

Systèmes linéaires d'équations différentielles.

$$1 \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z \\ \frac{dy}{dt} = z + x \\ \frac{dz}{dt} = x + y \end{cases} \quad 2 \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y - z \\ \frac{dy}{dt} = x - y + z \\ \frac{dz}{dt} = -x + y + z \end{cases} \quad 3 \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -23x - 18y \\ \frac{d^2y}{dt^2} = 36x + 28y \end{cases} \quad 4 \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y - z \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y - 2z \\ \frac{dz}{dt} = 2x + y + 4z \end{cases}$$

$$5 \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = x + y + z \\ \frac{dz}{dt} = -x \end{cases} \quad 6 \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - 2z \\ \frac{dy}{dt} = -x + y - z \\ \frac{dz}{dt} = 2x + y + 4z \end{cases} \quad 7 \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - y + z \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 2y \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 3z \end{cases} \quad 8 \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5x + 18y - 24z \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 19y + 24z \\ \frac{dz}{dt} = 4x - 18y + 23z \end{cases}$$

9 Soit $\mathcal{B} \in (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que

$$\text{Mat}(f, \mathcal{B}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -1 & 7 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} = A.$$

1. A est-elle diagonalisable ?

2. Vérifier que $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ appartiennent à l'espace propre relatif à la valeur propre 2.

3. Trouver un \vec{w} tel que $f(\vec{w}) = \vec{v} + 2\vec{w}$. En déduire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}' \in (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

4. Résoudre le système
$$\begin{cases} 3 \frac{dx}{dt} = 7x - y - z \\ 3 \frac{dy}{dt} = -x + 7y + z \\ 3 \frac{dz}{dt} = 2x - 2y + 4z \end{cases}.$$

10 Deux masses m_1 (1 kg) et m_2 (2 kg) sont reliées par un ressort de raideur $k=2$ et de longueur à vide $l_v=1$. Elles sont posées à terre et $x_1=0$ et $x_2=l_v$. Rien ne bouge.

A minuit ($t=0$), Batman envoie une pichenette dans m_1 , ce qui lui donne une vitesse (à la masse m_1 , pas à Batman) de $\dot{x}_1(0) = 3m/s$. Que se passe-t-il ? (il n'y a pas de frottement.)