

## MATRICES.

1. Soit  $A(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}x & \operatorname{sh}x \\ \operatorname{sh}x & \operatorname{ch}x \end{pmatrix}$ . Calculer  $A(x).A(y)$ , puis  $[A(x)]^n$  pour  $n > 0$ .

On rappelle que  $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}x.\operatorname{ch}y + \operatorname{sh}x.\operatorname{sh}y$  et  $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{ch}x.\operatorname{sh}y + \operatorname{sh}x.\operatorname{ch}y$

2. Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^n$ . Énoncer un résultat général sur les matrices diagonales.

3. On considère les matrices  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . ( $A = I_3 + B$ )

Pour  $n > 0$ , calculer  $B^n$ . En déduire la valeur de  $A^n$  à l'aide de la formule du binôme.

Vérifier le résultat obtenu par récurrence.

4. On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Trouver toutes les matrices  $X$  telles que  $A.X = A$ .

5. Inverse des matrices :  $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  ;  $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  ;  $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$  ;  $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

ainsi que les coordonnées de  $(1,1,1)$  dans la nouvelle base.

6.  $A$  est une matrice à coefficients réels ayant  $p$  lignes et  $q$  colonnes.

Montrer que  $A.^tA$  et  $^tA.A$  sont des matrices carrées et symétriques.

7. On dit qu'une matrice carrée  $A$  est nilpotente si et seulement si il existe un entier positif  $p$  tel que  $A^p = 0$ .

On définit, lorsque  $A$  est nilpotente  $e^A = \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$ .

a Soient  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Vérifier que  $A$  et  $B$  sont nilpotentes, et calculer  $e^A$  et  $e^B$ .

b Montrer que si  $C$  est nilpotente, alors la matrice  $I-C$  est inversible, et calculer son inverse.

c Montrer que si  $C$  et  $D$  sont nilpotentes, et si  $C.D = D.C$ , alors  $C+D$  est nilpotente.

8. Soit  $E$  l'ensemble des matrices réelles de la forme  $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3c & a-3c & b \\ 3b & -3b+3c & a-3c \end{pmatrix}$ .

a. Montrer que  $E$  est un espace vectoriel.

b. Trouver trois matrices  $I, J,$  et  $K$  de  $E$ , indépendantes de  $a, b$  et  $c$  telles que toute matrice de  $E$  s'écrive de la forme  $M(a,b,c) = aI+bJ+cK$ .

c. En déduire la dimension de  $E$ , ainsi qu'une base de  $E$ .

9. Soit  $E$  l'ensemble des matrices d'ordre  $n$  ( $n > 1$ ) réelles de la forme  $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & & \\ b & b & a & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & & & a & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{pmatrix}$ .

Montrer que  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . Trouver sa dimension et une base de  $E$ .

10. Soit  $E$  l'ensemble des matrices réelles de la forme  $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ .

a. Montrer que  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . Donner la dimension de  $E$  et une base de  $E$ .

b.  $*$  désigne la multiplication entre matrices. Montrer que  $(E, +, *)$  est isomorphe à  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  ; c'est à dire qu'il

existe une application  $\varphi$  de  $E$  dans  $\mathbb{C}$  telle que :  $\forall (A, B) \in E^2$ , 
$$\begin{cases} \varphi(A + B) = \varphi(A) + \varphi(B) \\ \varphi(A * B) = \varphi(A) \cdot \varphi(B) \\ \varphi \text{ est bijective} \end{cases}$$