

MATRICES ET APPLICATIONS LINEAIRES.

1. Trouver le rang, le noyau et l'image des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \text{Mat}(f, \mathcal{B}) \text{ où } \mathcal{B} \text{ est la base canonique de } \mathbb{R}^4. \quad (\text{maison})$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & i & -1-2i \\ i & 1 & i-2 \end{pmatrix} = \text{Mat}(g, \mathcal{B}) \text{ où } \mathcal{B} \text{ est la base canonique de } \mathbb{C}^2 ; E = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix}.$$

2. Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de \mathbb{C}^3 . Soient a, b, et c trois nombres complexes.

$$\text{Soit } f \text{ l'endomorphisme de } \mathbb{C}^3 \text{ dont la matrice dans la base } \mathcal{B} \text{ est : } A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}.$$

Soit $\vec{e}_1 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{e}_2 = \vec{j}$ et $\vec{e}_3 = \vec{k}$. Trouver la matrice de f dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. (maison)

3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. f est l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 canoniquement associé à la matrice A.

Calculer $\text{Ker}(f - 2\text{id}_{\mathbb{R}^2})$ et $\text{Ker}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^2})$. Trouver la matrice de f dans la nouvelle base ainsi obtenue.

4. Idem avec la matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$; $\text{Ker}(f - 3\text{id}_{\mathbb{R}^2})$ et $\text{Ker}(f - 5\text{id}_{\mathbb{R}^2})$. (maison)

$$5. f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (-x + y + 5z, -x + y - z, 3x - 3y - 3z) \end{array} \right.$$

On note $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

- Donner la matrice de f dans \mathcal{B} . (On l'appellera A)
- Calculer $f(2, 1, -1)$ de deux façons différentes. (Avec ou sans matrices)
- Calculer le noyau de f.
- Soit $\mathcal{B}' = (\vec{i} + \vec{j}, \vec{i} - \vec{k}, \vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$. Vérifier que \mathcal{B}' est une base de \mathbb{R}^3 , et donner $C = \text{Mat}(f, \mathcal{B}')$
- Calculer C^n et en déduire A^n .

6. $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de \mathbb{R}^3 . f est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .

$$f(\vec{i}) = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} ; f(\vec{j}) = \vec{i} - \vec{j} \text{ et } f(\vec{k}) = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}.$$

- Ecrire la matrice de f dans la base \mathcal{B} .
- Calculer $f(2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$ de deux façons différentes. (Avec ou sans matrices)
- Calculer le noyau et l'image de f.
- Donner une équation de $P = \text{Im}(f)$.
- Choisir une base \mathcal{B}' de P et écrire la matrice de la restriction de f à P dans la base \mathcal{B}' .

7. Soit $\varphi \begin{cases} \mathbb{R}_4[X] \rightarrow \mathbb{R}_4[X] \\ P(X) \mapsto (X+2)P'(X) - P(X) \end{cases}$.

Montrer que φ est linéaire, puis donner la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$.
Quel est son rang ? Déterminer le noyau et l'image de φ .

8.

On considère $E = \mathbb{R}_5[X]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 5.

On note E_1 l'ensemble des polynômes impairs de E et E_2 l'ensemble des polynômes pairs de E . On désigne par e_k ($0 \leq k \leq 5$) les éléments de la base canonique de E de sorte que $e_k = X^k$. On nommera pareillement « base canonique » de E_1 (resp. de E_2) la base (e_1, e_3, e_5) (resp. (e_0, e_2, e_4)) de E_1 (resp. de E_2).

1 Justifier que E_1 et E_2 sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires de E , c'est à dire $E = E_1 \oplus E_2$.

2 Montrer que l'application σ qui à tout polynôme de E_2 associe le polynôme $\sigma(P)$ défini par : $\sigma(P)(X) = (X^2+1)P''(X) - XP'(X)$ définit un endomorphisme de E_2 .

3 Donner la matrice de σ dans la base canonique (e_0, e_2, e_4) de E_2 .

4 Déterminer le noyau de σ , ainsi que ses valeurs propres et ses vecteurs propres. σ est-il diagonalisable ?

5 Mêmes questions avec l'application s qui à tout polynôme P de E_2 associe le polynôme $s(P)(X) = (X^2-1)P''(X) + P'(X)$.

9.

On considère les matrices I_4 ; $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 2/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$.

1 Calculer J^2 , puis pour tout entier naturel n non nul, la matrice J^n .

2 Exprimer la matrice A en fonction des matrices I et J .

En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $A^n = \frac{1}{5^n} I + \frac{1}{4} (1 - \frac{1}{5^n}) J$.

3 On considère les suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$; $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$; $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$; et $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{2}{5}p_n + \frac{1}{5}q_n + \frac{1}{5}r_n + \frac{1}{5}s_n \\ q_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{2}{5}q_n + \frac{1}{5}r_n + \frac{1}{5}s_n \\ r_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}q_n + \frac{2}{5}r_n + \frac{1}{5}s_n \\ s_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}q_n + \frac{1}{5}r_n + \frac{2}{5}s_n \end{cases} \quad \text{et } p_0 = 1 ; q_0 = r_0 = s_0 = 0.$$

Trouver l'expression de ces quatre suites en fonction de n .