

PRÉPARATION À L'AGRÉGATION 2012  
LEÇON DE PHYSIQUE N°1

---

**Contact entre solides. Frottement de glissement.  
Applications au glissement et au roulement.**

---

*Auteurs :*

Pauline BOULLEAUX-BINOT

Alexis BRENES

*Correcteur :*

Marion BERTAGNOLIO

---

---

## Table des matières

<b>I</b>	<b>Position du problème</b>	<b>3</b>
<b>II</b>	<b>Aspect cinématique</b>	<b>3</b>
II.1	Glissement - Roulement . . . . .	3
II.2	Application : Disque roulant sur un plan . . . . .	4
<b>III</b>	<b>Aspects dynamique</b>	<b>5</b>
III.1	Existence d'une force de frottement . . . . .	5
III.2	Torseur des actions mécaniques de contact . . . . .	5
III.3	Liaison entre solides . . . . .	6
<b>IV</b>	<b>Lois de Coulomb</b>	<b>6</b>
IV.1	Enoncé . . . . .	6
IV.2	Mesure de $\mu_0$ . . . . .	7
IV.3	Cas du glissement sans frottement de $\mathcal{S}_1$ sur $\mathcal{S}_2$ : . . . . .	8
IV.4	Cas du roulement sans glissement de $\mathcal{S}_1$ sur $\mathcal{S}_2$ : . . . . .	8
<b>V</b>	<b>Aspect énergétique</b>	<b>8</b>
<b>VI</b>	<b>Exercices et applications</b>	<b>9</b>
VI.1	Phénomène d'hystérésis lié aux frottements (d'après X1999) . . . . .	9
VI.2	Comment rattraper une bobine coincée sous un canapé? . . . . .	10

## Références

- [1] M. Bausset. *Mécanique des systèmes solides*. Masson, 1990.
- [2] C. Grossetete and P. Olive. *Mécanique des systèmes et du solide (2ème année, MP-MP\*-PT-PT\*)*. Ellipse, 1999.
- [3] F. Jundt H. Stöcker and G. Guillaume. *Toute la physique*. DUNOD, 1999.
- [4] J. Ph. Perez. *Mécanique. Points matériels, solides, fluides*. Masson, 1992.

- [5] M. N. Sanz and B. Salamito. *Physique tout-en-un MP-MP\**. DUNOD, collection J'intègre, 2004.

# I Position du problème

On considère 2 solides en contact,  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ , dans un référentiel  $\mathbf{R}$ . En tout point  $\mathcal{I}$  de la surface de contact, on a :

Un torseur cinématique du point coïncidant à  $\mathcal{I}$  sur  $\mathcal{S}_1$  :  $\mathcal{T}_c = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}_1/R}} \\ \overrightarrow{V_{I_1 \in \mathcal{S}_1/R}} \end{array} \right\}_{I_1 \in \mathcal{S}_1/R}$

Un torseur cinématique du point coïncidant à  $\mathcal{I}$  sur  $\mathcal{S}_2$  :  $\mathcal{T}_c = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}_2/R}} \\ \overrightarrow{V_{I_2 \in \mathcal{S}_2/R}} \end{array} \right\}_{I_2 \in \mathcal{S}_2/R}$

Un torseur des actions mécaniques (de  $\mathcal{S}_1$  sur  $\mathcal{S}_2$  par exemple) :  $\mathcal{T} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\mathcal{R}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{I,1/2}} \end{array} \right\}_{I,1/2}$

Le torseur des actions mécaniques de  $\mathcal{S}_2$  sur  $\mathcal{S}_1$  se déduit directement du précédent par la loi des actions réciproques.

**Rappel** Un torseur  $\mathcal{T}$  est un champ de vecteurs équiprojectifs, écrit en un point quelconque de l'espace  $\mathcal{O}$  et défini par plusieurs éléments :

- Un vecteur caractéristique du champ, indépendant du point où on écrit le torseur : la résultante, noté  $\overrightarrow{\mathcal{R}}$
- Un vecteur dépendant du point  $\mathcal{O}$  appelé moment du torseur, noté  $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}$

On note ce torseur  $\mathcal{T} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\mathcal{R}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_O} \end{array} \right\}_O$

On peut, à partir du torseur écrit en un point quelconque de l'espace  $\mathcal{O}$ , retrouver l'expression du torseur en un autre point  $\mathcal{P}$  de l'espace car les moments en  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{P}$  vérifient la **relation de Varignon** :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_P} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O} + \overrightarrow{PO} \wedge \overrightarrow{\mathcal{R}}$$

Lorsqu'on peut assimiler la surface de contact à un point  $\mathcal{I}$ , on dit que le contact est ponctuel. On définit alors une liaison ponctuelle par :

- Le point de contact  $\mathcal{I}$
- Le plan tangent à  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  au niveau du point de contact :  $\Pi$

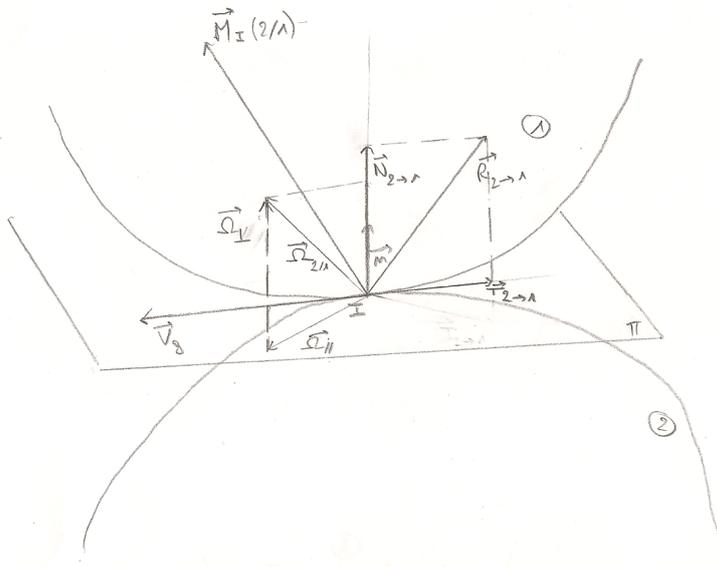
On définit alors la normale commune  $\overrightarrow{N}_{12} = \overrightarrow{N}_\Pi$

## II Aspect cinématique

### II.1 Glissement - Roulement

Pour un contact ponctuel, on définit la vitesse de glissement instantanée de  $\mathcal{S}_1$  par rapport à  $\mathcal{S}_2$  par :  $\overrightarrow{v}_{gl,2/1} = \overrightarrow{V}_{I \in \mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2} = \overrightarrow{V}_{I \in \mathcal{S}_2/R} - \overrightarrow{V}_{I \in \mathcal{S}_1/R}$

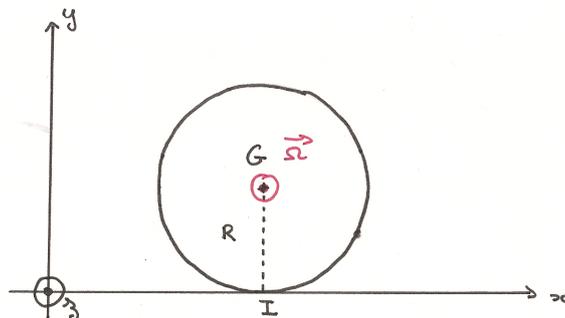
Remarques :



- Cette vitesse est dans le plan tangent commun à  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$
  - Pour tout point  $I$  de  $\mathcal{S}_1$ , on a :  $\vec{V}_{A \in \mathcal{S}_1 / \mathcal{S}_2} = \vec{V}_{I \in \mathcal{S}_1 / \mathcal{S}_2} + \vec{AI} \wedge \vec{\Omega}_{1/2} = \vec{v}_{gl,2/1} + \vec{AI} \wedge \vec{\Omega}_{1/2}$
- On peut décomposer  $\vec{\Omega}_{1/2} = \vec{\Omega}_{\perp 1/2} + \vec{\Omega}_{\parallel 1/2}$ . On appelle
- $\vec{\Omega}_{\perp 1/2}$  la vitesse angulaire de pivotement de 1 par rapport à 2
  - $\vec{\Omega}_{\parallel 1/2}$  la vitesse angulaire de roulement de 1 par rapport à 2

## II.2 Application : Disque roulant sur un plan

On considère un disque homogène de rayon  $R$  roulant sans glisser sur un plan  $\mathcal{P}$  horizontal. On note  $\vec{\Omega}$  sa vitesse de rotation dans le référentiel du laboratoire. Déterminer le mouvement du centre d'inertie du disque.



Résolution :

$$\vec{V}_{G/R} = \vec{V}_{I \in \mathcal{D}/R} + \vec{GI} \wedge \vec{\Omega} = \vec{V}_{I \in \mathcal{P}/R} + \vec{GI} \wedge \vec{\Omega} \text{ car il y a absence de glissement.}$$

Or  $\vec{V}_{I \in \mathcal{P}/R} = \vec{0}$  Donc  $\vec{V}_{G/R} = -R\Omega \vec{u}_x$

### III Aspects dynamique

#### III.1 Existence d'une force de frottement

Lorsqu'on pose un solide sur un plan incliné, on constate que le solide ne se met à glisser que pour certains angles. Dessinons cette situation.

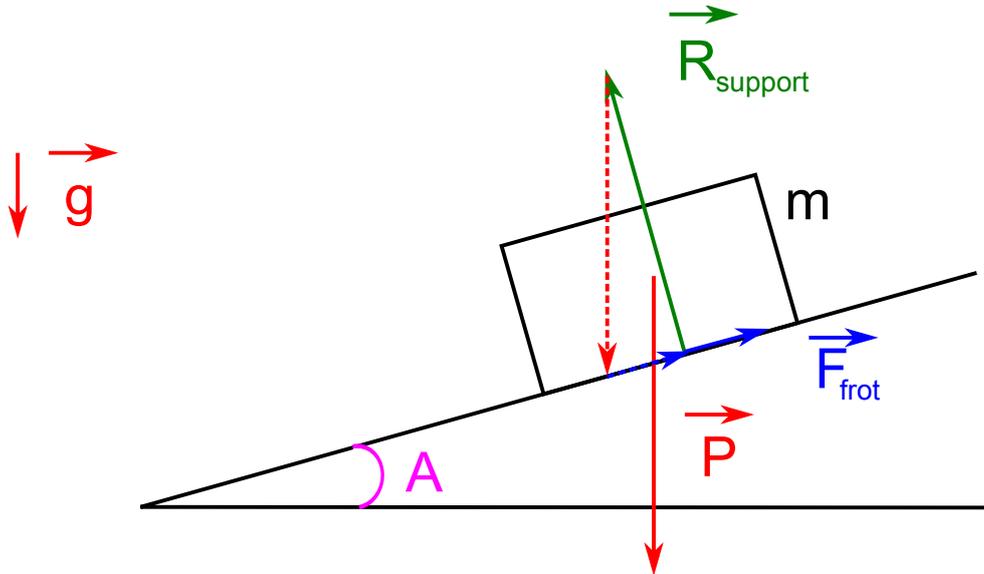


FIGURE 1 – Mise en évidence d'une force de frottements

On constate que lorsque le solide est immobile, une force doit exister pour que la somme des forces soit nulle (première loi de Newton). On appelle cette force **force de frottements**. Ici, elle s'oppose au glissement. Donnons quelques caractéristiques de cette force.

**Origine microscopique des frottements :** En pratique, au niveau microscopique, les surfaces présentent de nombreuses irrégularités. La résultante des actions surfaciques donne naissance à la force de frottement.

#### III.2 Torseur des actions mécaniques de contact

Comme précisé ci-dessus, dans le cas d'un contact entre solides, on peut définir un torseur des actions mécaniques de contact entre le solide  $\mathcal{S}_1$  et le solide  $\mathcal{S}_2$ ,  $\mathcal{T} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\mathcal{R}} \\ \vec{\mathcal{M}}_I \end{array} \right\}_I$

Sa résultante  $\vec{\mathcal{R}}_{2/1}$  est la réaction de  $\mathcal{S}_2$  sur  $\mathcal{S}_1$ .  $\vec{\mathcal{R}}_{2/1}$  peut se décomposer en deux composantes :

- la réaction normale  $\vec{\mathcal{R}}_N$ , orientée perpendiculairement au plan commun tangent  $\diamond$
- la réaction tangentielle  $\vec{\mathcal{R}}_T$ , orientée parallèlement au plan commun tangent  $\diamond$ . On appelle aussi  $\vec{\mathcal{R}}_T$  la force de **frottement de glissement**

Son moment  $\vec{\mathcal{M}}_{P,2/1}$  est le moment des actions de contact de  $\mathcal{S}_2$  sur  $\mathcal{S}_1$  au point  $\mathcal{P}$ .  $\vec{\mathcal{M}}_{P,2/1}$  peut se décomposer en deux composantes :

- le moment  $\vec{M}_{P,2/1\parallel}$ , orienté parallèlement au plan commun tangent  $\Pi$ .  $\vec{M}_{P,2/1\parallel}$  caractérise la résistance au roulement. Il est colinéaire à  $\omega_{\parallel}$  et de sens opposé.
- le moment  $\vec{M}_{P,2/1\perp}$ , orienté perpendiculairement au plan commun tangent  $\Pi$ .  $\vec{M}_{P,2/1\perp}$  caractérise la résistance au pivotement. Il est colinéaire à  $\omega_{2/1}$  et de sens opposé.

En particulier, au point de contact  $\mathcal{I}$  entre  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ , le moment des actions de contact est nul lorsqu'on considère le contact comme ponctuel. En effet, les actions mécaniques de contact sont appliquées en  $\mathcal{I}$

### III.3 Liaison entre solides

Le contact entre solides peut être modélisé par une liaison, ou une association de plusieurs liaisons. En général, on suppose, pour plus de simplicité que les contacts entre solides se font sans adhérence (pas de frottements). Une liaison se faisant sans adhérence est qualifiée de liaison parfaite. Sans être exhaustifs, nous allons citer quelques unes de ces liaisons parfaites et caractériser de manière qualitative le mouvement relatif de deux solides liés par ces liaisons.

**Liaison ponctuelle :** La liaison entre  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  est dite ponctuelle s'il existe un unique point de contact entre  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ . Si  $\mathcal{S}_1$  est plan par exemple, le mouvement de tout point  $\mathcal{A}_2$  de  $\mathcal{S}_2$  restera dans un plan  $\mathcal{P}_1$  de  $\mathcal{S}_1$  au cours du mouvement relatif des deux solides.

Exemple : toupie sur une table, boule sur un plan, pointe sur une surface quelconque...

**Liaison appui-plan :**  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  sont en liaison appui-plan si au cours de leur mouvement relatif, un plan  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{S}_1$  reste confondu avec un plan  $\mathcal{P}_2$  de  $\mathcal{S}_2$ .

Exemple : livre posé sur une table

**Liaison pivot :** Deux solides  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  sont en liaison pivot si, au cours de leur mouvement relatif, deux points  $\mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{D}_2$  de  $\mathcal{S}_2$  distants d'une longueur  $l$  restent confondu avec deux points  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{D}_1$  de  $\mathcal{S}_1$  distants d'une même longueur  $l$  non nulle.

Exemple : gonds d'une porte, stylo roulant sur une table...

## IV Lois de Coulomb

### IV.1 Énoncé

Les lois de Coulomb sont des lois phénoménologiques qui décrivent le comportement de deux solides en mouvement. Pour le frottement de glissement, elles s'énoncent comme suit :

Si  $\mathcal{S}_1$  glisse sur  $\mathcal{S}_2$  (ie,  
 $\vec{v}_{gl,2/1} \neq \vec{0}$ )

- $\|\vec{\mathcal{R}}_T\| = \mu \|\vec{\mathcal{R}}_N\|$
- $\vec{v}_{gl,2/1}$  et  $\vec{\mathcal{R}}_T$  sont colinéaires et de sens opposé

$\mu$  est appelé facteur de frottement dynamique.

Si  $\mathcal{S}_1$  ne glisse pas sur  $\mathcal{S}_2$   
 (ie,  $\vec{v}_{gl,2/1} = \vec{0}$ )

- $\|\vec{\mathcal{R}}_T\| \leq \mu_0 \|\vec{\mathcal{R}}_N\|$ , avec l'égalité au début du glissement
- $\vec{\mathcal{R}}_T$  est indéterminée (direction et intensité)

$\mu_0$  est appelé facteur de frottement statique. On a l'inégalité  $\mu < \mu_0$ .

**Exemples de valeurs de  $\mu$  et  $\mu_0$  :**

Les valeurs de  $\mu$  et  $\mu_0$  dépendent des deux solides en contact.

Nature du contact	$\mu$	$\mu_0$
Acier sur acier (dur et sec)	0.42	0.78
Acier sur acier (dur et gras)	0.05	0.10
Bois sur bois (sec)	0.30	0.50
Pneu sur route sèche	0.60	0.80
Pneu sur route mouillée	0.10	0.15

## IV.2 Mesure de $\mu_0$

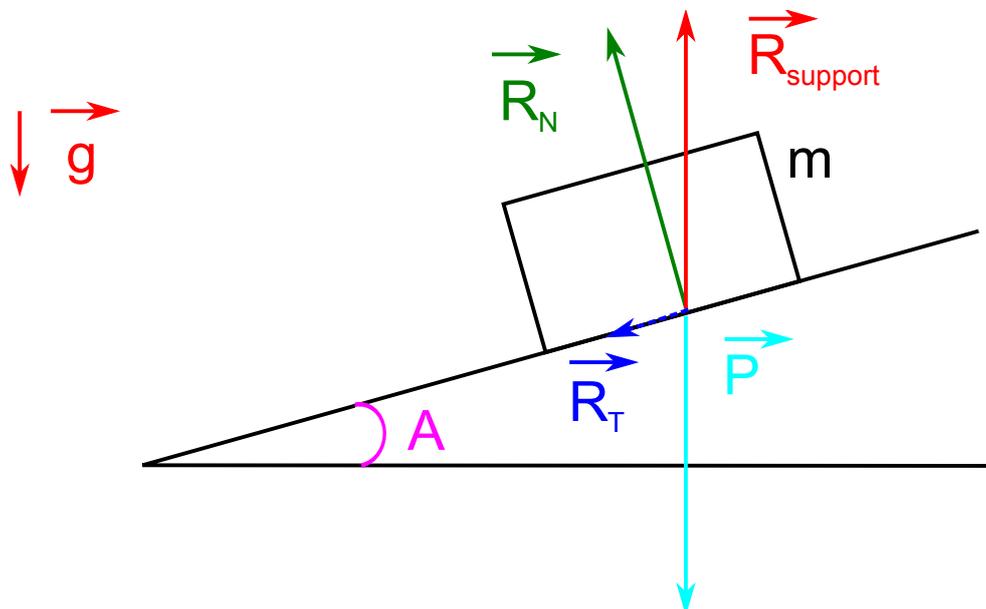


FIGURE 2 – Mesure de  $\mu_0$

On pose sur un plan incliné une masse de masse  $m$  initialement immobile. On fait varier l'angle d'inclinaison  $\mathcal{A}$  jusqu'à ce que la masse se mette à glisser. On note alors la valeur de  $\mathcal{A}$  et on en déduit la valeur de  $\mu_0$ . En effet, on a, au moment du glissement

$$\|\vec{\mathcal{R}}_T\| = \mu_0 \|\vec{\mathcal{R}}_N\|$$

De plus,

$$\begin{aligned}\|\vec{\mathcal{R}}_T\| &= \|\vec{\mathcal{R}}_{support}\| \sin(\mathcal{A}) \\ \|\vec{\mathcal{R}}_N\| &= \|\vec{\mathcal{R}}_{support}\| \cos(\mathcal{A})\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}\frac{\|\vec{\mathcal{R}}_T\|}{\|\vec{\mathcal{R}}_N\|} &= \mu_0 = \frac{\sin(\mathcal{A})}{\cos(\mathcal{A})} = \tan(\mathcal{A}) \\ \mu_0 &= \tan(\mathcal{A})\end{aligned}$$

### IV.3 Cas du glissement sans frottement de $\mathcal{S}_1$ sur $\mathcal{S}_2$ :

On a alors :

- $\mu = 0$  car  $\vec{\mathcal{R}}_T = \vec{0}$  et  $\vec{\mathcal{R}}_N \neq \vec{0}$
- $\vec{\mathcal{R}}_N = \vec{\mathcal{R}}_{2/1}$  et  $\vec{\mathcal{R}}_N \perp \vec{v}_{gl,2/1}$

En résumé,  $\vec{\mathcal{R}}_T = \vec{0}$  et  $\vec{v}_{gl,2/1} \neq \vec{0}$

### IV.4 Cas du roulement sans glissement de $\mathcal{S}_1$ sur $\mathcal{S}_2$ :

On a alors :

- on a des frottements
- $\vec{\mathcal{R}}_{2/1}$  n'est pas normale à  $\Pi$

En résumé,  $\vec{\mathcal{R}}_T \neq \vec{0}$  et  $\vec{v}_{gl,2/1} = \vec{0}$

## V Aspect énergétique

On définit la puissance élémentaire des actions de contact de  $\mathcal{S}_2$  sur  $\mathcal{S}_1$  par le comoment du torseur cinématique du point coïncidant à I (point de contact) sur le solide  $\mathcal{S}_1$  et du torseur de forces de  $\mathcal{S}_2$  sur  $\mathcal{S}_1$  :

$$\delta P_{2/1} = \mathcal{T}_{c_{I_1}} \otimes \mathcal{T} = \overrightarrow{R}_{2/1} \cdot \vec{V}_{I \in \mathcal{S}_1/R} + \vec{M}_{I_{2/1}} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{S}_1/R}$$

et le travail de ces actions de contact :

$$\delta W_{2/1} = \delta P_{2/1} dt = \overrightarrow{R}_{2/1} \cdot \vec{V}_{I \in \mathcal{S}_1/R} dt + \vec{M}_{I_{2/1}} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{S}_1/R} dt$$

De même, la puissance élémentaire des actions de contact de  $\mathcal{S}_1$  sur  $\mathcal{S}_2$  vaut :

$$\delta P_{1/2} = \overrightarrow{R}_{1/2} \cdot \vec{V}_{I \in \mathcal{S}_2/R} + \vec{M}_{I_{1/2}} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{S}_2/R}$$

On définit alors la puissance élémentaire des actions intérieures de contact entre  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  par :

$$\delta P_{int} = \delta P_{1/2} + \delta P_{2/1} = \overrightarrow{R}_{2/1} \cdot (\vec{V}_{I \in \mathcal{S}_1/R} - \vec{V}_{I \in \mathcal{S}_2/R}) + \vec{M}_{I_{2/1}} \cdot (\vec{\Omega}_{\mathcal{S}_1/R} - \vec{\Omega}_{\mathcal{S}_2/R})$$

Donc

$$\delta P_{int} = \overrightarrow{R}_{2/1} \cdot \vec{v}_{gl,2/1} + \vec{M}_{I_{2/1}} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2}$$

D'après les lois de Coulomb,  $\delta P_{int} \leq 0$  : le système constitué des deux solides perd de l'énergie à cause des frottements, ce qui n'empêche pas la puissance reçue par l'un ou l'autre des solides d'être positive.

On remarque que le travail (ou la puissance) des actions intérieures de contact entre  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  est indépendant du référentiel d'étude.

Dans le cas d'un glissement sans frottements :

$$\vec{R}_{2/1} \perp \vec{v}_{gl,2/1} \text{ et } \vec{M}_{I_{2/1}} = \vec{0}$$

donc  $\delta P_{int} = 0$

Dans le cas d'un roulement sans glissement :

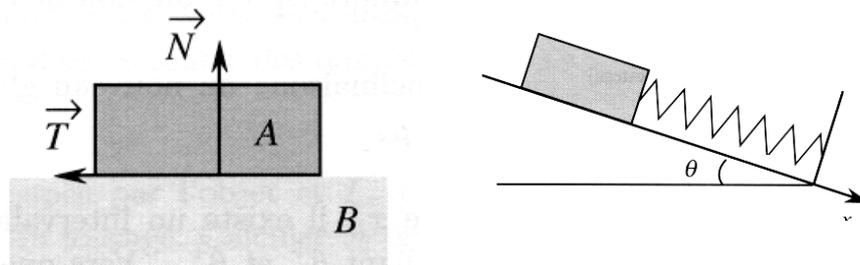
$$\vec{v}_{gl,2/1} = \vec{0} \text{ et } \vec{M}_{I_{2/1}} = \vec{0}$$

donc  $\delta P_{int} = 0$

## VI Exercices et applications

### VI.1 Phénomène d'hystérésis lié aux frottements (d'après X1999)

On considère une masse  $m$  sur un plan inclinable, fixée par un ressort de raideur  $k$ . A  $t = 0$ , le plan est à l'horizontal et on incline très lentement le plan, de manière à avoir une évolution quasi-statique. Une fois la verticale atteinte, on rediminue l'angle d'inclinaison du plan de manière quasi-statique. On note  $b = \frac{mg}{k}$ . On considèrera un coefficient de frottement statique  $\mu_s$  et on négligera le coefficient de frottement dynamique  $\mu_d = 0$ . Décrire l'évolution de la position  $x$  de la masse en fonction de l'angle d'inclinaison  $\theta$ . On notera  $\theta_{i+}$  les différentes valeurs de  $\theta$  pour lesquelles la masse se met à glisser lors de la montée du plan incliné et  $\theta_{i-}$  les différentes valeurs de  $\theta$  pour lesquelles la masse se met à glisser lors de la descente.



Résolution :

Explicitons la condition de non glissement : PFD à la masse dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, projeté sur les vecteurs de base :

$$mg \sin(\theta) + T - kx = 0$$

$$mg \cos(\theta) - N = 0$$

$$\frac{|T|}{N} < \mu_s \Rightarrow \left| \frac{x}{b} - \sin\theta \right| < \mu_s \cos\theta$$

La condition de non-glissement est donc :

$$-\mu_s \cos\theta + \sin\theta < x < b(-\mu_s \cos\theta + \sin\theta)$$

D'après le cours, on a  $\tan(\theta_{1+}) = \mu_s$  et on sait que la masse glissera jusqu'à  $x = b \sin\theta_{1+}$ . La condition de non glissement cesse d'être vérifiée si  $-\mu_s \cos\theta_{2+} + \sin\theta_{2+} = \sin\theta_{1+}$  et la masse glisse alors jusqu'à  $x_{2+} = b \sin\theta_{2+}$ .

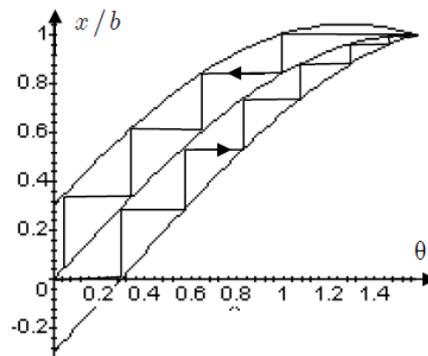
On peut réitérer pour arriver à la condition :

$$-\mu_s \cos\theta_{i+1,+} + \sin\theta_{i+1,+} = \sin\theta_{i,+}$$

Lors de la descente, on obtient, avec le même raisonnement, la condition :

$$\mu_s \cos\theta_{i+1,-} + \sin\theta_{i+1,-} = \sin\theta_{i,-}$$

et  $x_{i-} = b \sin\theta_{i-}$ , positions d'arrêt après glissement. En traçant  $\frac{x}{b}$  en fonction de  $\theta$ , on obtient le tracé d'une courbe d'hystérésis. On constate que l'existence des frottements rend impossible la connaissance de l'état du système à partir de la position de la brique à un instant  $t$ , à moins de connaître de façon détaillée l'histoire de la mise en équilibre.



Mme Dupont laisse tomber, par inadvertance, la bobine de fil à coudre qu'elle tenait dans sa main, et qui s'en va rouler sous le canapé. Séverine accourt pour essayer de la récupérer : elle tire le bout du fil, mais la bobine roule encore plus loin. Pierre décide alors de prendre l'affaire en main : doucement, il tire sur le fil, tout en chantant une berceuse. Ô miracle, la bobine, docilement, sort de sous le canapé en s'enroulant sur son fil. Pierre, fièrement, explique son astuce à Séverine ébahie.

Sur la figure 11.1, je t'ai représenté la bobine de fil et sa coupe transversale avec le bout du fil. J'exerce sur le fil une traction  $\vec{T}$ . La force normale au point d'appui A est  $\vec{N}$ , et au même point, une force de frottement  $\vec{F}$  s'oppose au glissement de la bobine. Celle-ci roulera dans la direction  $\vec{v}$ , si la somme de tous les moments prise au point A :

$$M = T \cos \alpha (R - r \cos \alpha) - (T \sin \alpha)(r \sin \alpha)$$

est positive. (Dans la situation représentée, elle roulera dans le sens des aiguilles d'une montre.) Tel sera le cas si  $\cos \alpha > r/R$ . Il faut donc tirer la ficelle plutôt horizontalement. Si  $\alpha$  est grand, la bobine tournera dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre, et le fil se dévidera davantage.

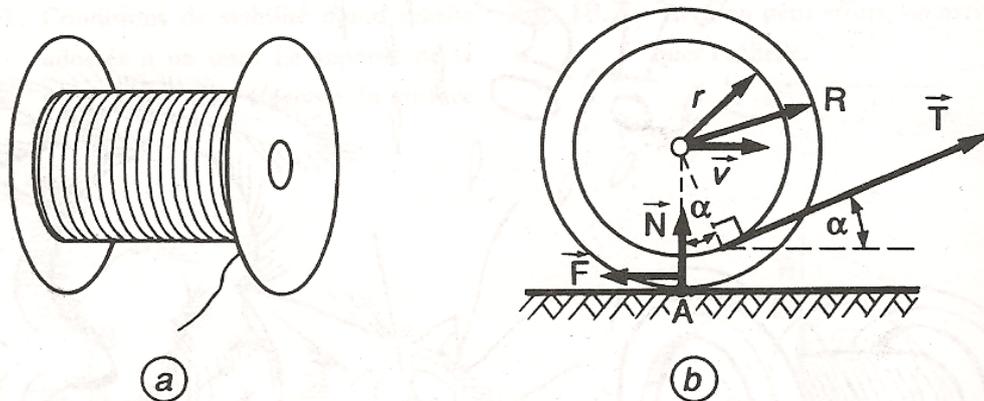


Fig. 11.1. Une bobine de fil (a) et sa coupe transversale (b).

## VI.2 Comment rattraper une bobine coincée sous un canapé ?