

POLYNOMES

FACTORISATION

1. Factoriser $2X^4+32i$.
2. Factoriser X^6+64 dans $C[X]$, puis dans $R[X]$.
3. Factoriser $X^6+X^4+X^2+1$ dans $C[X]$, puis dans $R[X]$.
4. Factoriser $X^{2n}+X^{2n-2}+\dots+X^2+1$ dans $C[X]$, puis dans $R[X]$.
5. Factoriser $2X^4+162$ dans $C[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$. (maison)
6. Trouver les racines doubles de $P(X) = (X+1)^7 - X^7 - 1$.
En déduire une factorisation de $(X+1)^7 - X^7 - 1$ dans $C[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

DIVISIBILITE

7. Montrer que pour tout $n > 0$, $(X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1$ est divisible par X^2-3X+2 .
8. Montrer que pour tout $n > 0$, $X^{n+1} - X^n - X + 1$ est divisible par $(X-1)^2$.
9. Montrer que $X^7-6X^6+9X^5+6X^4-24X^3+18X^2+8X-24$ est divisible par $(X-2)^2(X-3)(X+1)$.
10. Si p et q sont premiers entre eux, montrer en considérant les racines du polynôme $(X^p-1)(X^q-1)$ que $(X-1)(X^{pq}-1)$ est divisible par $(X^p-1)(X^q-1)$.
11. Pour quelles valeurs de m le polynôme $(X+1)^m - X^m - 1$ est-il divisible par X^2+X+1 ?
12. Trouver tous les polynômes divisibles par leur dérivée.
13. Montrer que pour tout $n > 0$, le polynôme $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ est divisible par $(X-1)^2$ (maison)

RACINES

14. Trouver m et p tels que $X^6+mX^4+10X^3-6X+p$ ait une racine quadruple réelle.
15. Résoudre l'équation $8X^4-4X^3+2X^2-3X+1 = 0$ sachant qu'il y a une racine multiple.
16. a. Montrer que si $p \in \mathbb{Z}$ est racine du polynôme $a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$, alors a_0 est divisible par p .
Application : Factoriser le polynôme $4X^3-8X^2+7X-3$ dans $R[X]$.
b. Montrer que si $p/q \in \mathbb{Q}$ (où p et q sont premiers entre eux et q non nul) est racine du polynôme $a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$, alors a_0 est divisible par p et a_n est divisible par q .
Application : En déduire les racines rationnelles de $4X^3-8X^2+5X-3$ et $2X^5-5X^4-21X^3-15X^2-23X-10$.

DIVISION EUCLIDIENNE

17. Soit $P(X) = (X-3)^{2n} - 2(X-2)^n + 1$. ($n > 0$)
Quel est le reste de la division euclidienne de P par $X-2$; par $(X-2)(X-3)$; par $(X-2)^2$?
18. Trouver un polynôme $P \in R[X]$ de degré 2 dont les restes de la division euclidienne de P par $X-1$, $X-2$ et $X-3$ soient respectivement a , b et c . (3 réels donnés)
19. Soit $P(X) = (X+1)^{2n} + (X-1)^{2n} + 1$. ($n > 0$)
Quel est le reste de la division euclidienne de P par $X-1$; par $(X+1)(X-1)$; par $(X-1)^2$. (maison)