

## Réduction des endomorphismes.

1. Soit  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  tel que :  $Mat(f, B) = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = A$

Montrer que  $\vec{u} = (1 \ 1 \ 0)$  est un vecteur propre de  $f$ . Quelle est la valeur propre associée à  $\vec{u}$  ?

2. Soit  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  tel que :  $Mat(f, B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = A$

Montrer que  $\vec{u} = (1 \ 0 \ -1)$  est un vecteur propre de  $f$ . Quelle est la valeur propre associée à  $\vec{u}$  ?

3. On cherche toutes les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ;  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant pour tout  $n \in \mathbb{N}$  le système :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n - b_n - c_n \\ b_{n+1} = -a_n + 2b_n - c_n, \text{ et telles que } a_0 = b_0 = c_0 = 1. \\ c_{n+1} = a_n + b_n + 4c_n \end{cases}$$

a. Donner l'écriture matricielle du système.

b. Quelle relation matricielle y a-t-il entre  $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$  ?

c. Diagonaliser la matrice du a, et en déduire sa puissance  $n^{\text{ième}}$ . Conclure.

4. Soit  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  tel que :  $Mat(f, B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = A$

a.  $f$  est-il diagonalisable ?

b. On note  $\vec{u} = (1 \ 0 \ -1)$ . Trouver un vecteur  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$  tel que  $f(\vec{v}) = 2\vec{v} + \vec{u}$ .

c. Trouver un vecteur  $\vec{w}$  tel que si  $B' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ , alors  $Mat(f, B') = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A'$ .

d. Calculer  $(A')^n$  et en déduire  $A^n$ . (On trouve :  $(A')^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .)

5. Sans autre calcul que le polynôme caractéristique, dire si les matrices suivantes sont diagonalisables.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 0 \\ 6 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Pour la matrice B, on pourra procéder par l'absurde.}$$

6. Les matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$  ;  $B = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  sont-elles diagonalisables ?

7. Trouver les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ;  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant :  $a_0 = b_0 = c_0 = 1$  et  $\begin{cases} a_{n+1} = a_n - c_n \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n + c_n \\ c_{n+1} = 2a_n + 4c_n \end{cases}$ .

8.  $p$  est la projection orthogonale sur le plan de  $\mathbb{R}^3$  d'équation cartésienne  $x-2y-2z = 0$ .

a. Quelle est la matrice de  $p$  dans une base de vecteurs propres de  $p$  ?

b. Quelle est la matrice de  $p$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  ?