

Limites et développements limités

1. Donner les limites en $+\infty$ de :

a. $2n + \frac{4}{n+2}$ b. $\frac{n^3}{3} + \frac{3n^2-5n}{n-1}$ c. $n + (-1)^n$ d. $x^2 + x\sin(x)$ e. $\frac{3x-5}{x+1} - \frac{\sin(x)}{x}$ f. $\sqrt{x^2 + 3x} - x$

DLs Niveau 1

1. Obtention des DLs

2. a. DL à l'ordre 3 en 0 de $\sin(2x)e^{-3x}$.
b. DL à l'ordre 3 en 0 de $\frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$ avec et sans division.

Indications : On développe $\ln(1+x)$ et $\ln(1-x)$ à l'ordre 4, et c'est le prof qui travaille d'abord sans division, puis avec.

3. a. DL à l'ordre 3 en 0 de $e^{\sin(2x)}$. b. DL à l'ordre 4 de $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$ avec une division. (MAISON)

2. Application aux calculs de limites

4. a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}$. b. $\lim_0 \frac{\cos(x)-1}{x \ln(1+x)}$. c. $\lim_0 \frac{x-\sin(x)}{x(1-\cos(x))}$.
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos(x) - x}{x - \ln(1+x)}$. (MAISON)
6. a. $\lim_0 \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$. b. $\lim_0 \frac{\tan(2x) - \sin(2x)}{\sin^3(x)}$. c. $\lim_0 \frac{3\sin(x) - \sin(3x)}{x(\cos(x) - \cos(3x))}$.

Niveau 2

1. Obtention des DLs

7. DL à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $\frac{\sin^2(x)}{\ln(\cos(x))}$.

2. Application à l'étude locale de fonctions

8. a. DL à l'ordre 3 au voisinage de 4 de \sqrt{x} . Equation de la tangente en 4.
Position de la courbe par rapport à sa tangente.
b. DL à l'ordre 2 au voisinage de $\frac{\pi}{3}$ de $e^{\cos(x)}$. Equation de la tangente en $\frac{\pi}{3}$. Position de la courbe.
9. DL à l'ordre 3 au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ de $e^{\sin(2x)}$. Equation de la tangente en $\frac{\pi}{2}$.
Position de la courbe par rapport à sa tangente. (MAISON)
10. DL à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $\frac{\sqrt{1+\sin(x)}}{\cos(x)}$. Equation de la tangente en 0. Position de la courbe.
11. DL à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $\sqrt{1+\tan(x)}$. Equation de la tangente en 0.
Position de la courbe par rapport à sa tangente. (MAISON)

3. Application aux calculs de limites

12. a. $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(\ln(x))}{x^2 - 3ex + 2e^2}$ b. $\lim_{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 2\tan(x)}{1 + \cos(4x)}$

13. $\lim_{\frac{1}{2}} \frac{\ln(2x)}{2x-1}$ (MAISON)

14. a. $\lim_0 \frac{\sqrt{1+2x} - \cos(2x) - \sin(x)}{x^2}$ b. $\lim_0 \frac{e^{-x} - 1 + \ln(1 + \sin(x))}{x^2(\operatorname{ch}(x) - \cos(x))}$

15. $\lim_0 \frac{x(2x^2 - \ln(\cos(3x)))}{\tan(x) - \sin(x)}$

16. a. $\lim_{+\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$ b. $\lim_{+\infty} \sqrt{x^3 + x - 2} - \sqrt{x^3 + 2x - 5}$

17. $\lim_{+\infty} \sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} - x\sqrt{2}$

Niveau 3

1. Obtention des DLs

18. DL à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $(2e^x - e^{-x})^{1/x}$

19. DL à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $(1+x)^{\sin x} - (\cos x)^x$

2. Application aux calculs de limites

20. a. $\lim_0 \frac{\sqrt{x}\tan(\sqrt{x}/2) - \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)}{\sin(x)-x}$ b. $\lim_0 \frac{e^{\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)}} - e^{\sin(x/2)}}{x^3}$ c. $\lim_0 \frac{e^{x\sqrt{1-2x+2x^2}} - \sin(x) - \cos(x)}{x(\cos(x) - \operatorname{ch}(x))}$

21. $\lim_1 \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{6x+2}}{1 - \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$

22. a. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^4 + 2n + 1} - \sqrt{n^4 + an}$ ($a \in \mathbb{R}$) b. a. $\lim_{+\infty} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n \ln(n)}$

23. a. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\ln(2n+1)} - \sqrt{\ln(2n)}$ b. $\lim_{+\infty} \ln(\operatorname{th}(n))$

24. $\lim_{+\infty} \frac{\sqrt{x^4+1} - \sqrt{x^4-1}}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}$

3. Application aux calculs des dérivées successives

25. Calculer les cinq premières dérivées en 0 de $\sqrt{\sqrt{1+x^4}} - \sqrt{1-x^4}$

26. Effectuer un DL en 0 à l'ordre 3 de $x\sqrt{1+x-2x^2} - \ln(1+xe^x)$.

En déduire la valeur de $f'(0)$; $f''(0)$ et de $f'''(0)$

27. Calculer les trois premières dérivées en 0 de $f(x) = \frac{1}{[1 + \ln(1 + 2x^2 + \sin(x))]^2}$

28. Calculer les trois premières dérivées en 0 de $f(x) = e^{\sin(x)} - \sqrt{1 - 2x + 2x^2}$ (MAISON)

4. Application à l'étude locale de fonctions

29. Etudier la position relative, au voisinage de 0, des courbes représentatives des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1-x} \text{ et } g(x) = 2 - \sqrt{4 - 4x - x^2}. \text{ (On effectuera des DLs à l'ordre 3)}$$

30. Etudier la position relative, au voisinage de 0, des courbes représentatives des fonctions suivantes :

$$f(x) = e^x \text{ et } g(x) = \frac{2+x}{2-x} \text{ et } h(x) = \frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2}. \text{ (On effectuera des DLs à l'ordre 3)} \quad (\text{ MAISON })$$

5. Applications aux études asymptotiques de fonctions.

31. Etudier le comportement au voisinage de $\pm\infty$ de $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$

32. Etudier le comportement au voisinage de $\pm\infty$ de $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}e^{1/x}$ (MAISON)

33. Etudier le comportement au voisinage de $\pm\infty$ des fonctions suivantes :

$$\sqrt[4]{x^4 + 4x^3} \quad ; \quad \frac{x}{1+e^{1/x}} \quad ; \quad \frac{x^2}{x+1}e^{1/x} \quad ; \quad x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad ; \quad x^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

EQUIVALENTS

34. Montrer que $\ln(n+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$

35. Trouver un équivalent simple en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$x + \ln(x) \quad x^2 + \sin(x) \quad \ln(x+2) \quad \ln(3x^2+1) \quad e^{2x} + x \quad e^x + \ln(x) - 2x \quad x^3 + 2^x$$

36. Trouver un équivalent simple en $+\infty$ des fonctions suivantes, puis calculer la limite en $+\infty$.

(On pourra s'aider de l'exercice précédent)

$$f(x) = \frac{(x+\ln(x))(x^2+\sin(x))}{\ln(3x^2+1)} \quad g(x) = \frac{e^{2x}+x}{e^x+\ln(x)-2x} \quad h(x) = \frac{(x^3+2^x)(\ln(2x)+3^x)}{5^x-\ln(x)}$$

37. Donner un équivalent en $+\infty$, en 0 et en 2 de $x^2 + x^5$.

38. Donner un équivalent en 0^+ de $\sqrt{x+x^2}$; en 1^+ de $\sqrt{-x^2+3x-2}$.

39. Quelle est la limite en 0 de $\frac{\tan(3x)}{\sin(2x)}$

40. (Stirling) Soit $f(n) = n! \left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

a. Déterminer la partie principale de $\ln\left(\frac{f(n+1)}{f(n)}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$

b. En déduire l'existence de $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n)$

c. Calculer L en utilisant la formule de Wallis : $\frac{\pi}{2} = \lim_{q \rightarrow +\infty} \frac{[2.4 \dots (2q)]^4}{[(2q)!]^2 (2q+1)}$