

SUITES.

1. $u_0 = 1$; $u_{n+1} = \frac{u_n - 6}{u_n - 4}$ $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 2}$

Montrer que (v_n) est une suite géométrique. En déduire la valeur de v_n puis de u_n . Convergence de ces suites ?

2. Étudier la monotonie de $u_n = \frac{n!}{2^n}$, pour $n > 1$.

3. Calculer $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2^k}$ pour $n > 0$.

$u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k2^k}$. Montrer que cette suite est bornée, étudier sa croissance, et montrer qu'elle converge.

4. Trouver la suite arithmétique vérifiant $u_{100} = 52$ et $u_{200} = 3$

5. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2} \end{cases}$, pour $n \geq 0$

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Montrer qu'elle diverge. (On pourra procéder par l'absurde)
En déduire la limite de u_n en $+\infty$.

6. Calculer $\sum_{k=0}^n \cos k\theta$ et $\sum_{k=0}^n \sin k\theta$ pour n entier naturel.

7. Calculer $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \cos k\theta$ et $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \sin k\theta$. (maison)

8. Calculer $\sum_{k=1}^n \cos(2k-1)\theta$. (maison)

9. Étudier la convergence des suites de terme général :

a. $u_n = 2n \ln(1 + 3/n)$ b. $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ c. $w_n = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$ d. $x_n = n \cos(1/n)$

10. Étudier la convergence des suites de terme général :

a. $u_n = (5/4)^n - (6/5)^n$ b. $u_n = \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$ c. $u_n = n \sin(\pi/n)$ d. $u_n = n \cos(n\pi/4)$ e. $u_n = \frac{3^n \ln n}{n!}$

11. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 5 - \ln(u_n + 2)$

Étudier $f(x) = 5 - \ln(x + 2)$. Trouver une valeur approchée de a tel que $f(a) = a$.

Représenter la suite (u_n) . Trouver un intervalle $[b, c]$ contenant tous les u_n .

Majorer $|f'(x)|$ sur $[b, c]$. A l'aide de l'IAF, Montrer que la suite (u_n) converge vers a

12. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 100 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 10} \end{cases}$, pour $n \geq 0$

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, décroissante, bornée, convergente. Donner sa limite.

13. La suite $(u_n)_{n>0}$ est croissante. $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} u_k$. Montre que la suite $(v_n)_{n>0}$ est croissante. (maison)

14. Soit $p \geq 2$. $u_n = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \dots + \frac{1}{n^p}$. a. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

b. Lorsque $p = 2$, montrer que $u_n \leq 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = \frac{2n-1}{n}$. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CV.

c. Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

15. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}$.

Montrer que les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge

16. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k.k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n^2.n!}$. Montrer que ces deux suites sont adjacentes. (maison)

17. Trouver la suite définie par $u_0 = 2$; $u_1 = 13$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}$, $\forall n \geq 1$.

18. Trouver la suite définie par $u_0 = 4$, $u_1 = 1/3$ et $u_{n+1} = \frac{1}{6}(u_n + 2u_{n-1})$, $\forall n \geq 1$.

19. Idem avec $u_0 = 1$; $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$, $\forall n \geq 0$.

20. Trouver la suite définie par $u_0 = 3$; $u_1 = 8$ et $u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1}$, $\forall n \geq 1$. (maison)

21. Trouver les suites vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0$ (maison)

22. Étudier la suite définie par $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$ dans les trois cas suivants :

a. $u_0 = 1$ b. $u_0 = 4$ c. u_0 est un élément quelconque de $[-3/2, +\infty[$.

23. Étudier la suite définie par : $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

24. Variante de l'exercice précédent : $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

a. montrer que $\forall x \geq 0, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ b. Trouver L tel que $L = f(L)$

c. Montrer que $\left| u_{n+1} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \left| u_n - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right|$, $\forall n \geq 1$. (IAF)

d. Soit $v_n = \left| u_n - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right|$ Comparer v_n et v_0 . En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$. Étudier u_n .

25. Étudier la suite définie par : $u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}$. On vérifiera que $0 \leq u_n \leq 3/2$ pour $n > 1$; puis on utilisera l'IAF après avoir trouvé un majorant de $|f'(x)|$ sur l'intervalle $[0, 3/2]$ ($f(x) = \sqrt{2-x}$)

26. $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$ et $v_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.