

# Fonctions de plusieurs variables

## Thème 1 Ensemble de définition

Trouver l'ensemble de définition des fonctions suivantes

1.  $f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2-4}{x+y-2}}$       2.  $f(x, y) = \tan(x + y)$       3.  $f(x, y) = \text{Ln} \left( \frac{x^2-2x+y^2+6y-39}{x-y+2} \right)$

4.  $f(x, y) = \text{Ln} \left( \frac{2x+3y-5}{x-y+2} \right)$       ( MAISON )

## Thème 2 Calculs de limites

5.  $f(x, y) = \frac{(2x+y+3)\sin(y)}{y}$  .

Ecrire f comme le produit d'une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  et d'une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

En déduire la limite de f en (0 ;0)

6.  $f(x, y) = \frac{1+x+y}{x^2-y^2}$  . En utilisant différents chemins, montrer que f n'a pas de limite en (0 ;0)

7.  $f(x, y) = \frac{\sin(x+y)}{\text{sh}(x+y)}$  . On cherche la limite de f en (0 ;0). Pour cela :

Ecrire f comme la composée d'une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  et d'une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

8.  $f(x, y) = \frac{\sin^2(x^2-2y)}{1-\cos(x^2-2y)}$  .      ( MAISON )

On cherche la limite de f en (0 ;0). Pour cela :

Ecrire f comme la composée d'une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  et d'une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

9.  $f(x, y) = \frac{(x+y+2)(x-y^2)}{\ln(1+x-y^2)}$  . Quelle est la limite de f en (0 ;0) ?

10.  $f(x, y) = \frac{\sin(x)-\sin(y)}{\text{sh}(x)-\text{sh}(y)}$  . Quelle est la limite de f en (0 ;0) ?

( on transforme  $\sin a - \sin b = \dots$  )

11.  $f(x, y) = \frac{\sin(x)-\text{sh}(y)}{\text{sh}(x)-\sin(y)}$  . Quelle est la limite de f en (0 ;0) ?

( on utilise différents chemins )

### Thème 3 : Continuité

12. La fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x,y) = \frac{x^2y-1}{e^{x+3y}}$  est-elle continue sur  $\mathbb{R}^2$  ?

13. La fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x,y) = \frac{\sin(2x-y)}{x^2+3}$  est-elle continue sur  $\mathbb{R}^2$  ? ( MAISON )

14.  $f(x, y) = \frac{\sin(x+y)}{\operatorname{sh}(x+y)}$ . f est-elle prolongeable par continuité en  $(-2;2)$  ?

15.  $f(x, y) = \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}$  quand  $(x; y) \neq (0;0)$ .

En utilisant différents chemins, montrer que f n'est pas prolongeable par continuité en  $(0;0)$ .

16.  $f(x, y) = \frac{x^3y^2}{x^8+y^4}$  quand  $(x; y) \neq (0;0)$ .

En utilisant différents chemins, montrer que f n'est pas prolongeable par continuité en  $(0;0)$ .

### Thème 4 : Dérivées partielles

17.  $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2+1}$ . Calculer les dérivées partielles de f.

18.  $f(x, y) = \ln(3x + 2y)$ . Calculer les dérivées partielles de f là où elle est définie.

19.  $f(x, y) = e^{x^2+3xy}$ . Calculer les dérivées partielles de f.

20.  $f(x, y) = g(x + 2y)$  où g est une fonction dérivable de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Calculer les dérivées partielles de f.

21.  $f(x, y) = g(x^2 - 2y)$  où g est une fonction dérivable de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Calculer les dérivées partielles de f.

( MAISON )

22. f va de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ .  $g(t) = f(2t - 3, t^3 - 1)$ . Calculer la dérivée de g.

23. f va de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ .  $g(t) = f(\sin(2t), \ln(t^2 + 1))$ . Calculer la dérivée de g.

( MAISON )

### Thème 5 : Formes différentielles totale exactes

24. La forme différentielle  $\delta\omega = (e^y + ye^x)dx + (xe^y + e^x)dy$  est-elle totale exacte ?

25. La forme différentielle  $\delta\omega = (x^2 + xy)dx + (y + x^2y)dy$  est-elle totale exacte ?

26. La forme différentielle  $\delta\omega = (x^2 + xy)dx + (y + \frac{x^2}{2})dy$  est-elle totale exacte ?

27. La forme différentielle  $\delta\omega = (\cos(x + 2y) + 3x^2)dx + (2\cos(x + 2y) - 2y)dy$  est-elle totale exacte ?

28. Une mole d'un gaz dans l'état de Clausius vérifie : 
$$\left\{ \begin{array}{l} (P + \frac{a}{TV^2})(V - b) = RT \\ \lim_{V \rightarrow +\infty} C_V(V, T) = \frac{3R}{2} \end{array} \right.$$

a) Calculer  $l$  et  $C_v$  ( On rappelle les relations de Clapeyron :  $l = T(\frac{\partial P}{\partial T})_V$  et  $(\frac{\partial C_V}{\partial V})_T = T(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2})_V$  )

b) Trouver l'expression de l'énergie interne  $U$  . ( On rappelle que  $dU = C_V dT + (l - P)dV$  )

c) Trouver de même l'expression de l'entropie  $S$  . ( On rappelle que  $dS = \frac{C_V}{T} dT + \frac{l}{T} dV$  )

d) On rappelle que  $\delta Q = C_V dT + l dV$  . Calculer l'expression de de la chaleur reçue  $Q$ .

Quelque chose cloche. Pourquoi ?

## Thème 6 : Plans tangents et courbes de niveau

29.  $f(x, y) = \cos(2x + y)$  . Vérifier que la surface  $z = f(x, y)$  passe par A(0;0;1); B(0; $\pi$ ; -1) et C(0; $\frac{\pi}{2}$ ;0)

Donner l'équation des plans tangents à la surface  $z = f(x, y)$  aux 3 points A; B et C.

Donner les vecteurs tangents et normaux aux courbes de niveau  $f(x, y) = 1$  et  $f(x, y) = -1$

Donner les vecteurs normaux à la surface en A; B et C.

30. Vérifier que la surface d'équation  $z = f(x, y) = x^3 + 2xy$  passe par le point A(1;0;1).

Donner l'équation du plan tangent à la surface  $z = f(x, y)$  au point A.

Donner le vecteur tangent et le vecteur normal à la courbe de niveau  $f(x, y) = 1$  en A.

31. a) Quelle est l'équation de la sphère de centre  $C_1 = (1; 1; 2)$  de rayon 3.

b) La surface  $S_2$  est définie implicitement par :  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 10z + 31 = 0$  .

Vérifier que  $S_2$  est une sphère de centre  $C_2$  à déterminer.

c) Vérifier que  $S_1$  et  $S_2$  passent par le point A de coordonnées (1;1;5).

d) Donner l'équation du plan tangent à  $S_1$  en A.

e) Donner l'équation du plan tangent à  $S_2$  en A.

f) En déduire l'équation de la droite D tangente au cercle  $S_1 \cap S_2$  en A.

g) Vérifier que D est orthogonale à la droite  $(C_1 C_2)$ .

h) On appelle C le centre du cercle  $S_1 \cap S_2$  et P le plan contenant ce cercle.

Donner une équation cartésienne de P. Quelle est la distance de  $C_1$  à P ?

Quel est le rayon du cercle ?

32. Les relations suivantes définissent des surfaces passant par le point  $O(0;0;0)$ .

$$S_1 : \sin(x + y) + \sin(x + z) + \cos(y + z) = 1 \quad S_2 : x^2 + y^2 + z^2 + \sin(z) = 0 .$$

Donner une équation du plan tangent à  $S_1$  en  $O$ .

Donner une équation du plan tangent à  $S_2$  en  $O$ .

En déduire le vecteur tangent en  $O$  à la courbe  $S_1 \cap S_2$ .

(MAISON)

## Thème 7 : Recherche d'extréma

Trouver les extréma des fonctions suivantes :

$$33. f(x, y) = (2x - y + 1)^2 + (x - 3y)^2 + 1 \quad 34. f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

$$35. f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 2x - 4y$$

$$36. f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$$

$$37. f(x, y) = \sin(x) + \sin(y) + \cos(x + y) \quad 38. f(x, y) = xe^y + ye^x$$

$$39. f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{x^2 - y^2}$$

(MAISON)

40.  $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 100$  . Déterminer les extréma de  $f$  dans  $\mathbb{R}^2$  .

Déterminer les extréma de  $f$  dans le triangle  $K = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq x\}$ .

$$41. f(x, y) = xy\sqrt{1 - x - y}$$

(MAISON)

Déterminer les extréma de  $f$  dans le triangle  $T = \{(x, y) / 0 \leq x; 0 \leq y; 0 \leq 1 - x - y\}$ .

## Thème 8 : Equations aux dérivées partielles

42.  $f$  est une fonction de deux variables  $x$  et  $y$  de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  .

On pose  $x = u + 2v$  et  $y = u - 2v$  et  $f(x, y) = g(u, v)$

Exprimer les dérivées  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  à l'aide de  $g$  et des variables  $u$  et  $v$ .

En déduire les fonctions  $f$  telles que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ .

43. En utilisant les coordonnées polaires, résoudre l'équation :  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} - f = -(x^2 + y^2)$ .