

SERIES ENTIERES

1. Déterminer les rayons des séries entières suivantes :

a. $\sum \frac{n+1}{n+2} x^n$ b. $\sum \frac{(2^n + n)}{n^3} x^n$ c. $\sum \left(e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right) z^n$

2. Calculer les valeurs des séries entières suivantes:

a. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ b. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)(n+2)}$ (maison) c. $\sum_1^{+\infty} nx^n$ d. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 x^n}{n!}$ e. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n^2 + n + 3)x^n}{n!}$ f. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n \sin n\theta}{n!}$

3. Développer en séries entières les fonctions suivantes; et calculer leur rayon.

a. $f(x) = \int_0^x \frac{e^t - 1}{t} dt$ b. $g(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ c. $\frac{1}{1 - 3x + 2x^2}$ d. $\sin^2 x$ (maison)

e. $\arctan x$ f. $\frac{1}{1 - x + x^2}$ (On trouve $\sum_0^{+\infty} \frac{\sin(n+1)\pi/3}{\sin \pi/3} x^n$ pour $|x| < 1$) g. $\frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

Utilisation des SE pour résoudre une équation différentielle :

4. A quelle condition doit satisfaire la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ soit solution de l'équation différentielle : $4xy'' + 2y' + y = 0$.

Déterminer la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque $a_0 = 1$, et montrer que la série obtenue est égale à $\cos \sqrt{x}$ ou $\operatorname{ch} \sqrt{-x}$ selon que x est positif ou négatif.

5. Même travail avec l'équa diff $xy'' + 3y' - 4x^3y = 0$

6. Soit $f \begin{cases} [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (\arcsin x)^2 \end{cases}$. Montrer que f est solution de l'équa diff : $(1-x^2)y'' - xy' = 2$

En déduire que f est développable en série entière et trouver son développement. (maison)

exos un peu tordus :

7. Déterminer le rayon de convergence de la SE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ où a_n est le nombre de diviseurs de n .

(On pourra utiliser le théorème de comparaison)

8. Trouver le rayon de la SE $\sum_{n=0}^{+\infty} n! z^{(n^2)}$

9. Trouver deux SE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ de rayon 1 telles que $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n$ soit de rayon 2.

(Est-il possible de trouver 2 SE de rayon 1 telles que la somme soit de rayon $\frac{1}{2}$?)

10. Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une SE de rayon R . Quel est le rayon de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{2n}$?