

SERIES NUMERIQUES.

Quelle est la nature des séries dont le terme général est donné ci-après ?

Thème 1 : Equivalents, développements limités.

1. $u_n = \frac{n^2 + 1}{-3n^4 + n + 1}$; $v_n = \frac{2^n + n^3}{3^n + n}$.
2. $a_n = \sin \frac{1}{n^2}$; $b_n = \sqrt{n} \sin \frac{1}{n}$; $c_n = \frac{\sin(1/n)}{\sqrt{n}}$.
3. $u_n = e^{\frac{1}{n^2}} - 1$.
4. $u_n = \tan(\pi\sqrt{n^2 + 1})$.
5. $u_n = n + 2 - \sqrt{n^2 + 4n + 1}$.
6. $u_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos \frac{1}{n}\right) - 1$.
7. $u_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$. (On rappelle la formule de Stirling : $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.)
8. $u_n = e^{\frac{\ln n}{n^3}} - 1$; $v_n = e^{\frac{\ln n}{n}} - 1$.
9. $u_n = \frac{1}{n} \ln n \ln(1 + 1/n)$.
10. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n$.

Thème 2 : Majorations, minoration, encadrement.

11. Série de terme général : $u_n = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{n-1}{n}}$.
12. $a_n = \frac{\ln n}{n^3}$; $b_n = \frac{\ln n}{n^2}$; $c_n = \frac{\ln n}{n^{1,1}}$; $d_n = \frac{\ln n}{n}$; $e_n = \frac{\ln n}{n^\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).
13. $u_n = \frac{\ln^2 n}{n^\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).
14. $u_n = \frac{\ln^2 2 + \ln^2 3 + \dots + \ln^2 n}{n^\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$). (encadrer le numérateur.)
15. $u_n = \frac{\sin \frac{1}{n^2} + \sin \frac{2}{n^2} + \dots + \sin \frac{n-1}{n^2}}{\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n-1}{n}}$.

(On pourra, pour x assez petit et positif, encadrer $\sin x$ entre $\frac{1}{2}x$ et x .)

16. $u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$. ($\alpha \neq 1$)
17. $a_n = e^{-n}$; $b_n = n^{32} e^{-n}$; $c_n = n^\alpha e^{-n}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).
18. $u_n = (3n^2 + n + 1)e^{-2n^2 + 1}$.

Thème 3 : Règle de D'Alembert .

19. $a_n = \frac{n^3}{2^n + n}$.

20. $a_n = e^{-n}$; $b_n = \left(\frac{1}{n}\right)^n$ (on pourra remarquer que $\frac{n}{n+1} < 1$)

21. $u_n = \frac{1}{n!}$; $v_n = \frac{x^n}{n!}$ ($x \in \mathbb{R}$)

22. $u_n = \frac{n^n}{n!(e+1)^n}$; $v_n = \frac{n^n}{n!(e-1)^n}$.

23. $u_n = \frac{x^n}{n}$ ($x \in \mathbb{R}$)

24. $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Thème 4 : Convergence absolue ; séries alternées.

25. $a_n = \frac{(-1)^n}{n^{2/3}}$; $b_n = \frac{(-1)^n}{n^{2/3} + (-1)^n}$. (cours)

26. $a_n = (-1)^n \sqrt{n} \sin(1/n)$; $a_n = (-1)^n \sin(1/n^{1/3})$.

27. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$. ($\alpha > 0$)

28. $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$; $v_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n+2}\right)$.

29. $u_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{1/2} - 1$. (maison)

30. $b_n = \left[e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 \right]$. (maison)

31. $u_n = (-1)^n \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$. (Il s'agit du critère des séries alternées fort)

Divers :

32. $u_n = (1 + 1/n)^n$.

33. u_n vérifie : $u_{n+1} = 0.5 + 2(u_n)^2$. Montrer que $\sum u_n$ diverge (On pourra procéder par l'absurde.)

34. $u_n = \int_1^\infty e^{-x^n} dx$. (minorer u_n par la surface d'un triangle.)

35. $u_n = \int_n^{2n} \frac{dt}{1+t^{3/2}}$. (encadrer la fonction $\frac{1}{1+t^{3/2}}$ pour $t \in [n, 2n]$.)

36. convergence et valeur de la série de terme général : $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

(On pourra décomposer la fraction a_n en éléments simples.)

37. convergence et valeur de la série de terme général : $a_n = \frac{2}{(n-1)n(n+1)}$. (maison)

(On pourra décomposer la fraction a_n en éléments simples.)

38. On sait que $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

39. Exprimer la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ en fonction de $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.