles lointaines supposés fixes	postulé
de Kepler $R_K$	cdm du soleil	les mêmes que pour $R_C$	dépend
Géocentrique $R_G$	cdm de la terre	les mêmes que pour $R_C$	dépend
Terrestre $R_T$	cdm de la terre	3 axes liés au globe terrestre (choix arbitraire), ici $e_z$ suivant la verticale, $e_x$ vers le sud et $e_y$ vers l'est.	dépend

# 2 Equation du mouvement en référentiel non galiléen

## 2.1 Composition des accélérations, $a_{ie}$ et $a_{ic}$

Transparent 3

Pour un référentiel quelconque  $R'\{O', Ox', Oy', Oz'\}$  en mouvement par rapport à un référentiel  $R\{O, Ox, Oy, Oz\}$  supposé galiléen, on démontre via la formule de Varignon que :

$$\vec{a}(M)_R = \vec{a}(M)_{/R'} + \vec{a}_{ie}(M) + \vec{a}_{ic}(M)$$

Dans le cas où le mouvement est une rotation pure, par exemple  $R_T$  par rapport à  $R_G$ ,  $\vec{a}_{ie}(M)$  et  $\vec{a}_{ic}(M)$  s'expriment :

$$\begin{cases} \vec{a}_{ie}(M) = & -\vec{\Omega}_{R'/R}^2 H \vec{M} \\ \vec{a}_{ic}(M) = & 2 \times \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}(M)_{/R'} \end{cases}$$

où  $\vec{\Omega}_{R'/R}$  représente le vecteur rotation de  $R'/R$  et  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe de rotation  $Oz$ .

## 2.2 Equation du mouvement en référentiel non galiléen

$$\text{Soit } \begin{cases} R\{O, Ox, Oy, Oz\} \\ R'\{O', Ox', Oy', Oz'\} \end{cases}$$

tel que  $R$  est galiléen et  $R'$  est non galiléen.  $M$  est en mouvement par rapport à  $R$  et  $R'$  et soumis à la  $\Sigma \vec{F}_{\rightarrow M}$ . D'après la seconde loi de Newton :

$$m \vec{a}(M)_R = \Sigma \vec{F}_{\rightarrow M},$$

on a d'après la composition des accélérations :

$$m \vec{a}(M)_{/R'} + m \vec{a}_{ie}(M) + m \vec{a}_{ic}(M) = \Sigma \vec{F}_{\rightarrow M}$$

Soit :

$$m \vec{a}(M)_{/R'} = \Sigma \vec{F}_{\rightarrow M} - m \vec{a}_{ie}(M) - m \vec{a}_{ic}(M)$$

où l'on pose  $\vec{F}_{ie} = -m \vec{a}_{ie}(M)$ , la force d'inertie d'entraînement et  $\vec{F}_{ic} = -m \vec{a}_{ic}(M)$ , la force d'inertie de Coriolis. En utilisant ces pseudo-forces, on réécrit le principe fondamental de la dynamique dans un référentiel quelconque (ici non galiléen) sous la forme :

$$m \vec{a}(M)_{/R'} = \Sigma \vec{F}_{\rightarrow M} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} \tag{1}$$

## 2.3 Théorèmes énergétiques en référentiel non galiléen

Dans un référentiel non galiléen, il suffit d'ajouter les contributions des forces d'inerties, c'est à dire pour la puissance on ajoute :

$$\begin{cases} P_{ie}(M) = & \vec{F}_{ie} \cdot \vec{v}(M)_{/R'} \\ P_{ic}(M) = & \vec{F}_{ic} \cdot \vec{v}(M)_{/R'} \end{cases}$$

**Remarque** : la force d'inertie de Coriolis est une force qui ne travaille pas car  $\vec{F}_{ic} \cdot \vec{v}(M)_{/R'} = -2m \times \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}(M)_{/R'} = 0$  (le produit vectoriel étant  $\perp$  à  $\vec{v}(M)_{/R'}$ ).

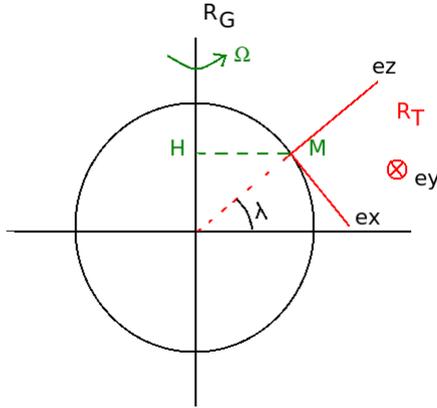
De même pour le théorème du moment cinétique, on obtient les mêmes équations, en ajoutant  $\vec{F}_{ie}$  et  $\vec{F}_{ic}$ .

### 3 Le référentiel terrestre, un référentiel non galiléen

**Hypothèse :**  $R_G$  est supposé galiléen (pour une durée courte et des vitesses faibles, pour éviter la rotation). Dans ce cas  $R_G$  est dit en translation circulaire par rapport au référentiel de Copernic  $R_C$  ( $e \approx 0.01$ ).

#### 3.1 Ordres de grandeurs

##### 3.1.1 $\vec{F}_{ie}$



$$\|\vec{\Omega}_{R_T/R_G}\| = \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 7.3^{-3} \text{ rad/s}$$

$$\begin{cases} \vec{F}_{ie}(M) = & m\vec{\Omega}_{R_T/R_G}^2 H\vec{M} \\ \vec{F}_{ic}(M) = & -2m \times \vec{\Omega}_{R_T/R_G} \wedge \vec{v}(M)_{/R_T} \end{cases}$$

Imaginons un fil pesant (ou de manière analogue un ressort) de tension  $\vec{T}$ , si l'on écrit la loi fondamentale de la dynamique dans  $R_T$  :

$$m\vec{a}(M)_{/R_T} = m\vec{g} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} \quad (2)$$

A l'équilibre  $\vec{F}_{ic} = \vec{0}$  car  $\vec{v}(M)_{/R_T} = \vec{0}$  et  $\vec{T} = -\vec{P}$  avec  $\vec{P}$  le poids et  $\vec{g}$  l'accélération gravitationnelle. Donc d'après l'équation (2) :

#### Transparent 4

$$\vec{P} = m\vec{g} + \vec{F}_{ie} = m \times (\vec{g} - \vec{a}_{ie}) = m\vec{g}_{apparent}$$

avec  $\vec{g}_{apparent} = -g\vec{e}_z + \vec{\Omega}_{R_T/R_G}^2 H\vec{M}$  et graphiquement on voit que  $H\vec{M} = RT \cos(\lambda) [\cos(\lambda)\vec{e}_z + \sin(\lambda)\vec{e}_x]$ .

On en déduit :  $\vec{g}_{apparent} = \Omega_{R_T/R_G}^2 RT \cos(\lambda) \sin(\lambda) \vec{e}_x + [-g + \Omega_{R_T/R_G}^2 RT \cos^2(\lambda)] \vec{e}_z$ . Si on suppose l'angle  $\Theta^1$  petit :

---

1. L'angle entre la verticale et  $\vec{g}_{apparent}$ , voir transparent 4.

$$\tan(\Theta) \approx \Theta \approx \frac{\Omega_{R_T/R_G}^2 RT \cos(\lambda) \sin(\lambda)}{-\frac{GM_T}{RT^2} + \Omega_{R_T/R_G}^2 RT \cos^2(\lambda)} \leq \frac{\Omega_{R_T/R_G}^2 RT \times 0.5}{-\frac{GM_T}{RT^2} + \Omega_{R_T/R_G}^2 RT \times 1} \approx 1.7 \times 10^{-3} \text{ rad} = 0.1 \text{ deg} = 6'$$

### Remarques

- On voit donc pour le champ de pesanteur terrestre qu'il y a présence de deux composantes, suivant la verticale et  $\vec{e}_x$ . Ainsi  $\vec{g}_{\text{apparent}} = \vec{g}_{\text{reel}}$  dépend de la latitude  $\lambda$ .
- Un fil de plomb n'indique donc presque jamais le centre de la terre (sauf à l'équateur, où  $\lambda = 0$ ).
- De la même façon on comprend que le lancement de fusées se fasse de préférence à l'équateur (où  $\vec{g}_{\text{apparent}} \cdot \vec{e}_z$  est minimale).

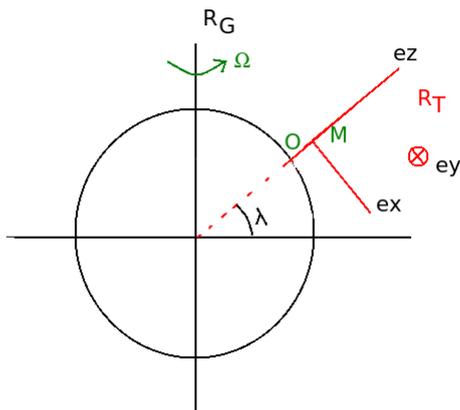
### 3.1.2 $\vec{F}_{ic}$

On cherche la vitesse limite en dessous de laquelle on peut négliger le terme d'inertie de Coriolis (en ordre de grandeur on formule l'hypothèse que la force est inférieure à 1% du poids).

$$\frac{\|\vec{F}_{ic}\|}{\|\vec{P}\|} \leq \frac{2\Omega_{R_T/R_G} v_{lim}}{g} = 0.01 \quad v_{lim} = \frac{0.01g}{2\Omega_{R_T/R_G}} \approx 700 \text{ m/s}$$

**Remarque :** Dans de nombreux cas de mécanique classique cette hypothèse est vérifiée mais par exemple lors de tirs de missiles, on doit tenir compte de  $\vec{F}_{ic}$ .

## 3.2 Effet du caractère non galiléen du référentiel terrestre sur une chute libre



**Conditions initiales :**  $O\vec{M}(t=0) = h\vec{e}_z$  et  $\vec{v}(M)_{/R_T}(t=0) = \vec{0}$

La loi de la dynamique s'écrit :

$$\frac{d\vec{v}(M)_{/R_T}}{dt} = \vec{g}_{\text{apparent}} - 2 \times \vec{\Omega}_{R_T/R_G} \wedge \vec{v}(M)_{/R_T}$$

En traitant  $\vec{F}_{ic}$  comme une perturbation, on a :  $\vec{v}(M)_{/R_T} = -\vec{g}t + \vec{v}(M)_{/R_T}(t=0) = -\vec{g}t$ .

On obtient donc en supposant  $\vec{g}_{apparent}$  parallèle à  $\vec{e}_z$  :

$$\frac{d\vec{v}(M)_{/R_T}}{dt} = \vec{g}_{apparent} - 2 \times \Omega_{R_T/R_G} \cos(\lambda) g t \vec{e}_y$$

Par intégration :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \dot{x}(t=0) = 0 \\ \dot{y} = \Omega_{R_T/R_G} \cos(\lambda) g t^2 + 0 \\ \dot{z} = -gt + 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(t=0) = 0 \\ y = \Omega_{R_T/R_G} \cos(\lambda) \frac{gt^3}{3} + 0 \\ z = -\frac{gt^2}{2} + h \end{array} \right.$$

**Application** : On lâche un objet d'une altitude  $h = 500\text{m}$ , on détermine le temps de chute  $t_{chute}$  jusqu'à  $z = 0$  puis la déviation  $\Delta y$

$$t_{chute} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx \sqrt{100} = 10\text{s}$$

$$\Delta y = \frac{7.3}{3} 10^{-5} \times 10 \times 10^3 = 24\text{cm}$$

**Conclusions** :

- On peut réaliser un étude dynamique en référentiel non galiléen à condition d'intégrer les forces inertielles à la loi de la dynamique en référentiel galiléen,
- Le référentiel terrestre est en toute rigueur non galiléen, ce qui a des conséquences l'étude de certains mouvements (durées, vitesses),
- Pour des temps courts, on peut supposer le référentiel terrestre (ou du laboratoire) galiléen.

### Questions posées :

- Pourquoi lorsque l'énergie est importante, doit-on prendre en compte les forces d'inerties ?
- Est-ce que la déviation vers l'est dépend de l'hémisphère choisi ?
- Citer une (des) expérience(s) qui ont permis de montrer la rotation de la terre.
- Pourquoi pour le fil pesant, compare-t-on uniquement  $\vec{F}_{ie}$  au poids ?
- Pourquoi le fil de pointe ne pointe presque jamais le centre de la terre ?
- Donner la différence entre la verticale et la direction de la terre.
- Est-ce que d'autres forces font que la verticale n'est pas alignée avec la direction du centre de la terre ?
- Pourquoi  $\Omega = 2\pi/24$  heures ?
- Pourquoi un jour = 23 h 56 min ? Comment retrouve-t-on le décalage de 4 minutes ?
- L'hypothèse  $d\vec{\Omega}/dt = 0$  dans la composition des accélérations est-elle vraie ? Pourquoi la vitesse de rotation est-elle constante ?
- Démontrer  $\vec{F}_{ie} = -\Omega^2 H\vec{M}$ .
- Le référentiel de Copernic est défini par 3 étoiles supposées fixes. Où sont-elles (quelle galaxie), comment les choisit-on, que veut dire fixe ?
- Tous les référentiels galiléens sont-ils galiléens entre eux ?

### Aspects positifs : (uniquement les remarques générales de l'exposé)

- Utilisation de couleurs pour les titres,
- Durée respectée,
- Tableau pour comparer les référentiels,
- Transparent avec le plan (plus d'espace au tableau).

### Aspects négatifs : (et d'ordre général)

- 25 min de rappel sur les référentiels non galiléen alors que précisé en prérequis, la leçon doit être plus centrée sur le caractère non galiléen,
- On ne se baisse jamais au tableau (indice : les élèves ne voient pas si c'est tout en bas),
- Un peu parti de la fin de la leçon,
- Un transparent aurait pu être rempli en fonction des résultats obtenus au fil de la leçon,
- Plan : si posé sur le rétro au début, éviter de le remettre en cours de leçon,
- Gagner du temps en mettant le titre de la leçon + prérequis avant l'arrivée du jury,
- Ne pas écrire d'abréviation sans l'avoir précisé auparavant,
- Peut-être plus d'exemples : pendule de Foucault, vents géostrophiques,
- Peut-être parler des forces de marées (ici choix de ne pas le faire),
- Donner échelle de temps sur lequel un référentiel peut être considéré galiléen,
- Éviter la terre tourne d'elle même et préférer tourne autour de son axe.

# Caractère non galiléen du référentiel Terrestre

## I. Référentiel galiléen et non galiléen

1) Définitions.

2) Présentation des référentiels usuels.

## II. Mécanique du point en référentiel non galiléen

1) Composition des accélérations, accélérations d'entraînement et de Coriolis.

2) Équation du mouvement en référentiel non-galiléen, forces d'inertie.

3) Théorèmes énergétiques en référentiel non-galiléen.

## III. Le référentiel terrestre, un référentiel non galiléen

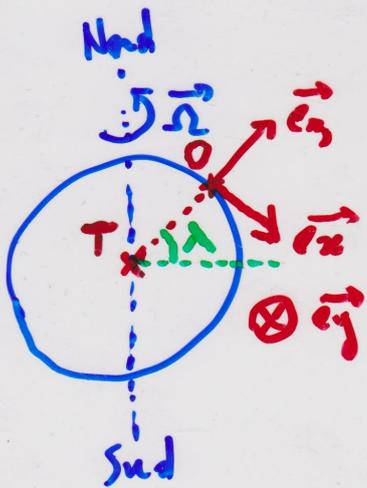
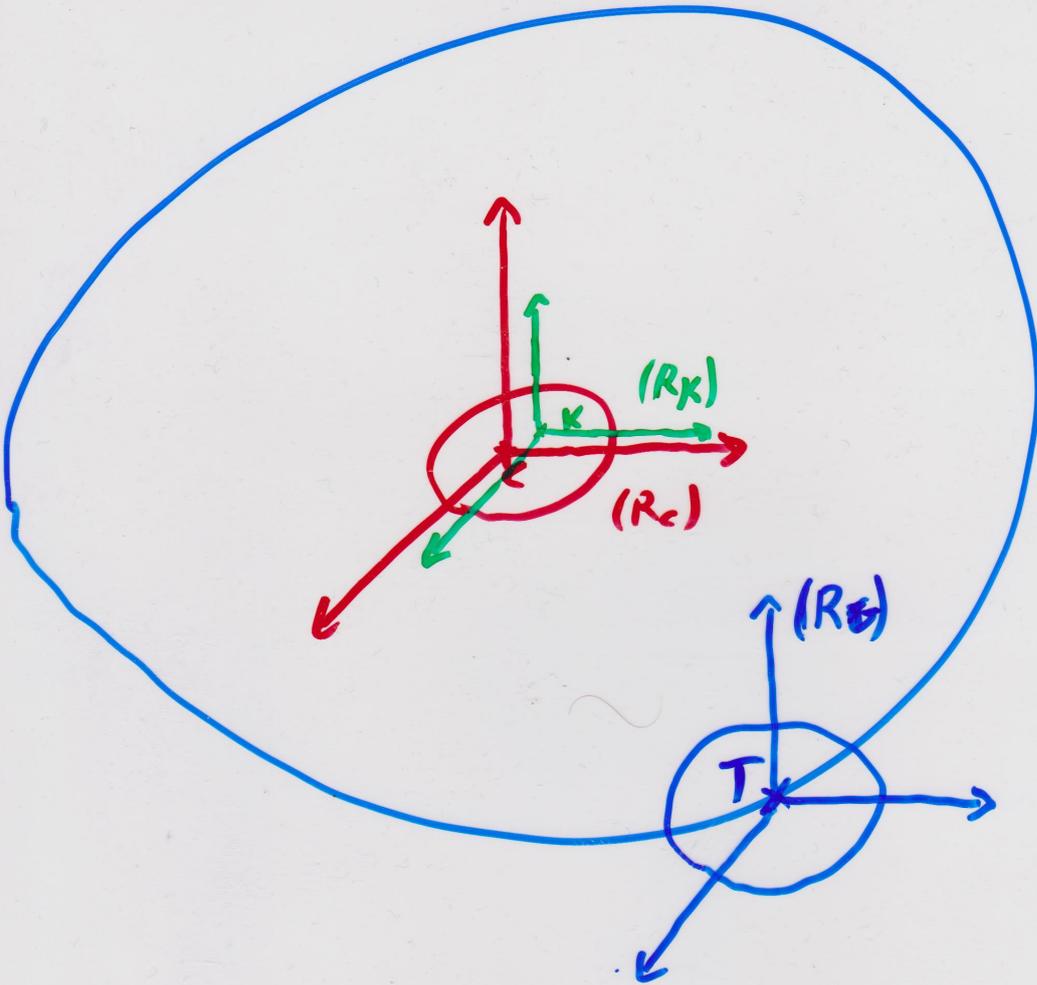
1) Ordre de grandeur

a)  $F_{ic}$

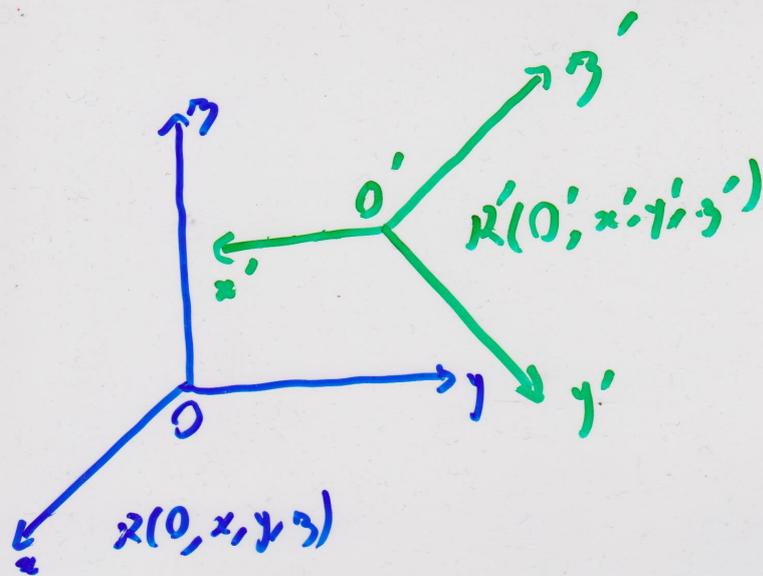
b)  $F_{ic}$

2) Conséquence sur le mouvement de chute libre

3) Autres conséquences



$$\begin{cases} \vec{e}_3 = \frac{\vec{TO}}{\|\vec{TO}\|} \\ \vec{e}_2 \text{ vers le Sud} \\ \vec{e}_1 \text{ vers l'est} \end{cases}$$



$$\vec{a}(M)_{/R} = \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M) + \vec{a}(M)_{/R'}$$

avec

$$\begin{cases} \vec{a}_e(M) = \vec{a}(O')_{/R} + \frac{d\vec{\Omega}(R'/R)}{dt} \wedge \vec{OM} - \Omega^2 \vec{HM} \\ \vec{a}_c(M) = 2 \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{v}(M)_{/R'} \end{cases}$$

$H$  projeté de  $M$  sur l'axe de rotation

