

# LP01 : Contact entre deux solides. Frottement.

Antoine Allard / Pascal Neveu

## Rapports de jurys:

2014 : Il est toujours intéressant de posséder des notions sur les modèles microscopiques du frottement.

2012 : Les candidats sont invités à réfléchir sur la notion de contact ponctuel et à la réalité microscopique de ce contact. Il peut être intéressant d'illustrer de discuter la différence entre coefficient de frottement statique et dynamique.

2010/2009 : Il importe de distinguer le cas du contact ponctuel et celui du contact étendu sur une surface. La distinction de nature entre les deux lois de Coulomb : condition nécessaire de non glissement et loi du frottement de glissement, n'est pas suffisamment dégagée. Les phénomènes d'hystérésis associés au frottement solide sont oubliés.

## Remarques des années précédentes :

Maitriser TMC, référentiel barycentrique / Les frottements ne s'opposent pas toujours au mouvement (embrayage) / Phénomène d'arc-boutement / Calcul de fs avec plan incliné / Effet rétro / Les frottements correspondent à 1% du PIB / Expérience de Timochenko à connaître [2].

## Références utilisées pour cette leçon :

[1] Tec&Doc - David Augier - Physique MP-PT (*Cours + collé-glissé + bitte d'amarrage*)

[2] Perez - Mécanique (*Cours et exercice de freinage d'une voiture*)

[3] BUP 798 - Olivier Fiat (*modèle de Greenwood, exemple de l'enroulement autour d'une poulie*)

[4] Frottement, usure et lubrification - Jean-Marie Georges (*collé-glissé et valeurs numériques*)

[5] Mèmeteau Hubert - Technologie fonctionnelle de l'automobile (*pour la compréhension de l'ABS et des pneumatiques*)

Niveau : CP

Prérequis : Mécanique du point et du solide

- I. Description d'un contact ponctuel [1]
  - a. Aspects cinématiques
  - b. Actions mécaniques du contact
  - c. Aspect énergétique
- II. Lois sur le frottement solide (1779) [1,2]
  - a. Adhérence
  - b. Glissement (*collé-glissé [2,4] & manip illustrative*)
  - c. Conséquence énergétique
- III. Applications
  - a. Enroulement d'un fil autour d'un cylindre.
  - b. Etude du roulement sans glissement du système {voiture} [2]
  - c. Action des freins sur le système {roue} [5]
  - d. Crissement des pneus [2,4]

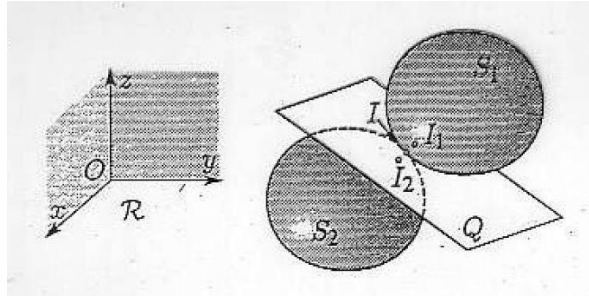
## Questions du jury :

- Introduction de la vitesse de glissement via  $\vec{v}_g(S1/S2) = v(I \in S1) - v(I \in S2)$ . Est-ce la véritable définition ? En fait la vitesse de glissement est plutôt définie par  $\vec{v}_g(S1/S2) = \vec{v}(I \in S1)_{S2}$ .
- Comment écrit-on les actions de contact pour un contact non ponctuel ? On intègre sur toute la surface (tous les points P):  $\vec{R} = \int \int d\vec{f}$  et  $\vec{M}(I) = \int \int \vec{IP} \wedge d\vec{f}$
- Pourquoi le coefficient de frottement statique ne dépend pas de la surface ? Tout d'abord le contact réel ne se fait pas sur la surface apparente, mais sur une surface réelle bien plus petite (1 millième de la surface apparente), constituée de petites zones ( $1\mu\text{m}^2$ ) de surfaces. En ces zones de contact, la pression est importante et ainsi déforme plastiquement le matériau. La contrainte plastique de déformation est constante, quelque soit la force normale. Macroscopiquement, quand on vient mettre un effort tangentiel sur notre solide, on vient travailler en cisaillement :  $T = \text{module de cisaillement} \times \text{Aire réelle de contact}$ . Avec Aire réelle de contact = Effort normal / Contrainte plastique. Cette explication n'est pas triviale, seulement expliquée en 1950 ! (voir fin de compte rendu)  
Alors  $T = \text{module de cisaillement} / \text{Contrainte plastique} \times \text{effort normal} = \mu_s \cdot N$

## Remarques du jury :

- L'approche choisie ici est correcte. On pourrait néanmoins nous reprocher de ne pas avoir eu une approche plus classique, avec un exemple académique (typiquement le solide sur un plan incliné), en insistant bien sur les principes (contact ponctuel, lois de Coulomb, cône de frottement) énoncés en début de leçon.
- L'exemple du freinage d'une voiture laisse perplexe le jury. C'est original mais complexe et l'approche non-académique peut déplaire.
- La manip illustrative de la bitte d'amarrage a plu. Ça marche bien.
- Il manque la démonstration, ou au moins la discussion autour de la relation du mouvement sans glissement  $dx/dt = R \cdot d\theta/dt$ .
- On estime à 1% du PIB la quantité perdue par frottements dans les machines-outils.
- Quid d'une approche avec des torseurs? Clairement pas obligatoire.

## I. Description d'un contact ponctuel



On note I le point de contact géométrique entre deux solides S1 et S2.

### a) Aspects cinématiques

Vitesse de glissement de S1 par rapport à S2 :  $\vec{v}_g(S1/S2) = v(I \in S1) - v(I \in S2)$

- = vitesse relative des deux solides au point de contact
- indépendant du référentiel choisi<sup>1</sup> (c'est une vitesse relative)
- appartient au plan tangent  $\vec{\pi}$  (sinon il y aurait interpénétration ou décollement)
- Si  $\vec{v}_g \neq \vec{0}$  alors les deux solides glissent l'un par rapport à l'autre

Vecteur rotation relative de S1 par rapport à S2 :  $\vec{\Omega}(S1/S2) = \vec{\Omega}(S1/R) - \vec{\Omega}(S2/R)$

- indépendant du référentiel<sup>2</sup> (c'est une vitesse relative)
- on décompose  $\vec{\Omega}(S1/S2) = \vec{\Omega}_T + \vec{\Omega}_N$  somme d'une rotation de roulement et de pivotement

On dira qu'il y a roulement sans glissement si  $\vec{\Omega}_N = \vec{0}$  et  $\vec{v}_g = \vec{0}$

Montrer une balle de ping pong pour illustrer le roulement et le pivotement

### b) Actions mécaniques de contact

Résultante des actions de contact de S2 sur S1 :  $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$  décomposée en une composante tangentielle  $\vec{T}$  et normale  $\vec{N}$  où  $\vec{N}$  est nulle si l'on a rupture du contact.

Moment des actions de contact de S1 sur S2 au point I :  $\vec{M}(I) = \vec{M}(I)_T + \vec{M}(I)_N$  somme d'un moment de roulement et d'un moment de pivotement (orthogonaux entre eux)

Lorsque contact est ponctuel,  $\vec{M}(I) = \vec{0}$  (car la force de contact passe par I)

### c) Aspect énergétique

<sup>1</sup>  $v(I1/R) = v(I1/R') + v(R'/R)(I1)$  et de même pour  $v(I2/R)$ . Or  $v(R'/R)(I1) = v(R'/R)(I2)$  car I1 et I2 très proches, donc  $v(I1/R) - v(I2/R) = v(I1/R') - v(I2/R')$

<sup>2</sup>  $\Omega(Si/R) = \Omega(Si/R') + \Omega(R'/R)$

Action de S1 sur S2 :  $P_2 = (-\vec{R}).\vec{v}(I \in S2) + (-\vec{M}(I)).\vec{\Omega}(S2/R) = -\vec{R}.\vec{v}(I \in S2)$  la puissance reçue par S2 de la part de S1.

Action de S2 sur S1 :  $P_1 = \vec{R}.\vec{v}(I \in S1) + \vec{M}(I1).\vec{\Omega}(S1/R) = \vec{R}.\vec{v}(I \in S1)$  la puissance reçue par S1 de la part de S2.

⇒ La puissance totale de contact entre les deux solides est  $P_{totale,contact} = P_1 + P_2 = \vec{R}.\vec{v}_g = \vec{T}.\vec{v}_g(S1/S2)$

## II. Lois phénoménologiques de Coulomb (1779)

Découvertes par Leonard de Vinci (15ème siècle), introduites par Amontons (1699) et Coulomb (1779).

Plus d'infos sur l'aspect microscopique à voir dans le BUP [3].

Matériau subissant une déformation élastique sur un support indéformable, le contact ponctuel devient :

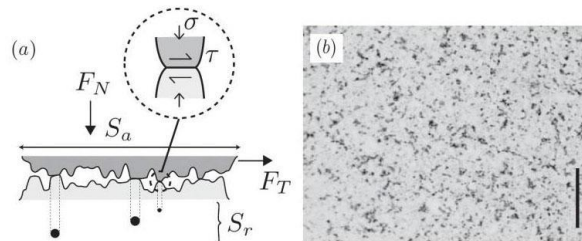
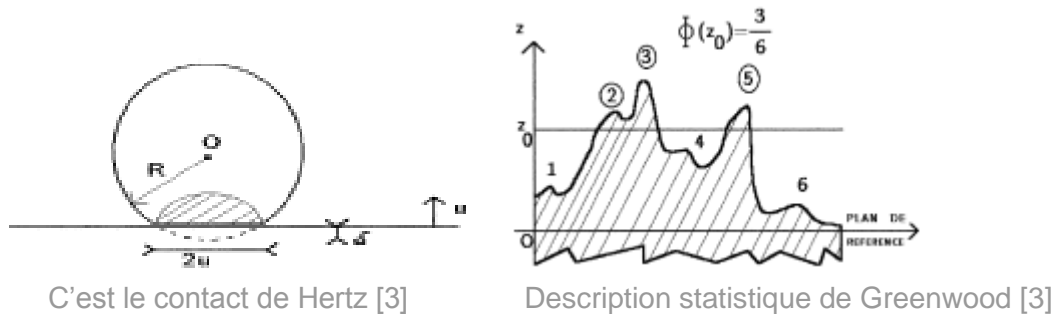


FIG. 2.3 – (a) Schéma d'un contact entre deux surfaces rugueuses (dessin d'après Bureau, 2002). (b) Image en microscopie optique par transmission de l'interface entre deux blocs de résine epoxy transparente (photo Olivier Ronsin). Les contacts apparaissent en noir. Barre d'échelle : 100  $\mu\text{m}$ .

Observation microscopique du contact entre deux solides  
(Les milieux granulaires : entre fluide et solide, B. Andreotti et al., EDP Sciences)

**Manip illustrative des lois de Coulomb:** Système solide-ressort. Montrer que le glissement démarre pour une même force, même si on change l'aire de contact. Il change si l'on change la masse.

On supposera dans la suite que l'ensemble des résultats précédents s'appliquent pour des contacts non ponctuels.

a) Adhérence

Si  $\vec{v}_g = \vec{0}$  :

contact sans glissement = adhérence., L'expérience montre que  $\vec{v}_g = \vec{0}$  tant que

$||\vec{T}|| \leq \mu_s ||\vec{N}||$  où  $\mu_s$  est un coefficient de frottement statique tel qu'il soit :

- indépendant de  $||\vec{N}||$
- indépendant de l'aire de la surface de contact

Géométriquement on doit avoir la résultante dans le cône de frottement de demi angle  $\phi = \arctan(\mu_s)$ . Schéma au tableau.

Application au cas d'un système masse-ressort, condition de mise en mouvement  $= l_1 = \frac{\mu_s mg}{k}$

b) Glissement

Si  $\vec{v}_g \neq \vec{0}$  :

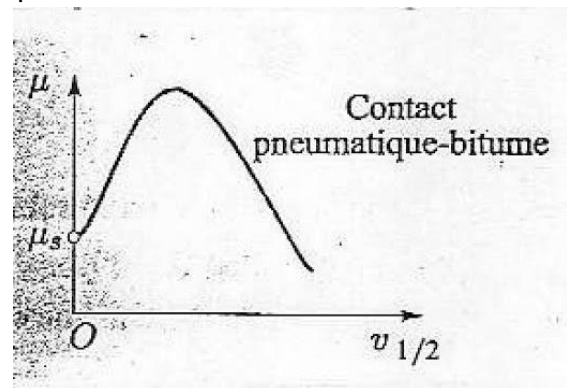
- $\vec{T}$  et  $\vec{v}_g$  sont dans le même plan, dans des directions opposées
- $P_{totale,contact} = \vec{T} \cdot \vec{v}_g < 0$  donc l'énergie mécanique du système total diminue
- $||\vec{T}|| = \mu_d ||\vec{N}||$  avec  $\mu_d < \mu_s$

Le coefficient de frottement dépend de la température, des états de surface, de la vitesse.

Quelques OdG :

Corps en contact	$\mu_s$	$\mu_d$
Acier sur acier, dur, sec	0,42	0,28
Acier sur acier, dur, gras	0,05	0,10
Acier sur acier, surfaces polies	$10^2$	$10^2$
Bois sur bois, sec	0,3	0,5
Métal sur glace	0,01	0,03
Pneu sur route sèche	0,6	0,8
Pneu sur route mouillée	0,1	0,15
Teflon sur Teflon	0,04	0,04

Tableau 12.19



**Exemple** : Application au cas du système masse-ressort tiré avec une vitesse constante : collé-glissé. [1,4]. Tracé des graphes représentant la position du solide avec les phases successives de collé puis glissé. On ne détaille pas le calcul de la durée du glissement, qui n'est pas très joli.

Le calcul montre que la fréquence du collé-glissé est en  $f \propto \frac{kV}{mg}$  avec V la vitesse, k la raideur du ressort, et m la masse du solide.

$$t_1 = \frac{l_1 - l_2}{V} \quad t_2 = \frac{2}{\omega} \left[ \pi - \arctan\left(\frac{g(\mu_s - \mu_d)}{V\omega}\right) \right] \quad l(t) = \frac{mg}{k} [(\mu_s - \mu_d)\cos(\omega t) + \mu_d] + \frac{V}{\omega}\sin(\omega t)$$

$$l_2 = l(t_2) = \dots$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{t_1 + t_2}$$

Application numérique pour une craie.

$E = 20 \text{ GPa}$  ;  $S = 10^{-4} \text{ m}^2$  ;  $L = 10 \text{ cm}$   $\rightarrow k = 10000 \text{ N/m}$

$V = 1 \text{ cm/s}$  ;  $m = 100 \text{ g}$  ;  $\mu_s - \mu_d \sim 0.04$

$f = 2.5 \text{ kHz}$

Intérêt de casser une craie en deux :  $L \rightarrow L/2 \Rightarrow k \rightarrow 2*k$  et  $m \rightarrow m/2$  on multiplie la fréquence par 4.

**ATTENTION** : la modélisation de la craie n'est pas valide ! Le crissement de la craie sur le tableau est lié au modes propres de la craie. Le collé glissé ne sert qu'à exciter les modes. En plus, c'est bizarre de prendre  $mg$  pour la craie alors que l'effort normal n'est pas le poids...

Crissement d'une porte., la fréquence du grincement dépend de la vitesse de rotation.

c) Quelques conséquences énergétiques

Énergie dissipée, peut se faire sous forme de chaleur (se frotter les mains, craquer une allumette), en énergie d'arrachement : craie sur tableau.

### III. Application générale : véhicule en phase de freinage

a) Enroulement d'une corde autour d'un cylindre (ou cabestan) [3]

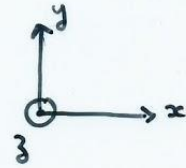
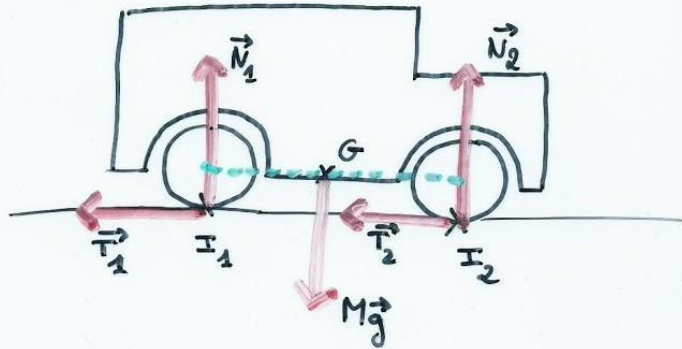
**Exemple** : Enroulement d'un fil sur un cylindre (bitte d'amarrage). [1,3] On montre que la tension du fil est exponentielle avec l'enroulement.

**& manip illustrative qui marche bien** avec un fil enroulé sur un cylindre fixé sur une potence. Il suffit de faire 2 tours pour qu'une masse de 20 g retienne une masse de 500g. La masse du fil qui pend sert à maintenir la masse de 500 g à partir de 4 tours (bitte d'amarrage des bateaux).

b) Étude du roulement sans glissement du système {voiture} [2]

Dans le cas d'un freinage, le couple de freinage appliqué à la roue avant pourra être supérieur à celui de la roue arrière car la force normale exercée par la voiture est supérieur à l'avant. En phase d'accélération, c'est l'inverse, la voiture se cambre vers l'arrière. **cf transparent 1**

Systeme = {voiture}



$$\vec{GI}_1 = \begin{vmatrix} -L/2 \\ -R \end{vmatrix}_{xy}$$

$$\vec{GI}_2 = \begin{vmatrix} L/2 \\ -R \end{vmatrix}_{xy}$$

PFD

$$\begin{cases} M \ddot{x}_G = -T_1 - T_2 & (1) \\ 0 = -Mg + N_1 + N_2 & (2) \end{cases}$$

TMC en G (sur  $O_3$ )

$$-2 J_{\text{roue}} \ddot{\theta} = \frac{L}{2} N_2 - R T_2 - R T_1 - \frac{L}{2} N_1 \quad (3)$$

Condition de roulement sans glissement :  $\dot{x}_G = R \dot{\theta} \quad (4)$

$$\left. \begin{array}{l} (4) \text{ dans } (3) \\ (1) \text{ dans } (3) \end{array} \right\} (5) : (N_1 - N_2) \frac{L}{2} = \frac{2 J_{\text{roue}}}{R} \ddot{x}_G + M \ddot{x}_G R$$

$$= \lambda \ddot{x}_G \quad \text{avec } \lambda > 0$$

(2) et (5) :

$$N_1 = \frac{1}{L} \left[ \frac{Mg L}{2} + \lambda \ddot{x}_G \right]$$

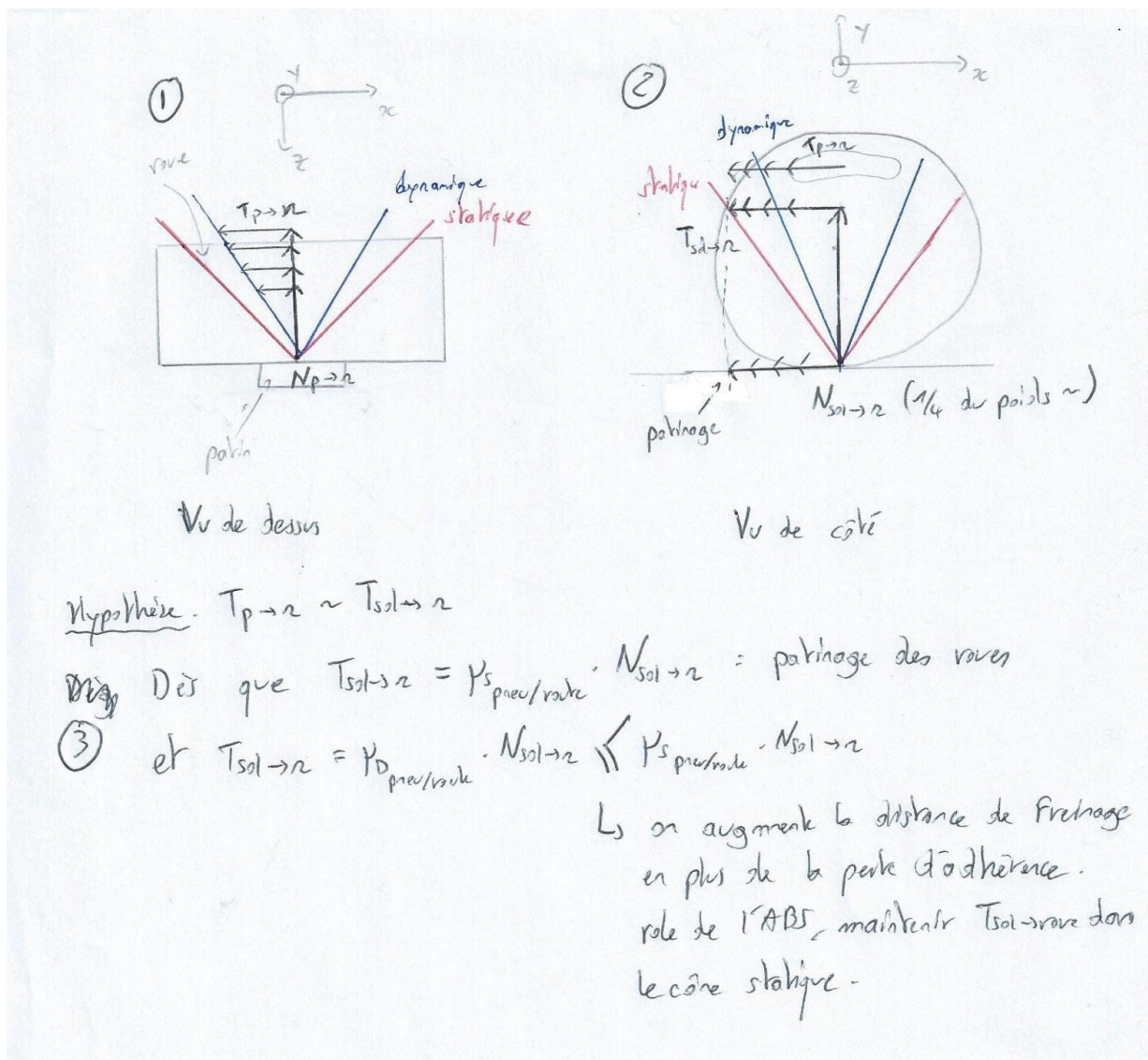
$$N_2 = \frac{1}{L} \left[ \frac{Mg L}{2} - \lambda \ddot{x}_G \right]$$

$$\Delta N = N_2 - N_1 = -2 \lambda \ddot{x}_G$$



c) Action des freins sur le système {roue} [5]

Les systèmes d'antiblocage (ABS) des roues ont pour fonction de détecter le blocage d'une ou de plusieurs roues lors du freinage et de relâcher les freins concernés pendant un court instant afin qu'elles retrouvent leur adhérence. On a alors optimisation de la distance d'arrêt et contrôle de la trajectoire du véhicule. **cf transparent 2 et scan ci-dessous**. On a représenté les cônes statique et dynamique du patin sur la roue et de la roue sur le sol. Afin de maintenir l'adhérence de la roue sur le sol (maintien du roulement sans glissement), il faut que le  $T_{\text{patin} \rightarrow \text{roue}}$  induise un  $T_{\text{sol} \rightarrow \text{roue}}$  qui reste dans le cône statique du contact {roue/sol}. Dès qu'on tangente le cône dynamique, perte d'adhérence, et  $T_{\text{sol} \rightarrow \text{roue}}$  diminue à la valeur donnée par le cône dynamique {roue/sol}. On augmente ainsi en distance d'arrêt, en plus de la perte de contrôle du véhicule (et de l'usure des pneus...). L'ABS permet à ce que  $T_{\text{sol} \rightarrow \text{roue}}$  reste dans le cône statique.





① augmentation progressive de  $\|\vec{N}_{p \rightarrow r}\|$

• la roue glisse par rapport au patin :  $\vec{v}_g(p/r) \neq 0$

$$\Rightarrow \|\vec{T}_{p \rightarrow r}\| = \mu_{\text{dyn}, p/r} \|\vec{N}_{p \rightarrow r}\|$$

• augmentation de  $\|\vec{T}_{s \rightarrow r}\|$

② roulement sans glissement de la roue par rapport au sol ( $\vec{v}_g(r/s) = \vec{0}$ )

$\vec{N}_{s \rightarrow r}$  fixé

$\Rightarrow$  augmentation de  $\|\vec{T}_{s \rightarrow r}\|$  jusqu'à atteindre le cône de frottement statique sol/roue

③  $\begin{cases} \vec{v}_g(r/s) \neq \vec{0} \\ \vec{v}_g(p/r) = \vec{0} \end{cases}$

blocage de la roue

$$\text{et } \|\vec{T}_{s \rightarrow r}\| = \mu_{\text{dyn}, s/r} \|\vec{N}_{s \rightarrow r}\|$$

$$< \mu_{\text{st}, s/r} \|\vec{N}_{s \rightarrow r}\|$$

A propos de l'hypothèse  $T_{patin\text{-}roue} \sim T_{sol\text{-}roue}$  : en fait le TMC appliqué au centre de la roue donne  $J_{roue} \dot{\theta} = T_{sol\text{-}roue} R - T_{patin\text{-}roue} r$  avec  $R$  le rayon de la roue,  $r$  la distance au centre de la roue à laquelle le patin de freinage s'applique. On considère  $R \sim r$ . Pour des efforts tangentiel de l'ordre de  $10^4$  N (c'est l'ordre de grandeur lorsque qu'on est proche du patinage), on a  $T \cdot R \sim 5 \cdot 10^3$  à comparer à

$$J_{roue} \dot{\theta} \sim M_{roue} R_{roue}^2 \cdot \dot{\theta} / (10s) \sim 10kg \cdot (0.5m)^2 \cdot 30m/s / 0.5m / 10s \sim 1.5 \text{ Nm} \ll 10^3 \text{ Nm}$$

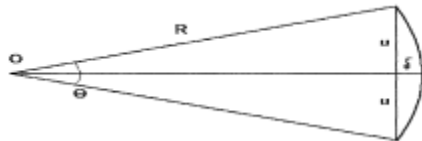
d) Crissement des pneus [2,4] (si le temps qui reste le permet)

Collé glissé avec la surface  $S = 30 \text{ cm}^2$  du pneu en contact avec la route qui travaille en cisaillement sur son épaisseur  $L = 5 \text{ cm}$ . Ca permet d'extraire une constante de raideur  $k = G \cdot S / L = 60000 \text{ N/m}$ . Pour une vitesse de  $30 \text{ m/s}$  et  $\mu_s - \mu_d = 0.3$  et d'en déduire une fréquence de collé-glissé de  $1.2 \text{ kHz}$ .

### Conclusion :

- pas que inutile les frottements dans les contacts  $\Rightarrow$  amarrage de bateau, embrayage dans les moteurs...
- 1% du PIB perdu chaque année à cause des frottements  $\Rightarrow$  enjeu pour limiter les dissipations dans les liaisons, frottement fluide
- contact ponctuel en réalité plus complexe  $\Rightarrow$  modèles statistiques de Greenwood

### Remarques sur un contact sphère-plan [3]



Petite déformation :  $\delta, u \ll R$  donc  $\theta \ll 1$  :  $2u = R\theta$  et  $\delta = R - R \cos(\theta/2) \approx R\theta^2/8$

Donc l'aire de surface vaut  $\pi u^2 = 2\pi R\delta$

A la pose de l'objet, le système perd de l'énergie potentielle de pesanteur et gagne de l'énergie élastique :

- énergie élastique est celle d'un ressort équivalent à la zone de contrainte :  $E_{el} = 1/2 k \delta^2 = 1/2 (E \frac{\pi u^2}{u}) \delta^2 = 1/2 E \pi u \delta^2$
- énergie potentielle  $E_{pot} = -N \delta$

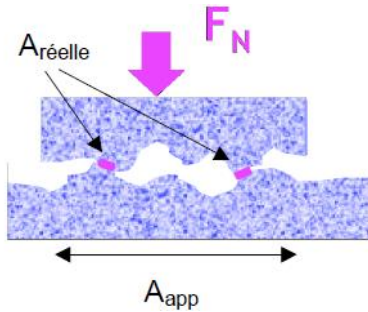
Equilibre tel que  $\partial E / \partial \delta = 0 = -N + \pi E u \delta$

Et donc  $N = \pi E \sqrt{2R} \delta^{3/2}$

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{z}{\sigma}\right) \quad A = \int_d^\infty N\varphi(z) dz \quad 2\pi R \cdot (z-d) \quad P = \int_d^\infty N\varphi(z) \pi E \sqrt{2R} (z-d)^{3/2} dz \quad \frac{P}{A} = 2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \sqrt{2E} \left(\frac{\sigma}{R}\right)^{\frac{1}{2}}$$

J'ai un document PDF qui résume ce qui suit mais qui ne sera pas autorisé le jour de l'agrégation, mais je pense qu'on doit pouvoir trouver un raisonnement semblable dans le livre *The friction and the lubrication of solids* de Bowden et Tabor, qui est à la BU.

1950 : Bowden et Tabor (Cavendish Laboratory, Cambridge) proposent une explication pour l'indépendance du coefficient de frottement avec la surface de contact apparente.



$A_{réelle}/A_{app} \sim 0.001$   $P_{contact} = F_N/A_{réelle} > F_N/A_{app}$   $\Rightarrow$  domaine plastique dès une pression  $H$  (dureté) et donc on a  $F_{frottement} = \sigma_Y A_{réelle} = \sigma_Y F_N/H$  où  $\sigma_Y$  est une contrainte de cisaillement.

1960 : Greenwood-Williamson montre que le raisonnement précédent reste valable dans le cadre d'aspérités qui se déforment élastiquement.