
Contact entre deux solides. Frottement de glissement. Applications au glissement et au roulement

Résumé

Prérequis : La représentation mécanique des actions mécanique par un torseur, Les théorèmes généraux de la mécanique.

Remarques du jury :

2009 : Il importe de distinguer le cas du contact ponctuel et celui du contact étendu sur une surface. La distinction de nature entre les deux lois de Coulomb : condition nécessaire de non glissement et loi du frottement de glissement, n'est pas suffisamment dégagée. Les phénomènes d'hystérésis associés au frottement solide sont oubliés.

2008,2007 : L'approche énergétique du contact doit être développée. Le roulement est trop rarement abordé. Il convient de s'interroger sur les passages entre les différents régimes de glissement et de non glissement.

2006 : L'approche énergétique du contact doit être développée et une description microscopique peut être esquissée.

Table des matières

I	Contact entre deux solides	2
I.1	Différents types de contacts	2
I.2	Modélisation des actions de contact	2
I.2.1	Réduction du torseur des action de contact	2
I.2.2	Rotation de roulement et rotation de pivotement	2
I.3	Définition de la vitesse de glissement	2
II	Lois phénoménologiques : Lois de Coulomb	3
II.1	Énoncé des lois de Coulomb	3
II.2	Cône de frottement	4
II.3	Applications	4
II.3.1	Hystérésis de frottement	4
II.3.2	Un oscillateur curieux	6
II.4	Interprétation microscopique	7
III	Point de vue énergétique	9
III.1	Puissance des actions de contact	9
III.2	Application, mesure d'un coefficient de frottement	9

I Contact entre deux solides

I.1 Différents types de contacts

On peut classer les contacts selon trois types :

- Ponctuel (ex : pointe de compas ou stylo bic sur une table)
- Linéique (ex : stylo à plat sur une table)
- Surfaccique

En pratique, tout les contacts sont surfacciques à cause de la déformation des solides au voisinage des points de contacts. Les contacts linéiques et ponctuels sont des modélisations physiques simplificatrices.

I.2 Modélisation des actions de contact

I.2.1 Réduction du torseur des action de contact

Soient deux solides S_1 et S_2 en contact. On peut représenter l'ensembles des actions mécaniques de contact exercée par le solide S_2 sur le solide S_1 au point I par un torseur \vec{R}, \vec{M}_I . Le point I est le point de contact entre les deux solides (cf figure 1). La position de I peut varier au cours du temps.

On décompose \vec{R} en \vec{N} et \vec{T} , avec \vec{N} la composante normale au plan tangent aux deux surfaces en I, et \vec{T} la composante tangentielle. On décompose de même \vec{M}_I en \vec{M}_n et \vec{M}_t , et on a les relations :

$$\vec{M}_I = \vec{M}_t + \vec{M}_n$$

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$$

On verra dans la section II ce que signifient ces décompositions en termes de frottements.

I.2.2 Rotation de roulement et rotation de pivotement

On se place dans un référentiel \mathcal{R} (référentiel du laboratoire). Soient $\Omega_{1/\mathcal{R}}$ et $\Omega_{2/\mathcal{R}}$ les vecteurs rotation des solides S_1 et S_2 dans \mathcal{R} , on a alors le vecteur rotation relatif $\Omega_{1/2}$ de S_1 par rapport au référentiel lié à S_2 :

$$\vec{\Omega}_{1/2} = \vec{\Omega}_{1/\mathcal{R}} - \vec{\Omega}_{2/\mathcal{R}}$$

On peut encore décomposer $\vec{\Omega}_{1/2}$ en deux vecteurs Ω_N et Ω_T de la même manière que les décompositions précédentes du moment et de la résultante. Ω_N est le vecteur rotation de pivotement, Ω_T est le vecteur rotation de roulement.

I.3 Définition de la vitesse de glissement

Soit I le point de contact entre les deux solides (on admet qu'on peut se restreindre à un point de contact même pour un contact surfaccique). Au cours du temps la position du point I varie. On note I_1 (respectivement I_2) le point du solide S_1 (respectivement S_2) confondu avec le point I à l'instant t. On définit alors la **vitesse de glissement** au point I du solide S_1 par rapport au solide S_2 par :

$$\vec{V}_{gl}(I \in 1/2) = \vec{V}(I_1/\mathcal{R}) - \vec{V}(I_2/\mathcal{R})$$

soit

$$\vec{V}_{gl}(I \in 1/2) = \vec{V}(I_1/2)$$

La vitesse de glissement se trouve dans le plan tangent entre les deux solide (si ce n'était pas le cas il y aurait enfoncement des solides l'un dans l'autre ou décollement, et donc plus de contact).

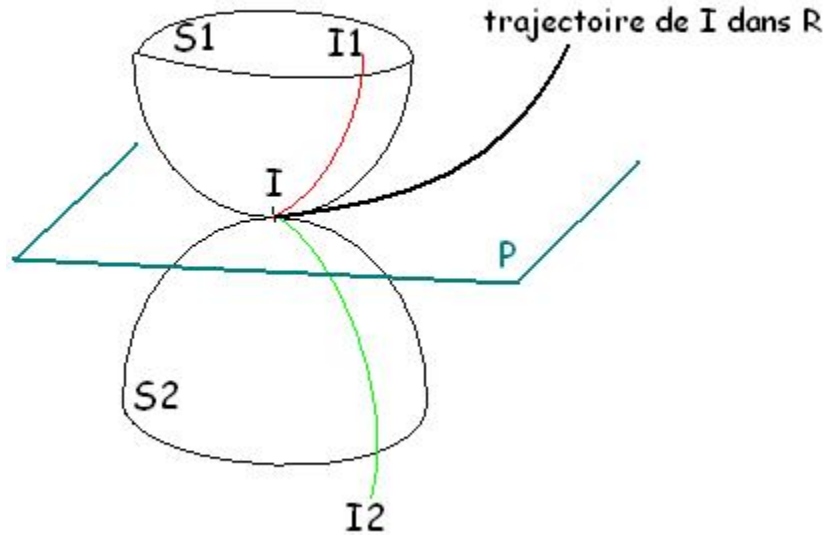


FIG. 1 – Schématisation des trajectoires des différents points.

D'autre part, si on écrit la relation caractéristique des torseurs cinématiques en un point M_1 de S_1 , on obtient :

$$\vec{V}(M_1/2) = \vec{V}_{gl}(I \in 1/2) + \vec{\Omega}_{1/2} \wedge \vec{IM}_1$$

Lorsque la vitesse de glissement est nulle, on parle de roulement sans glissement (quelquefois abrégé en RSG) : les deux solides "roulent" l'un sur l'autre un peu à la manière d'engrenages.

II Lois phénoménologiques : Lois de Coulomb

II.1 Énoncé des lois de Coulomb

Les lois de Coulomb sont des lois empiriques dans lesquelles on distingue les deux cas suivants :

Lorsque la vitesse de glissement est nulle la norme des composantes de la réaction du support vérifient :

$$\|\vec{T}\| \leq \mu_s \|\vec{N}\|$$

où μ_s est le coefficient de frottement statique (sans dimension).

Lorsqu'il y a glissement, alors la composante tangentielle de la réaction, qui est opposée à la vitesse, vérifie :

$$\|\vec{T}\| = \mu_d \|\vec{N}\|$$

Avec μ_d est le coefficient de frottement dynamique.

\vec{T} est appelée force de frottement car elle est de sens opposé à la vitesse de glissement (en régime dynamique) et s'oppose à une force de mise en mouvement en régime statique. Les coefficients de frottement ne dépendent que de la nature et de l'état des surfaces en contact. En particulier, ils ne dépendent pas de l'aire de la surface de contact (ceci peut s'expliquer à un niveau microscopique par la déformation des surfaces au niveau des points de contacts). On peut noter que \vec{N} joue un rôle notable dans l'**écrasement** local des surfaces, d'où son apparence dans les lois empiriques de Coulomb. Il existe des lois similaires avec les couples de roulement et de pivotement :

$$\|\vec{M}_n\| \leq \lambda_p \|\vec{N}\|$$

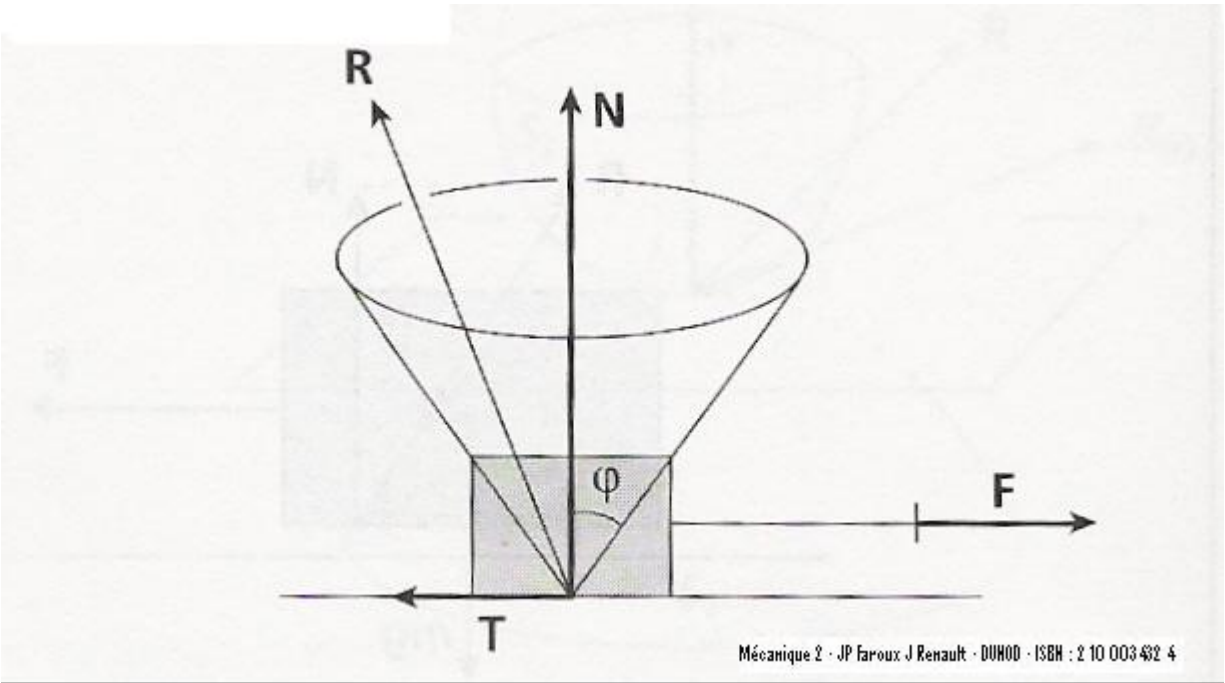


FIG. 2 – Cône de frottement

en régime statique et

$$\|\vec{M}_n\| = \lambda'_p \|\vec{N}\|$$

en régime dynamique. λ_p (respectivement λ'_p) est le coefficient de frottement de pivotement statique (respectivement cinétique). Il faut exercer un couple de pivotement minimal afin de "vaincre" \vec{M}_n , qui est appelé frottement de pivotement. De même :

$$\|\vec{M}_t\| \leq \delta \|\vec{N}\|$$

en régime statique et

$$\|\vec{M}_t\| = \delta_c \|\vec{N}\|$$

en régime dynamique, avec les mêmes définitions et déductions que ci-dessus, en remplaçant pivotement par roulement.

II.2 Cône de frottement

En exprimant de la condition de non glissement, on peut définir un angle de glissement φ tel que :

$$\mu_s = \tan(\varphi)$$

. Cet angle correspond à $\|\vec{T}\|/\|\vec{N}\|$. Tant que la réaction du support reste dans le cône de demi-angle au sommet φ et d'axe dirigé par \vec{N} , il n'y a pas de glissement (voir figure 2). Ce cône est appelé cône de frottement¹.

II.3 Applications

II.3.1 Hystérésis de frottement

On se place dans le cas où les coefficients de frottement statique et dynamique sont égaux : $\mu_s = \mu_d = \mu$. Considérons une masse m tirée par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 (cf figure 3).

¹étant donnée la faible différence entre coefficient de frottement statique et coefficient de frottement dynamique, on définit en fait un cône de frottement pour chacun de ces régimes.

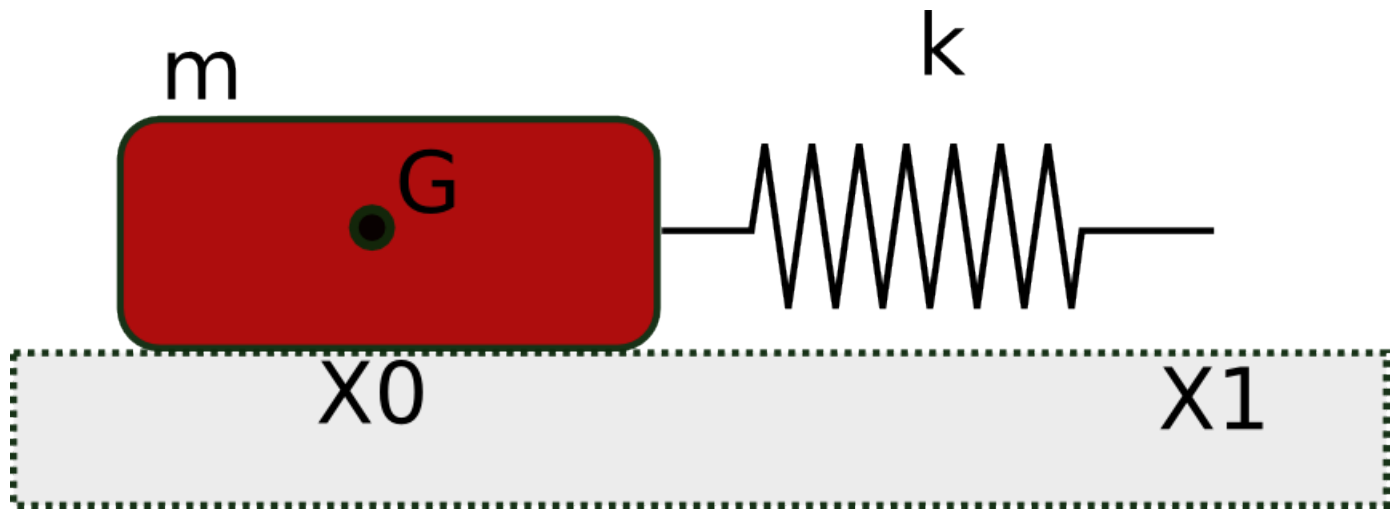


FIG. 3 – Schéma du problème

On tire le ressort vers la droite, à la limite du décrochage, on a alors (égalité des torseurs dynamique et d'action) l'équation :

$$F = T = \mu.N = \mu.m.g$$

N est obtenu par la projection de l'égalité sur \vec{e}_z . On en déduit, en projection sur \vec{e}_x :

$$m\ddot{x}_G = k(x_A - x_G - l_0) - \mu.m.g$$

Remarque : en traitant x_A comme variable, on obtient la limite de décrochage pour $x_A = l_0 + \frac{\mu.m.g}{k}$. Lorsqu'il n'y a plus de mouvement (celà est dû au frottement), la position x_G de G en fonction de la position de l'extrémité du ressort (A) est :

$$x_G = x_A - \frac{\mu.m.g}{k} - l_0$$

On peut alors continuer à tirer, on obtient ainsi la portion de droite où x_A augmente sur la figure 4. Quand on repousse le ressort vers la gauche, alors on est à l'équilibre statique jusqu'à ce que $x_A - x_G = l_0 - \frac{\mu.m.g}{k}$ (voir figure 4, il s'agit de la portion de ligne horizontale d'ordonnée la plus haute). On a alors

$$m\ddot{x}_G = -k(l_0 - (x_A - x_G)) + \mu.m.g$$

et

$$x_G = x_A - l_0 + \frac{\mu.m.g}{k}$$

On obtient le reste de la courbe qui présente un phénomène caractéristique d'hystérésis.

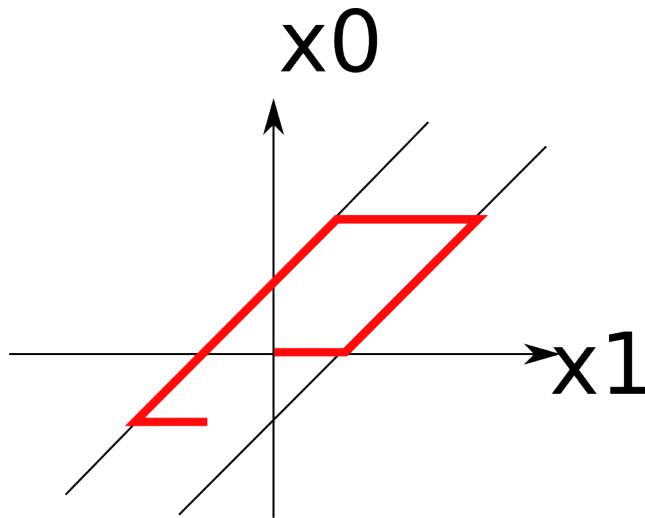
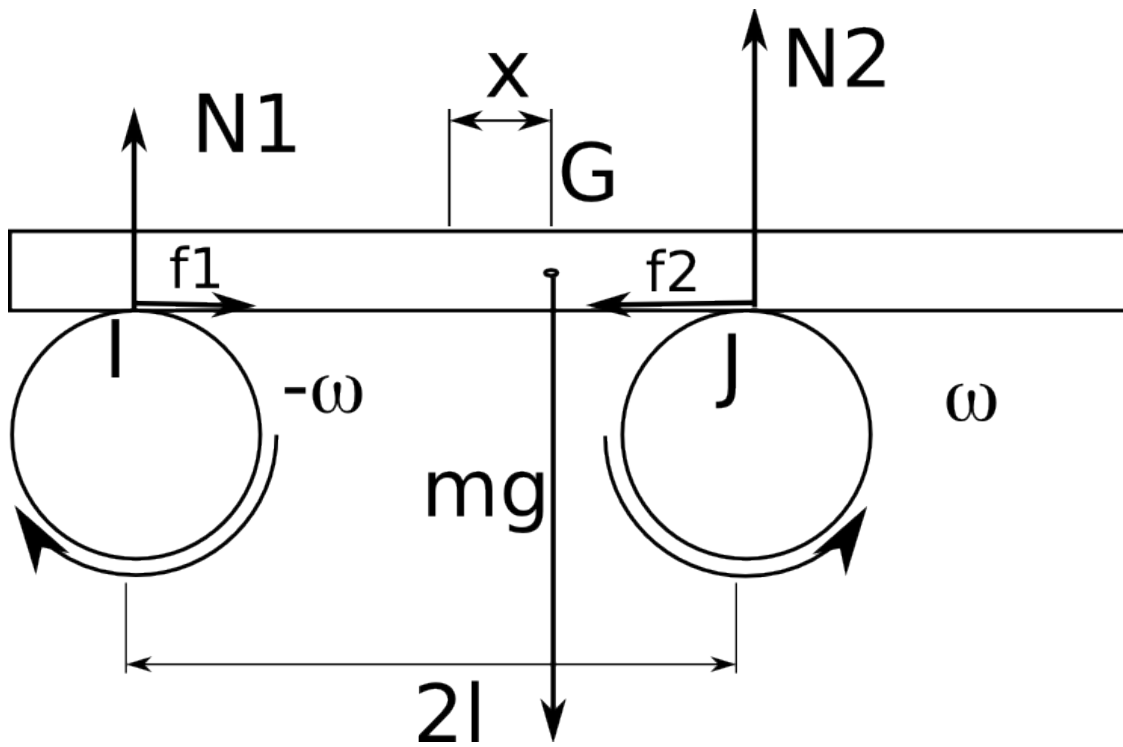


FIG. 4 – Hystérésis dans le cas de l'égalité des coefficients de frottement.

II.3.2 Un oscillateur curieux



On a

$$N1 + N2 = m.g \quad (1)$$

$$N1 = m.g - N2 \quad (2)$$

$$N1 * (l + x) = N2 * (l - x) \quad (3)$$

$$(4)$$

Soit

$$N2 = \frac{m.g(l + x)}{2l}$$

et sont équivalent pour N1

$$N1 = \frac{mg}{2} \left(1 + \frac{x}{l}\right)$$

Glissement permanent

On peut vérifier que nos résultats ne sont pas aberrant en se palçant en des valeurs de x particulière (0,-1,l). plaçons nous dans une hypothèse de glissement permanent (dont on verrifiera plus tard la véracité). On peut voir avec les mains que la vitesse de glissement est toujours dans la même direction, vers le centre des cylindre. d'après les loi de coulomb, on à :

$$f_1 = \|\mathbf{R}_1\|\mu_d \quad (5)$$

$$f_2 = -\|\mathbf{R}_2\|\mu_d \quad (6)$$

$$(7)$$

On Peut donc en déduire l'équation du mouvement :

$$m\ddot{x} = \mu_d \frac{m.g}{2} \left(1 - \frac{x}{l}\right) - \mu_d \frac{m.g}{2} \left(1 + \frac{x}{l}\right) \quad (8)$$

$$\ddot{x} + \mu_d \cdot \frac{g}{l} x = 0 \quad (9)$$

soit en notant $\omega = \sqrt{\mu_d g/l}$:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t)$$

On en déduit la vitesse maximale de la planche qui est : $\omega * x_0$. il y a en permanence si

$$\omega x_0 < \Omega R$$

Roulement

Supposons que la planche roule sur le cylindre 2 pour commencer, alors, la vitesse est constante et l'on a en appliquant le théorème du centre de masse à la planche dans le ref du labo :

$$f_2 + f_1 = 0 \quad (10)$$

ie

$$\mu_d \frac{m.g}{2} \left(1 + \frac{x}{l}\right) + f_1 = 0 \quad (11)$$

or

$$\|f_1\| < \mu_s \frac{m.g}{2} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad (12)$$

il y a donc glissement dès que :

$$x = l \frac{\mu_s - \mu_d}{\mu_s + \mu_d} \quad (13)$$

II.4 Interprétation microscopique

Il est loin d'être évident de calculer la façon dont interagissent deux solides en contact, en particulier à cause du nombre d'atomes mis en jeu mais aussi à cause de la grande irrégularité des contacts (voir figure 5). On va modéliser **très grossièrement** ce qui se passe à petite échelle (cf figure 6). On considère une surface microscopique avec des aspérités de pente caractéristique α sur laquelle on applique une force $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$.

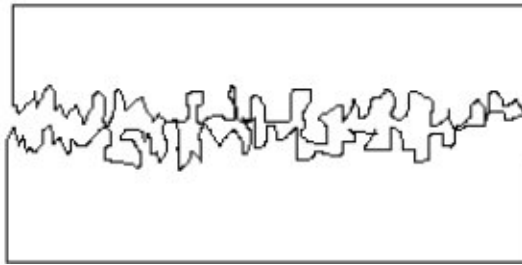


FIG. 5 – Zoom sur les surfaces en contact.

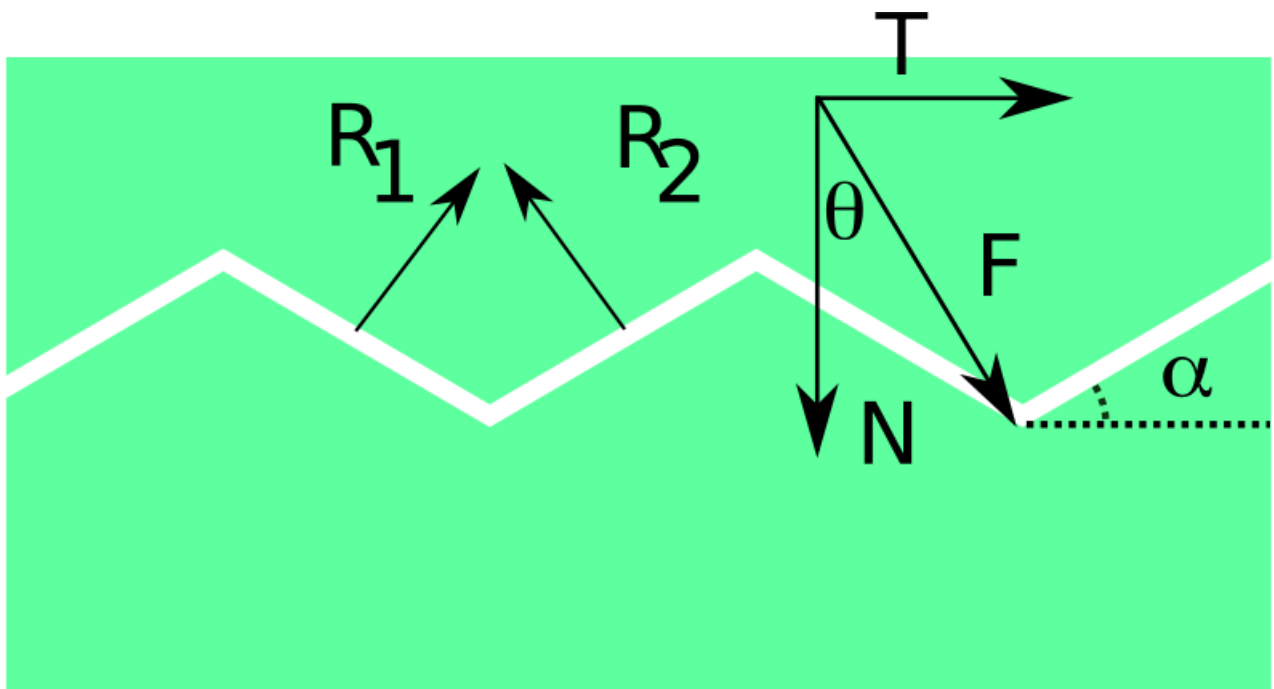


FIG. 6 – Modélisation du contact.

on a les relations suivantes :

$$T + (R_2 - R_1) \sin \alpha = 0 \quad (14)$$

$$-N + (R_1 + R_2) \cos \alpha = 0 \quad (15)$$

On trouve alors

$$R_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{T}{\sin \alpha} + \frac{N}{\cos \alpha} \right) \quad (16)$$

$$R_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{-T}{\sin \alpha} + \frac{N}{\cos \alpha} \right) \quad (17)$$

Il y a glissement dès que l'une des deux réactions est nulle, soit :

$$\frac{T}{N} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha = \mu \quad (18)$$

Quelle que soit la valeur de $\|\vec{F}\|$, si $\theta < \alpha$, il n'y a pas glissement. Par contre, si $\theta > \alpha$, quelle que soit la valeur de $\|\vec{F}\|$, il y a glissement.

III Point de vue énergétique

III.1 Puissance des actions de contact

On reprend les notations du I. Afin de simplifier les calculs on fera l'hypothèse que le contact est ponctuel. La puissance des actions mécaniques qui s'exercent sur le solide S_1 en ce point est le produit du torseur dynamique par le torseur des actions :

$$P(S_2 \longrightarrow S_1) = \vec{R} \cdot \vec{V}(I_1) + \vec{M}_{I_1} \cdot \vec{\Omega}_{2/1}$$

On fait le même calcul pour l'autre solide, et on obtient :

$$P_{\text{totale}} = \vec{T} \cdot \vec{V}_g + (\vec{M}_{I_1} - \vec{M}_{I_2}) \cdot \vec{\Omega}_{2/1} \leq 0$$

ce qui n'empêche pas la puissance sur l'un ou l'autre des solides d'être positive. La puissance est nulle si

- Le coefficient de frottement est nul : glissement parfait (exemple : patinoire parfaite).
- il n'y a pas glissement (roulement sans glissement, $\vec{V}_g = \vec{0}$).

III.2 Application, mesure d'un coefficient de frottement

sur la première partie du mouvement, on considère les deux masses, ie sur la longueur h , on a :

$$\begin{aligned} \Delta E_{m_{1+2}} &= W_f \\ 1/2(M_1 + M_2) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - M_2 \cdot g \cdot h &= -M_1 \cdot g \cdot \mu_s \times h \end{aligned}$$

soit

$$V(h) = \sqrt{\frac{g \cdot h (M_2 - M_1 \mu_s)}{\frac{1}{2}(M_1 + M_2)}}$$

Sur la seconde partie du mouvement il n'y a pas de variation d'énergie potentielle ie

$$\begin{aligned}\Delta E_c &= W_f \\ 0 - 1/2 M_1 V(h)^2 &= -M_1 g \mu_s \times d \\ \frac{h \cdot M_1 \cdot (M_2 - M_1 \mu_s)}{M_1 + M_2} &= \mu_s \times d \\ \frac{h \cdot M_1 \cdot M_2}{M_1 + M_2} &= \mu_s \times \left(\frac{M_1 + M_2}{M_1 + M_2} d + \frac{M_1}{M_1 + M_2} h \right) \\ \mu_s &= \frac{M_2 \cdot h}{M_2 \cdot d + M_1 \cdot (h + d)}\end{aligned}$$

Remarques diverses

- La leçon manque de manips, il faudrait faire la manip de Timochenko avec un balai et deux doigts.
- Pour l'hystérésis, il existe un exemple plus simple (voir référence [4]).
-

Références

- [1] *Toute la Mécanique*, MPSI – PCSI, MP – PC – PSI, Bocquet Lydéric, Faroux Jean-Pierre, Jacques Renault, Dunod 2002, [53.4 BOC]
- [2] *Mécanique du solide*, MP – MP* – PC – PC* – PT – PT*, HPrépa, Éditions Hachette, [53.4 BRE]
- [3] *Mécanique des systèmes et du solide*, MP – MP* – PT – PT*, Éditions ellipses, [53.4 GRO]
- [4] http://csidoc.insa-lyon.fr/these/2002/al_majid/